

Пржевальскій



З а Д а Ч и



Н. Сивологескит
Е. Пржевальскій.



СОБРАНИЕ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ТЕОРЕМЪ

И

ЗАДАЧЪ.

ИЗДАНИЕ ДЕВЯТОЕ.

ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ.

Цѣна 1 р. 60 к.



МОСКВА.
Типографія Г. Лиснера и Д. Собко.
Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. Лиснера.

1909.



Того же автора:

Начальная алгебра. Издание 4-е.

Собрание алгебраических задач (7582 задачи). Издание 7-е.

Собрание алгебраических задач для учеников старших классов средних учебных заведений (920 задач).
Часть I.

Пятизначные таблицы логарифмов чисел и тригонометрических величин. Издание 15-е, стереотипное.

Начальная геометрия.

Прямолинейная тригонометрия и собрание тригонометрических задач (2000 задач). Издание 7-е.

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве и собрание задач из аналитической геометрии (1100 задач). Издание 5-е.



ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предлагаемое 9-е изданіе состоитъ изъ восьми отдѣловъ и содержитъ въ себѣ 3100 теоремъ и задачъ изъ планиметріи и стереометріи, расположенныхъ по отдѣламъ такъ же, какъ и въ предыдущихъ изданіяхъ; въ немъ число задачъ значительно увеличено, и при этомъ нѣкоторыя изъ прежнихъ задачъ исключены или перенесены въ другое мѣсто. Въ первой части книги, отпечатанной крупнымъ шрифтомъ, помѣщены теоремы и задачи, а во второй, напечатанной мелкимъ шрифтомъ, — ихъ рѣшенія. Такъ какъ рѣшенія даны, большею частью, безъ чертежей, то ихъ надо составить самому, имѣя въ виду, что если сказано: начертимъ прямую AB , то A означаетъ лѣвый ея конецъ, а B — правый; продолжимъ прямую AB , то ее увеличиваемъ въ направлении отъ A къ B ; начертимъ изъ O дугу или окружность радіусомъ R , то надо точку O принять за центръ и описать изъ нея дугу или окружность радіусомъ, равнымъ R ; описать полуокружность на AB , то надо O , середину AB , принять за центръ и описать полуокружность радіусомъ OA .

Если при рѣшеніи теоремы или задачи есть ссылка на одну изъ предшествующихъ теоремъ или задачъ, то тамъ поставлены въ скобкахъ двѣ цифры: римская и арабская; первая указываетъ номеръ отдѣла, а вторая — номеръ задачи этого отдѣла. Кроме того, для сокращенія, кромѣ общепринятыхъ знаковъ, введены еще другіе, указанные ниже.

Хотя въ книгѣ и помѣщены отвѣты на теоремы и задачи, а для нѣкоторыхъ указаны пути для рѣшенія или приложены къ нимъ чертежи, или даны самыя рѣшенія, но все-таки рѣшающему задачи, въ огромномъ большинствѣ случаевъ, остается много самостоятельной работы для окончательнаго и полнаго рѣшенія ея: онъ долженъ самъ составить правильно чертежъ,

не теряя изъ виду общности рѣшенія и удобства расположенія данныхъ и искомыхъ; отыскать путь для рѣшенія задачи, повѣрить рѣшеніе и найти условія, при которыхъ возможна предложенная задача.

При составленіи этого сборника, я пользовался слѣдующими руководствами: *E. Rouché et Ch. de Comberousse*—*Traité de Géométrie élémentaire*; *E. Catalan*—*Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire*; *И. Александровъ*.—Методы рѣшеній геометрическихъ задачъ на построение и сборникъ геометрическихъ задачъ; *Baron Reynaud*—*Théorèmes et problèmes de Géométrie*; *W. Colenso*—*The Elements of Euclid*; *I. Todhunter*—*The Elements of Euclid*; *I. Milne*—*Weekly problem papers*; *M. Taylor*—*Euclid's elements of Geometry*; *I. D. Gandtner und Dr. R. E. Junghans*—*Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie* и др.

Е. Пржевальскій.

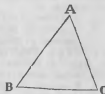
ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Задача.	Напечатано:	Должно быть:
45	156	и въ который можно вписать кругъ.	и около котораго можно описать кругъ.
90	176	касательной TA	прямой TQ
96	230	треугольника до ортоцентра его,	треугольника до вершинъ и d до ортоцентра его,

ОБОЗНАЧЕНІЯ.

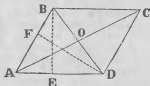
Въ треугольникѣ ABC означаемъ углы буквами A, B и C ; стороны, имъ противолежащія, буквами a, b и c ; высоты, опущенныя изъ вершинъ A, B и C , чрезъ h_a, h_b, h_c ; прямыя, соединяющія вершины A, B и C съ серединами противоположныхъ сторонъ, т.-е. *медіаны*, чрезъ m_a, m_b и m_c ; отрезки равнодѣлящихъ угловъ A, B и C , заключенныхъ между вершинами угловъ и противоположными сторонами, чрезъ l_a, l_b и l_c ; периметръ треугольника чрезъ $2p$; радіусъ описаннаго круга около треугольника буквою R ; радіусъ вписаннаго круга въ треугольникъ буквою r и радіусы вѣтвѣванныхъ въ него круговъ, касающихся сторонъ a, b и c , чрезъ r_a, r_b и r_c .

Фиг. 1.



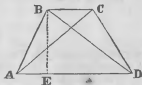
Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC буква A при вершинѣ прямого угла; слѣдовательно a будетъ гипотенузою, а b и c катетами. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC сторона BC или a будетъ основаніемъ треугольника.

Фиг. 2.



Въ параллелограммѣ $ABCD$ неравныя ея стороны AB и AD означаемъ буквами a и b ; высоты, перпендикулярныя къ этимъ сторонамъ, чрезъ h_a и h_b ; діагонали AC и BD — буквами k и l .

Фиг. 3.



Въ трапеціи $ABCD$, гдѣ сторона $BC \parallel AD$, означаемъ стороны: AB, BC, CD и DA буквами: a, b, c и d ; діагонали AC и BD буквами: k , и l , а высоту буквою h .

Въ четырехугольникѣ $ABCD$ (фиг. 4) означаемъ стороны: AB, BC, CD и DA буквами: a, b, c и d ; діагонали AC и BD буквами: k и l .

Фиг. 4.



Уголъ между прямыми AB и CD или между a и b означаемъ чрезъ (AB, CD) или (a, b) .

Въ рѣшеніяхъ задачъ слова: дуга, треугольникъ, прямоугольный треугольникъ, квадратъ, прямоугольникъ, параллелограммъ и четырехугольникъ замѣнены знаками: \frown , \triangle , ∇ , \square , \square , \square и \diamond . Также площадь треугольника и площадь четырехугольника замѣнены знаками: \blacktriangle и \blacklozenge .



ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПЛАНИМЕТРИЯ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ. Теоремы и задачи на прямую, углы, треугольники, перпендикуляры и наклонныя, параллельныя прямыя и многоугольники. Стран.

А. Теоремы (1—144)	1
В. Задачи на построение (145—440)	13
С. Задачи на вычисление (441—495)	26

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ. Теоремы и задачи на дуги, хорды, касательныя и секущія; касаніе и пересѣченіе окружностей; на вписанныя и описанныя многоугольники.

А. Теоремы (1—186)	30
В. Задачи на построение (187—510)	50
С. Задачи на вычисление (511—540)	70

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ. Теоремы и задачи на пропорціональность прямыхъ, подобіе треугольниковъ и многоугольниковъ и пропорціональность линий въ кругѣ.

А. Теоремы (1—241)	72
В. Задачи на построение (242—514)	97
С. Задачи на вычисление (515—640)	116

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ. Теоремы и задачи на правильные многоугольники и окружность круга.

А. Теоремы (1—39)	126
В. Задачи на построение (40—71)	130
С. Задачи на вычисление (72—170)	131

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ. Теоремы и задачи на площади прямолинейныхъ фигуръ, круга и частей круга.

А. Теоремы (1—139)	135
В. Задачи на построение (140—308)	149
С. Задачи на вычисление (309—524)	159

СТЕРЕОМЕТРИЯ.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ. Теоремы и задачи на прямыя и плоскости въ пространствѣ; углы, образуемые прямыми и плоскостями.

А. Теоремы (1—36)	174
В. Задачи на построение (37—98)	178
С. Задачи на вычисление (99—105)	182

ОТДѢЛЪ СЕДЬМОЙ. Теоремы и задачи на многогранники.

А. Теоремы (1—38)	182
В. Задачи на построение (39—68)	186
С. Задачи на вычисление (69—240)	188

ОТДѢЛЪ ВОСЬМОЙ. Теоремы и задачи на круглыя тѣла и сферическіе треугольники.

А. Теоремы (1—30)	198
В. Задачи на построение (31—153)	200
С. Задачи на вычисление (154—385)	207
Отвѣты на предложенныя теоремы и задачи	222



ПЛАНИМЕТРІЯ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Теоремы и задачи на прямую, углы, треугольники, перпендикуляры и наклонныя, параллельныя прямыя и многоугольники.

А. Теоремы.

1. На прямой AB даны точки: C , D и E такъ, что $AD=BD$ и $AC=BE$. Показать, что $CD=DE$ и $AE=BC$.
2. На прямой AB даны точки: C , D и E такъ, что $AD=BD$ и $AE=BC$. Показать, что $CD=DE$ и $AC=BE$.
3. Дана опредѣленная прямая AB и O , середина ея. Показать: 1) что разстояніе отъ O до какой-нибудь точки M , взятой на AB , равно полуразности разстояній точки M до концовъ A и B этой прямой и 2) что разстояніе отъ O до какой-нибудь точки M , взятой на продолженіи AB , равно полусуммѣ разстояній M до концовъ A и B прямой AB .
4. На прямой AB , середина которой C , взята точка D . Если E середина прямой AD , то $BD=2CE$.
5. Данъ уголъ AOB , его равнодѣлящая OC и еще прямая OM . Показать, что уголъ SOM равенъ полуразности угловъ AOM и BOM , когда прямая OM лежитъ внутри угла AOB , и равенъ полусуммѣ угловъ AOM и BOM , когда прямая OM лежитъ внѣ угла AOB .
6. Если по одну сторону прямой имѣемъ три равныхъ угловъ, то равнодѣлящая средняго угла будетъ перпендикулярна къ данной прямой.
7. Показать, что равнодѣлящія двухъ смежныхъ угловъ по одну сторону прямой перпендикулярны.

8. Даны четыре прямые: OA , OB , OC и OD , исходящія изъ точки O . Если углы AOD и BOC равны между собою, а углы AOB и COD —между собою, то OA и OC составляютъ одну прямую, равно какъ OB и OD .

Доказать равенство треугольниковъ, когда въ нихъ даны соответственно равными (9—15):

9. Высота и два угла, образуемые ею съ прилежащими сторонами.

10. Два угла и высота, проведенная изъ вершины одного изъ нихъ.

11. Сторона, прямая, соединяющая середину этой стороны съ противоположною вершиною, и уголъ между этими прямыми.

12. Сторона, высота, къ ней перпендикулярная, и прямая, соединяющая середину этой стороны съ противоположною вершиною.

13. Сторона и двѣ высоты, опущенныя на остальные стороны.

14. Двѣ стороны и прямая, соединяющая середину одной изъ нихъ съ противоположною вершиною.

15. Двѣ стороны и прямая, соединяющая середину третьей стороны съ противоположною вершиною.

Показать (16—18):

16. Каждая изъ сторонъ треугольника менѣе полупериметра.

17. Высота треугольника менѣе полусуммы сторонъ прилежащихъ къ ней.

18. Сумма высотъ треугольника менѣе его периметра.

19. Показать, что разстоянія концовъ основанія равнобедреннаго треугольника до противоположныхъ сторонъ равны.

20. Показать, что высоты равносторонняго треугольника равны.

21. Если равнодѣлящая угла треугольника раздѣляетъ пополамъ противоположную ему сторону, то этотъ треугольникъ будетъ равнобедренный.

22. Дана точка O внутри треугольника ABC . Показать, что уголъ BOC болѣе угла BAC .

23. Если точка D лежитъ на основаніи BC равнобедреннаго треугольника ABC , то AD менѣе каждой изъ равныхъ сторонъ.

24. Если точка D лежитъ на продолженіи основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC , то AD болѣе каждой изъ равныхъ сторонъ.

25. Если точка D на сторонѣ BC треугольника ABC , то большая изъ сторонъ AB и AC болѣе AD .

26. Если два треугольника имѣютъ общее основаніе и равные углы при вершинѣ, то вершина каждаго изъ треугольниковъ лежитъ въ другомъ.

27. Пусть D означаетъ середину основанія BC равнобедреннаго треугольника ABC и M какую-нибудь точку на AC . Показать, что разность между DB и DM менѣе разности между AB и AM .

28. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC , гдѣ уголъ A прямой, возьмемъ на AB какую-нибудь точку D и соединимъ ее съ C ; потомъ на DC отложимъ $DE=AC$ и CE раздѣлимъ пополамъ въ точкѣ F . Показать, что $DF+BF > AC+BC$.

29. Если на сторонахъ AB и AC треугольника ABC , въ которомъ $AC > AB$, возьмемъ точки D и E такъ, чтобы $BD=CE$, то $CD > BE$.

30. Если на продолженіяхъ сторонъ AB и AC треугольника ABC , въ которомъ $AC > AB$, возьмемъ точки D и E такъ, чтобы $BD=CE$, то $CD < BE$.

31. Если на сторонѣ AB и продолженіи стороны AC треугольника ABC , въ которомъ $AC > AB$, возьмемъ точки D и E такъ, чтобы $BD=CE$, то $CD < BE$.

32. Въ равностороннемъ треугольникѣ, прямая, соединяющія вершины треугольника съ серединами противоположныхъ сторонъ, равны между собою и равны также высотѣ этого треугольника.

33. Если чрезъ концы основанія равнобедреннаго треугольника проведемъ, по одну его сторону, двѣ прямыя подъ равными углами къ основанію, то точка пересѣченія этихъ прямыхъ равно отстоитъ отъ двухъ другихъ боковъ треугольника.

34. Если изъ концовъ основанія равнобедреннаго треугольника возставимъ перпендикуляры къ равнымъ сторонамъ его, то прямая, соединяющая точку пересѣченія перпендикуляровъ съ вершиною треугольника, будетъ равнодѣлящею угла при вершинѣ.

35. Если въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC уголъ при основаніи BC вдвое болѣе угла при вершинѣ, то равнодѣлящая угла B пересѣкаетъ сторону AC въ точкѣ D такъ, что $AD=BC$.

36. Если проведемъ равнодѣлящую внѣшняго угла A въ треугольникѣ ABC , то она пересѣчетъ продолженіе BC въ сторону B или въ сторону C , смотря потому AC болѣе или менѣе AB .

37. Если уголъ C въ треугольникѣ ABC равенъ суммѣ двухъ другихъ его угловъ, то сторона AB равна удвоенной прямой, соединяющей середину AB съ C .

38. Дана точка O внутри треугольника ABC . Показать, что $AB + AC > OB + OC$.

39. Середина прямой, заключенной между параллельными прямыми, будет серединою прямых, проходящих через эту точку и заключенных между теми же параллельными линиями.

40. Если в треугольнике ABC , где D середина бока AB , проведем прямую, параллельно BC , то эта прямая пройдет через E , середину AC , и хорда DE будет равна половине BC .

41. Прямая, соединяющая середины двух каких-либо сторон треугольника, будет параллельна третьему боку и равна половине его.

42. В треугольнике ABC соединим B с E серединою стороны AC и прямую BE разделим пополам в точке G ; проведем прямую AG , кот. пересечет сторону BC в точке D . Показать, что $BD = \frac{1}{2}BC$.

43. Равные прямые AB и CD , заключенные между параллельными прямыми AC и DB , пересекаются в точке O . Показать, что $AO = CO$ и $BO = DO$.

44. Показать, что периметр треугольника больше суммы прямых, соединяющих какую-либо точку внутри треугольника с его вершинами, и меньше удвоенной этой суммы.

45. Показать, что прямая, соединяющая вершину треугольника с серединою противоположной стороны, меньше полусуммы сторон треугольника, исходящих с нею из одной вершины, и больше полуразности между суммою этих сторон и третьей стороной.

46. Показать, что периметр треугольника всегда больше суммы прямых, соединяющих вершины треугольника с серединами противоположных сторон, и меньше удвоенной этой суммы.

47. Если из вершин треугольника ABC проведем прямые AOD , BOE и COF чрез точку O , находящуюся внутри треугольника, до пересечения с противоположными сторонами в D , E и F , то периметр треугольника больше $\frac{2}{3}(AD + BE + CF)$.

48. Через вершину A треугольника ABC проведем прямую XU , перпендикулярно к равнодвляющей угла A . Показать, что если на прямой XU возьмем какую-либо точку M и соединим ее с точками B и C , то периметр треугольника BMC будет больше периметра треугольника ABC .

49. В треугольнике ABC отложим на стороне AB (которую

продолжимъ, если будетъ нужно) часть AC' , равную AC , а на сторонѣ AC часть AB' , равную AB ; проведемъ прямую $B'C'$, которая пересѣчетъ BC въ точкѣ D . Показать, что AD будетъ равнодѣлящею угла A .

50. Даны двѣ произвольныя прямыя MN и KL ; если на одной изъ нихъ отложимъ послѣдовательно нѣсколько равныхъ частей и чрезъ точки дѣленій проведемъ параллельныя прямыя, пересѣкающія другую данную прямую, то онѣ отсѣкутъ на ней столько же равныхъ частей.

51. Уголь, составленный равнодѣлящими внутренняго угла и внѣшняго угла, съ нимъ не смежнаго, при какой-либо изъ сторонъ треугольника, равенъ половинѣ угла, противолежащаго этой сторонѣ.

52. Уголь, составленный равнодѣлящими внѣшнихъ угловъ при какой-либо изъ сторонъ треугольника, равенъ полусуммѣ угловъ треугольника, прилежащихъ къ этой сторонѣ.

53. Въ треугольникѣ ABC изъ точки D , взятой на AB , проведемъ прямую, пересѣкающую BC въ E и продолженіе AC въ F . Показать, что уголь между равнодѣлящими угловъ ABE и ADE равенъ углу между равнодѣлящими угловъ ACE и AFE .

54. Равнодѣлящая угла треугольника, въ которомъ стороны не равны, раздѣляетъ противоположную сторону на двѣ неравныя части. Показать, что большая изъ нихъ прилежитъ къ большей сторонѣ.

55. Равнодѣлящія угловъ треугольника встрѣчаются въ одной точкѣ, и точка встрѣчи ихъ отстоитъ одинаково отъ сторонъ треугольника.

56. Равнодѣлящая угла даннаго треугольника и равнодѣлящія внѣшнихъ угловъ, соответствующихъ другимъ угламъ треугольника, встрѣчаются въ одной точкѣ и точка встрѣчи равно отстоитъ отъ сторонъ треугольника.

57. Перпендикуляры, возставленные изъ серединъ сторонъ треугольника, встрѣчаются въ одной точкѣ.

58. Изъ точки A , взятой внѣ прямой XU , опустимъ перпендикуляръ AB на XU и изъ той же точки проведемъ, по одну сторону AB , наклонныя: AC , AD и AE такъ, чтобы углы: BAC , CAD и DAE были равны. Показать, что $BC < CD < DE$.

59. Дана прямая XU и точка A внѣ ея; опустимъ перпендикуляръ AB на XU и проведемъ наклонныя: AC , AD , AE , ..., увеличивая ихъ на одну и ту же длину. Показать, что $BC > CD > DE > \dots$

60. Показать, что равнодѣляція двухъ угловъ въ равностороннемъ треугольникѣ составляютъ уголъ, вдвое большій угла при вершинѣ.

61. Двойной внѣшній уголъ при основаніи равнобедреннаго треугольника болѣе на два прямыхъ угла при вершинѣ.

62. Если черезъ вершины треугольника проведемъ прямыя, параллельно противоположнымъ его сторонамъ, то въ пересѣченіи этихъ прямыхъ получимъ такой треугольникъ, котораго стороны будутъ вдвое болѣе сторонъ даннаго; вершины же даннаго треугольника будутъ серединами сторонъ построеннаго.

63. Высоты треугольника встрѣчаются въ одной точкѣ.

64. Если изъ точки, взятой на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, опустимъ перпендикуляры на катеты, то отъ даннаго треугольника отдѣлимъ два новые прямоугольные треугольника, у которыхъ сумма периметровъ равна периметру даннаго треугольника. Что будетъ, если точку возьмемъ на продолженіи гипотенузы?

65. Сумма разстояній отъ какой-нибудь точки M , взятой на основаніи BC равнобедреннаго треугольника ABC , до другихъ его сторонъ постоянна и равна перпендикуляру, опущенному изъ конца основанія на противоположную сторону. Что будетъ, когда возьмемъ точку на продолженіи основанія?

66. Сумма разстояній отъ какой-нибудь точки M , взятой внутри равносторонняго треугольника ABC , до его сторонъ постоянна. Что будетъ, когда возьмемъ точку внѣ треугольника?

67. Изъ концовъ A и B прямой AB и C середины ея проведемъ параллельныя прямыя до пересѣченія съ другою прямою XU въ точкахъ D , E , F . Показать, что прямая CF равна полусуммѣ или полуразности AD и BE , смотря по тому, точки A и B лежатъ по одну сторону или по разнымъ сторонамъ прямой XU .

68. Если въ двухъ равноугольныхъ треугольникахъ одна изъ сторонъ перваго треугольника въ n разъ болѣе соотвѣтствующей (лежащей противъ равнаго угла) стороны втораго, то и остальные стороны перваго треугольника также въ n разъ болѣе соотвѣтствующихъ сторонъ втораго.

69. Черезъ вершину A треугольника ABC проведемъ прямую XU и опустимъ на нее перпендикуляры BD и CE . Показать, что середина стороны BC равно отстоитъ отъ точекъ D и E .

70. Равнодѣляція внѣшнихъ угловъ треугольника образуютъ

въ пересѣченіи три треугольника, прилегающихъ къ данному, и одинъ, описанный около него. Показать, что эти треугольники имѣютъ углы соответственно равные, и каждый уголъ даннаго треугольника будетъ дополнительнымъ до двухъ прямыхъ удвоенному противолежащему углу описаннаго треугольника.

71. Въ треугольникѣ ABC точки D и E взяты на AC такъ, что $AD=AB$ и $CE=CB$, и точка F на BA такъ, что $BF=BC$. Показать, что $\angle EBD=\angle BCF$.

72. Если въ двухъ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$: $\angle A+\angle A'=d$ и $\angle B+\angle B'=d$, то $\angle C=\angle A'+\angle B'$ и $\angle C'=\angle A+\angle B$.

73. Если въ двухъ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$: $\angle A=\angle A'$ и $\angle B+\angle B'=2d$, то $\angle C=\angle B'-\angle A'$ и $\angle C'=\angle B-\angle A$.

74. Если въ двухъ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$: $\angle A=A'$ и $\angle B+\angle B'=d$, то $\angle C=d-(\angle A'-\angle B')$ и $\angle C'=d-(\angle A-\angle B)$.

75. Если въ треугольникѣ ABC раздѣлимъ пополамъ одинъ изъ угловъ при основаніи BC , напр. уголъ B , и изъ точки D пересѣченія равнодѣлящей съ противоположнымъ бокомъ проведемъ прямую, параллельно AB , до пересѣченія съ основаніемъ въ точкѣ E , то въ полученномъ треугольникѣ CDE сумма сторонъ DE и CE равна основанію даннаго треугольника.

76. Въ треугольникѣ ABC раздѣлимъ пополамъ углы при основаніи BC и черезъ точку O пересѣченія равнодѣлящихъ проведемъ прямую, параллельно AB и AC , до встрѣчи съ основаніемъ въ точкахъ D и E . Показать, что периметръ полученнаго треугольника DOE равенъ основанію даннаго треугольника.

77. Если въ треугольникѣ ABC черезъ точку O , пересѣченія равнодѣлящихъ угловъ B и C , проведемъ прямую DOE между боками угла A , параллельно BC , то DE будетъ равна суммѣ BD и CE . Если же черезъ точку O' , пересѣченія равнодѣлящей угла B съ равнодѣлящей дополнительнаго угла къ углу C , проведемъ прямую $O'E'D'$, параллельно BC , между боками угла A или боками угла, противоположнаго ему, то $D'E'$ будетъ равна разности прямыхъ BD' и CE' .

78. Прямая, соединяющія вершины треугольника съ серединами противоположныхъ сторонъ, встрѣчаются въ одной точкѣ; точка ихъ встрѣчи лежитъ на одной трети каждой изъ этихъ прямыхъ, считая отъ середины соответствующаго бока треугольника.

79. Во всякомъ треугольникѣ. большому боку соответствуетъ

меньшая изъ прямыхъ, соединяющихъ вершины треугольника съ серединами противоположныхъ сторонъ.

80. Въ прямоугольномъ треугольникѣ, въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ вдвое болѣе другого, гипотенуза вдвое болѣе меньшаго изъ катетовъ, и обратно.

81. Въ прямоугольномъ треугольникѣ прямая, соединяющая середину гипотенузы съ вершиною прямого угла, равна половинѣ гипотенузы.

82. Уголъ треугольника будетъ прямой, острый или тупой, смотря по тому, будетъ ли прямая, соединяющая его вершину съ серединою противоположной стороны, равна, болѣе или менѣе половины этой стороны.

83. Пусть A вершина равнобедреннаго треугольника ABC . Отложивъ на продолженіи BA часть $AD=AB$, показать, что DC перпендикулярна къ BC .

84. Раздѣлимъ въ треугольникѣ ABC стороны AB и AC пополамъ въ точкахъ E и F и опустимъ перпендикуляръ AD на BC . Показать, что $\angle FDE=\angle A$.

85. Проведемъ равнодѣлящія двухъ угловъ при основаніи треугольника и опустимъ на нихъ перпендикуляры изъ вершины. Показать, что прямая, проходящая чрезъ основанія перпендикуляровъ, параллельна основанію и дѣлитъ другія стороны пополамъ.

86. D , E и F — середины боковъ AB , BC и AC треугольника ABC ; проведемъ прямую изъ точки D , параллельно BF , до пересѣченія съ прямою EF въ точкѣ G . Показать, что стороны треугольника CDG равны медианамъ даннаго треугольника.

87. Даны двѣ параллельныя прямыя MN и PQ . Изъ какой-нибудь точки A прямой MN проведемъ наклонную AB и перпендикуляръ AC къ PQ ; между параллельными прямыми проведемъ такъ еще прямую BED , пересѣкающую AC въ точкѣ E , чтобы $ED=2AB$. Доказать, что уголъ DBC равенъ трети угла ABC .

88. На основаніи BC равнобедреннаго треугольника ABC возьмемъ какую-нибудь точку D ; отложивъ на сторонѣ AC часть $CE=CD$, проведемъ прямую ED , которая пересѣчетъ продолженіе бока AB въ точкѣ F . Показать, что утроенный уголъ AEF болѣе четырехъ прямыхъ угловъ на уголъ AFE .

89. Если въ треугольникѣ ABC опустимъ изъ вершины A перпендикуляръ AD на сторону BC , то $\angle BAD=\frac{1}{2}(\angle A-\angle B+\angle C)$ и $\angle CAD=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B-\angle C)$.

90. Показать, что уголъ, составленный равнодѣлящею угла треугольника и перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ вершины этого угла на противоположную сторону, равенъ полуразности двухъ другихъ угловъ.

91. Въ треугольникѣ ABC проведемъ прямую AD подѣляющую уголъ A на два равныхъ угла, и черезъ вершину A проведемъ еще прямую AE перпендикулярную къ BC , равную углу B . Показать, что треугольникъ DAE равнобедренный.

92. Проведемъ равнодѣлящія AO , BO и CO угловъ треугольника ABC и продолжимъ BO до пересѣченія съ AC въ точкѣ D ; изъ точки O опустимъ также перпендикуляръ OE на AC . Показать, что уголъ COE равенъ углу AOE .

93. Если на гипотенузѣ BC прямоугольнаго треугольника ABC отложимъ части: $BD=BA$ и $CE=CA$, то $\angle DAE=\frac{1}{2}d$.

94. Если на продолженіяхъ гипотенузы BC прямоугольнаго треугольника ABC отложимъ части: $BD=BA$ и $CE=CA$, то $\angle DAE=\frac{1}{2}d$.

95. На сторонѣ AB треугольника ABC и ея продолженіи отложимъ $AD=AE=AC$. Показать, что уголъ BEC равенъ половинѣ угла BAC и что уголъ DCE прямой.

96. Изъ концовъ прямой AB , по одну ея сторону, проведемъ параллельныя прямыя AN и BM ; на AB возьмемъ произвольно точку C и отложимъ на AN часть $AD=AC$, а на BM часть $BE=BC$. Доказать, что прямая DC перпендикулярна къ CE . Что будетъ, если точку C возьмемъ на продолженіи прямой AB ?

97. Въ треугольникѣ ABC , гдѣ уголъ B вдвое болѣе угла C , опустимъ перпендикуляръ AD на BC ; на AB , которую продолжимъ или нѣтъ, смотря по тому, уголъ B острый или тупой, отложимъ часть $BE=BD$ и проведемъ прямую DE , которая пересѣчетъ AC въ точкѣ F . Доказать: 1) что треугольники ABC и AFE равноугольны и 2) что сторона AB равна разности между отрезками DC и DB стороны BC , если уголъ B острый, и ихъ суммѣ, если уголъ B тупой.

Доказать равенство треугольниковъ, когда въ нихъ даны соответственно равными (98—102):

98. Сторона, прилежащій къ ней уголъ и сумма двухъ другихъ сторонъ.

99. Сторона, прилежащій къ ней уголъ и разность двухъ другихъ сторонъ.

100. Сторона, противолежащій уголъ и сумма сторонъ, содержащихъ этотъ уголъ.

101. Сторона, противолежащій уголъ и разность сторонъ, содержащихъ этотъ уголъ.

102. Периметръ и два угла.

103. Сумма діагоналей четырехугольника менѣе суммы прямыхъ, соединяющихъ его вершины съ точкою внутри четырехугольника, кромѣ точки пересѣченія діагоналей.

104. Сумма сторонъ выпуклаго четырехугольника болѣе суммы его діагоналей.

105. Уголъ, составленный равнодѣлящими двухъ послѣдовательныхъ угловъ четырехугольника, равенъ полусуммѣ двухъ другихъ его угловъ.

106. Уголъ, составленный равнодѣлящими двухъ противоположныхъ угловъ четырехугольника, равенъ полуразности двухъ другихъ его угловъ.

107. Сумма угловъ, составленныхъ продолженіями сторонъ многоугольника черезъ одну, сложенная съ $8d$, равна $2d$, взятымъ столько разъ, сколько сторонъ въ многоугольникѣ.

108. Если въ многоугольникѣ о $n+4$ сторонахъ продолжимъ его бока черезъ одинъ, то сумма угловъ при пересѣченіяхъ этихъ продолженій будетъ равна $2d$, повтореннымъ n разъ.

109. Если изъ какой-либо точки основанія равнобедреннаго треугольника проведемъ прямыя, параллельно двумъ другимъ бокамъ, то получимъ параллелограммъ, у котораго периметръ будетъ постояннымъ, гдѣ бы ни взяли точку на основаніи.

110. Прямая, заключенная между противоположными сторонами параллелограмма и проходящая чрезъ точку пересѣченія діагоналей (центръ параллелограмма), дѣлится въ этой точкѣ пополамъ и также раздѣляетъ параллелограммъ на равные четырехугольники.

111. Въ параллелограммѣ та діагональ болѣе, которая противолежитъ большему углу.

112. Въ параллелограммѣ $ABCD$ отложимъ на противоположныхъ сторонахъ AB и CD равныя части AE и CF ; точно такъ же и на другихъ сторонахъ AD и BC отложимъ равныя части AN и CG . Показать, что четырехугольникъ $EGFN$ будетъ параллелограммъ, вписанный въ данный, и что точка пересѣченія діагоналей обоихъ параллелограммовъ будетъ общая.

113. Данъ параллелограмъ $ABCD$; проведемъ прямую DE , перпендикулярно къ AC . Показать, что перпендикуляры, возставленные изъ точекъ A и C къ AB и BC , пересѣкутся на прямой DE .

114. Раздѣлимъ произвольно, но одинакимъ образомъ, стороны квадрата и соединимъ послѣдовательно точки дѣленія; тогда получимъ новый квадратъ, вписанный въ данный.

115. Если въ четырехугольникѣ діагонали равны и другъ друга дѣлятъ пополамъ, то данный четырехугольникъ будетъ прямоугольникомъ.

116. Въ параллелограммѣ $ABCD$ точки E и F середины противоположныхъ боковъ AB и CD . Доказать, что прямые AF и CE раздѣляютъ діагональ BD на три равныя части.

117. Чрезъ вершину B параллелограмма $ABCD$ проведемъ прямую XU . Доказать, что разстояніе вершины D до прямой XU равно суммѣ или разности разстояній вершинъ A и C до той же прямой, смотря по тому, прямая XU проходитъ внѣ или внутри параллелограмма.

118. Показать, что противоположные углы въ равнобочной трапеціи будутъ дополнительными другъ другу до двухъ прямыхъ.

119. Если въ трапеціи сумма противоположныхъ угловъ равна $2d$, то трапеція равнобочная.

120. Во всякой трапеціи середины двухъ непараллельныхъ сторонъ и середины діагоналей лежатъ на одной прямой; разстояніе между крайними точками равно полусуммѣ оснований, а разстояніе между средними равно полуразности оснований.

121. Если изъ серединъ непараллельныхъ боковъ равнобочной трапеціи возставимъ перпендикуляры, то они встрѣтятся на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ середины одной изъ параллельныхъ сторонъ.

Доказать равенство трапецій, когда въ нихъ даны соотвѣтственно равными (122—126):

122. Одна изъ непараллельныхъ сторонъ, одна изъ параллельныхъ и углы, прилежащіе къ этой сторонѣ.

123. Двѣ параллельныя стороны, одна изъ непараллельныхъ и уголъ, прилежащій къ ней.

124. Двѣ параллельныя стороны, одна изъ непараллельныхъ и діагональ.

125. Двѣ параллельныя стороны и два угла, прилежащіе къ одной изъ нихъ.

126. Всѣ четыре стороны.

127. На катетахъ AB и AC и гипотенузѣ BC треугольника ABC построимъ квадраты: $ABDM$, $ACEN$ и $BCFK$. Показать: 1) точки D , A и E лежатъ на одной прямой; 2) прямая BM параллельна прямой CN ; 3) если опустимъ перпендикуляры DP и EQ на продолженія гипотенузы, то $BC = DP + EQ$ и 4) если прямыя DM и EN продолжимъ до пересѣченія въ точкѣ H , то прямая AH перпендикулярна къ BC и прямыя AH , BE и CD пересѣкаются въ одной точкѣ.

128. На сторонахъ треугольника ABC построимъ квадраты: $ABDM$, $BCFK$ и $ACEN$. Показать, что прямая, соединяющая смежныя вершины двухъ какихъ-либо квадратовъ, равна удвоенной прямой, соединяющей ближайшую вершину треугольника съ серединою противоположной стороны, и перпендикулярна къ ней.

129. Прямыя, соединяющія послѣдовательно середины боковъ четырехугольника, составляютъ параллелограммъ.

130. Прямыя, соединяющія послѣдовательно середины боковъ равнобокой трапеціи, составляютъ ромбъ.

131. Прямая, соединяющая середины параллельныхъ сторонъ равнобокой трапеціи, перпендикулярна къ нимъ.

132. Въ параллелограммѣ $ABCD$, у котораго сторона AD вдвое болѣе AB , отложимъ на продолженіяхъ стороны AB части $AF = BE = AB$. Показать, что прямыя CF и DE взаимно перпендикулярны.

133. Во всякомъ четырехугольникѣ прямая, соединяющія середины діагоналей съ серединами двухъ противоположныхъ его сторонъ, составляютъ параллелограммъ.

134. Точка встрѣчи прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ сторонъ четырехугольника, лежитъ на серединѣ прямой, соединяющей середины діагоналей четырехугольника.

135. Показать: 1) что середины діагоналей четырехугольника и точка пересѣченія прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ его боковъ, лежатъ на одной прямой и 2) что точка пересѣченія этихъ прямыхъ находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ серединъ діагоналей.

136. Въ четырехугольникѣ $ABCD$ сторона AD самая большая, а сторона BC самая меньшая изъ всѣхъ сторонъ четырехугольника. Показать, что $\angle ABC > \angle ADC$ и $\angle BCD > \angle BAD$.

137. Равнодѣлящія угловъ выпуклаго четырехугольника образуютъ въ пересѣченіи другой четырехугольникъ, въ которомъ сумма противоположащихъ угловъ равна двумъ прямымъ. Когда первый четырехугольникъ — параллелограммъ, то второй — прямоугольникъ, діагонали котораго параллельны бокамъ параллелограмма и равны разности смежныхъ его сторонъ; когда же первый четырехугольникъ будетъ прямоугольникъ, то второй — квадратъ.

138. Данъ четырехугольникъ $ABCD$; проведемъ прямую CE , равную и параллельную AB , и прямую CF , равную и параллельную AD . Показать: 1) что фигура $BEFD$ — параллелограммъ, въ которомъ стороны равны и параллельны діагоналямъ даннаго четырехугольника; 2) діагонали параллелограмма $BEFD$ равны удвоеннымъ прямымъ, соединяющимъ середины противоположныхъ сторонъ четырехугольника и параллельны имъ, и 3) углы при точкѣ C равны угламъ даннаго четырехугольника.

139. Если въ шестиугольникъ противоположныя стороны равны и параллельны, то прямыя, соединяющія противоположныя вершины пересѣкаются въ одной точкѣ.

Доказать равенство четырехугольниковъ, когда въ нихъ даны соответственно равными (140—143):

140. Всѣ стороны и по углу, заключенному между соответственно равными сторонами.

141. Всѣ стороны и по діагонали, одинаково расположенной.

142. Три стороны и два угла, заключенные между этими сторонами.

143. Три угла и двѣ смежныхъ стороны.

144. Два выпуклыхъ многоугольника нечетнаго числа сторонъ будутъ равны, если, при наложеніи одного на другой, совпадаютъ середины ихъ сторонъ.

В. Задачи на построение.

145. На прямой XY , отъ данной на ней точки A , отложить часть, равную данной прямой a .

146. Начертить прямую, равную данной.

147. Увеличить длину данной прямой AB на a , гдѣ a данная длина.

148. Начертить прямую, равную суммѣ прямыхъ a , b и c .

149. Начертить прямую, равную данной ломаной $ABCDE$.

150. Начертить прямую, въ 4 раза большую данной.

151. Принявъ прямую AB за аршинъ, начертить прямую, равную 1 саж. + 2 арш.

152. Принявъ AB за футъ, начертить прямую, равную $1\frac{1}{2}$ сажени.

153. Принявъ дюймъ, раздѣленный на 10 равныхъ частей, за сажень, начертить прямую равную: а) $1\frac{1}{2}$ саж. и б) 1,6 саж.

154. Начертить прямую, равную $3a+2c$, гдѣ a и c данныя длины прямыхъ.

155. Найти разность двухъ прямыхъ a и b .

156. Начертить прямую, равную $5a-4b$, гдѣ a и b данныя длины прямыхъ. Всегда ли эта задача возможна?

157. Построить, т.-е. начертить прямую, равную:

1) $(4a-2b)-(3a-b)$, II) $4(5a-3b)$ и III) $3(2a-b+4c)$.

158. Изъ точки A , данной внѣ прямой MN , начертить окружность, которая пересѣкала бы эту прямую.

159. Изъ двухъ данныхъ точекъ A и B начертить двѣ пересѣкающіяся окружности.

160. Найти точку, одинаково удаленную отъ обоихъ концовъ прямой AB .

161. Найти точку, отстоящую отъ конца A прямой AB на 2 дюйма, а отъ конца B на 1 дюймъ.

162. Черезъ точку A , взятую на окружности O , провести хорду, равную данной прямой a .

163. Начертить уголъ, равный данному углу ABC .

164. На прямой XU , при данной или произвольной точкѣ ея, начертить уголъ, равный данному углу ABC .

165. Начертить уголъ, равный суммѣ угловъ A , B и C .

166. Начертить уголъ, въпятьеро большій даннаго угла A .

167. Начертить уголъ, равный разности угловъ A и B .

168. Данный уголъ XAU раздѣлить пополамъ.

169. Раздѣлить данный уголъ на 4, 8, 16 и т. д. равныхъ частей.

170. Начертить уголъ, равный 0,75 даннаго угла.

171. По данной суммѣ и разности угловъ построить самые углы. При какомъ условіи возможна эта задача?

172. Данную прямую AB раздѣлить пополамъ.

173. Данную прямую раздѣлить на 4, 8, 16, 32 и т. д. равныхъ частей.

174. Начертить прямую, равную 2,625 данной прямой.

175. По данной суммѣ и разности двухъ прямыхъ начертить самыя прямыя. При какомъ условіи возможна эта задача?

176. Изъ данной точки A прямой XU возставить къ ней перпендикуляръ.

177. Изъ конца B данной прямой AB возставить къ ней перпендикуляръ.

178. Изъ середины данной прямой AB возставить къ ней перпендикуляръ.

179. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ A и B или концовъ прямой AB .

180. На данной прямой MN найти точку, равноотстоящую отъ двухъ данныхъ точекъ A и B .

181. Дать уголъ XAY и внутри его точка P . На одномъ изъ боковъ угла найти такую точку, которая отстояла бы равно отъ данной точки и отъ вершины угла.

182. Найти точку, равноотстоящую отъ вершинъ треугольника.

183. Помощію одного циркуля, найти точку на продолженіи данной прямой AB .

184. Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ a и b и углу C .

185. Построить прямоугольный треугольникъ по катетамъ b и c .

186. Построить треугольникъ по высотѣ h_a и отрѣзкамъ d и e основанія, отсѣкаемымъ на немъ высотой.

187. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію a и высотѣ h_a .

188. Построить равнобедренный треугольникъ по одной изъ равныхъ сторонъ b и углу A при вершинѣ.

189. Построить треугольникъ по сторонѣ a и угламъ B и C .

190. Построить прямоугольный треугольникъ по катету b и прилежащему острому углу C .

191. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію a и углу B при основаніи.

192. Построить треугольникъ по тремъ сторонамъ a , b и c .

193. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію a и одной изъ равныхъ сторонъ b .

194. Построить равносторонній треугольникъ по сторонѣ a .

195. Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ a и b и углу B .

196. Построить прямоугольный треугольник по катету b и гипотенузѣ a .

197. Построить треугольник по отрезкамъ d и e основанія, отсѣкаемымъ на немъ высотой, и сторонѣ b .

198. Построить треугольник по отрезкамъ d и e основанія, отсѣкаемымъ высотой, и лежащему къ нему углу B .

199. Построить равнобедренный треугольник по одной изъ равныхъ сторонъ b и высотѣ h_a .

200. Изъ точки A , данной внѣ прямой XU , опустить на нее перпендикуляръ.

201. Определить разстояніе отъ точки A до прямой XU .

202. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ пересекающихся прямыхъ.

203. На данной прямой XU найти точку, равноотстоящую отъ двухъ пересекающихся прямыхъ MN и KL .

204. Найти точку, равноотстоящую отъ боковъ треугольника ABC .

205. Черезъ данную точку A провести прямую, параллельную данной прямой MN .

206. Найти разстояніе между двумя параллельными прямыми.

207. Провести прямую, параллельную данной прямой XU , на данномъ разстояніи a отъ нея.

208. Найти геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ отъ данной прямой MN на данномъ разстояніи a .

209. Найти на прямой XU точку, отстоящую отъ другой данной прямой MN на данномъ разстояніи a .

210. Черезъ точку A провести прямую подъ даннымъ угломъ α къ данной прямой XU .

211. Построить треугольник по двумъ угламъ A и B и сторонѣ a .

212. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузѣ a и углу B .

213. Построить прямоугольный треугольник по катету b и углу B .

214. Построить треугольник, когда дано положеніе серединъ его боковъ.

215. Построить треугольник по двумъ угламъ A и B и стороны котораго проходили бы черезъ три данныя точки: M , N и P ; при чемъ одна изъ сторонъ была бы параллельна данной прямой XU .

216. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ параллельныхъ прямыхъ MN и KL .

217. Прямая, опредѣленной длины, оставаясь параллельною самой себѣ, движется такъ, что одинъ изъ ея концовъ описываетъ прямую. Найти геометрическое мѣсто точекъ, описываемыхъ другимъ концомъ прямой.

218. На прямой XY , пересѣкающей двѣ параллельныя прямыя MN и KL , найти точку, равноотстоящую отъ нихъ.

219. Черезъ данную точку A провести прямую такъ, чтобы часть ея, заключенная между параллельными прямыми MN и KL , равнялась данной прямой a .

220. Найти точку, которая отъ двухъ данныхъ точекъ A и B находилась бы въ одинаковомъ разстояніи и отъ прямой MN на данномъ разстояніи a .

221. Между двумя непараллельными прямыми MN и KL найти такую точку, которая отстояла бы отъ MN на a и отъ KL на b .

222. Раздѣлить пополамъ уголъ, составленный двумя непараллельными прямыми MN и KL , не опредѣляя точки встрѣчи ихъ.

223. Раздѣлить прямую AB на n равныхъ частей.

224. Начертить прямую, равную $\frac{2}{3}$ данной прямой AB .

225. Черезъ точку A провести прямую такъ, чтобы она, проходя между данными точками B и C , находилась отъ нихъ въ равныхъ разстояніяхъ.

226. Даны три точки A , B и C . Провести черезъ точку A прямую такъ, чтобы часть ея, заключенная между перпендикулярами, опущенными на нее изъ точекъ B и C , дѣлилась пополамъ въ точкѣ A .

227. Черезъ данную точку M провести прямую такъ, чтобы она отсѣкала отъ сторонъ угла XAY равныя части, считая отъ вершины угла.

228. Черезъ данную точку M провести прямую такъ, чтобы она составляла съ боками угла XAY равные внутренніе углы.

229. Данный полукругъ AKB пересѣчь прямою, перпендикулярною къ діаметру такъ, чтобы часть ея между діаметромъ и полуокружностью была данной величины a . При какомъ условіи возможна эта задача?

230. Пересѣчь стороны даннаго угла XAY прямою, перпендикулярною къ сторонѣ AY , такъ, чтобы часть ея между боками угла была данной длины a .

231. Пересѣчь стороны данного угла $ХАУ$ прямою, параллельною данной прямою MN , такъ, чтобы отрѣзокъ ея между боками угла былъ данной длины a .

232. Пересѣчь стороны данного угла $ХАУ$ прямою, составляющею съ $АХ$ данный уголъ α , такъ, чтобы отрѣзокъ ея между боками угла былъ данной длины a .

233. Пересѣчь стороны данного угла $ХАУ$ прямою такъ, чтобы отрѣзокъ ея между боками угла былъ данной величины a , и чтобы она отсѣкала отъ сторонъ угла равныя части, считая отъ вершины его.

234. Пересѣчь стороны данного угла $ХАУ$ двумя параллельными прямыми такъ, чтобы отрѣзки ихъ между боками угла была данной длины a и b , и чтобы части сторонъ угла, заключенныя между ними, были равны между собою.

235. Черезъ точку P , данную внутри угла $ХАУ$, провести такъ прямою, чтобы части ея, содержащіяся между сторонами угла и данною точкою, были равны между собою.

236. Черезъ точку P , данную внѣ угла $ХАУ$, провести такъ прямою, чтобы часть ея между боками угла равнялась части, заключенной между данною точкою и ближайшимъ бокомъ.

237. На сторонахъ $АХ$ и $АУ$ угла A найти такія двѣ точки B и C , чтобы сумма: $AB + BC$ равнялась данной длинѣ l и прямая BC была параллельна данной прямой MN .

238. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC провести прямою, параллельно основанію, такъ, чтобы длина ея между боками треугольника равнялась суммѣ отрѣзковъ, отдѣляемыхъ ею на бокахъ треугольника, считая отъ основанія.

239. Продолжить равныя стороны равнобедреннаго треугольника ABC на столько, чтобы прямая, соединяющая конечныя точки продолженій, была параллельна основанію и равнялась бы суммѣ продолженій этихъ сторонъ.

240. Изъ точки A , данной внѣ параллельныхъ прямыхъ MN и KL , провести сѣкущую ихъ ABC (B на MN , C на KL) такъ, чтобы разность между AB и BC была данной длины a .

241. Найти на основаніи BC равнобедреннаго треугольника ABC или его продолженіи такую точку, чтобы сумма (или разность) разстояній отъ нея до боковъ треугольника равнялась данной длинѣ l .

242. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію a и углу A противъ основанія.

243. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник по гипотенузѣ a .

Построить прямоугольный треугольник (244—247), когда дано:

244. Перпендикуляръ h_a , опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, и d — одинъ изъ отрезковъ гипотенузы.

245. Перпендикуляръ h_a , опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, и катетъ b .

246. Отрѣзокъ d гипотенузы и прилежащій къ нему катетъ b .

247. Отрѣзокъ d гипотенузы и острый уголъ B .

Построить треугольникъ (248—252), когда дано:

248. a , b и h_a . 249. a , b и h_c . 250. h_a , B и C или A и B .

251. a , B и m_a . 252. a , B и m_c .

253. Построить равнобедренный треугольникъ по высотѣ h_a и углу B при основаніи.

254. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію a и высотѣ h_b .

255. Построить прямоугольный треугольникъ по катету b и въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ былъ бы вдвое болѣе другого остраго угла.

256. Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ a и въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ былъ бы вдвое болѣе другого остраго угла.

Построить треугольникъ (257—271), когда дано:

257. a , b и h_b . 258. a , h_a и m_a . 259. a , b и m_a .

260. a , b и m_c . 261. m_a , m_b и $\angle(m_a, m_b)$.

262. B , m_a и h_a . 263. A , l_a и h_a . 264. a , A и h_b .

265. a , m_a и h_b . 266. a , m_b и h_a . 267. h_a , h_c и B .

268. h_a , h_c и $\angle(h_a, h_c)$. 269. a , h_a и h_b .

270. h_a , m_b и m_c или h_a , m_a и m_c . 271. a , h_b и h_c .

272. Построить равносторонній треугольникъ по высотѣ.

273. Построить прямоугольный треугольникъ по катету c и разности φ острыхъ угловъ.

274. Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ a и разности φ острыхъ угловъ.

275. Построить треугольникъ по сторонѣ a , прилежащему углу B и суммѣ s двухъ другихъ сторонъ.

276. Построить прямоугольный треугольникъ по катету b и суммѣ s гипотенузы съ другимъ катетомъ.

277. Построить треугольник по сторонам a , лежащему к ней углу B и разности d двух других сторон.

278. Построить прямоугольный треугольник по катету b и разности d между гипотенузой и другим катетом.

Построить равнобедренный треугольник (279—282), когда дано:

279. Основание a и сумма s одной из равных сторон с высотой.

280. Основание a и разность d между одной из равных сторон и высотой.

281. Высота h_a и периметр $2p$.

282. Высота h_a и разность d между суммой равных сторон и основанием.

Построить треугольник (283—294), когда дано:

283. Сторона a , сумма s двух других сторон и h_b .

284. Сторона a , разность d двух других сторон и h_b .

285. Угол B , сумма s сторон, заключающих его, и h_a .

286. Угол B , разность d сторон, заключающих его, и h_a или h_c .

287. a , m_b и m_c или a , m_a и m_b .

288. m_a , m_b и m_c . 289. B , m_b и h_a . 290. a , h_b и m_c .

291. m_b , h_a и h_c . 292. $2p$, B и h_a . 293. h_a и $h_b = h_c$.

294. A , B и расстояния k_a , k_b и k_c сторон от данной точки O .

295. Построить треугольник по сумме s двух его сторон и углам B и C .

296. Построить прямоугольный треугольник по острому углу B и сумме s катетов.

297. Построить прямоугольный треугольник по сумме s гипотенузы с одним из катетов и углу B между ними.

298. Построить треугольник по разности d двух его сторон и углам B и C .

299. Построить прямоугольный треугольник по разности d между гипотенузой и одним из катетов и углу B между ними.

Построить равнобедренный треугольник (300—305), когда дано:

300. Угол B при основании и сумма s одной из равных сторон с основанием.

301. Угол A при вершинѣ и сумма s одной из равных сторон с основанием.

302. Угол A при вершинѣ и сумма s одной из равных сторон с высотой.

303. Уголъ B при основаніи и сумма s одной изъ равныхъ сторонъ съ высотой.

304. Уголъ B при основаніи и разность между одной изъ равныхъ сторонъ и высотой.

305. Уголъ A при вершинѣ и разность d между одной изъ равныхъ сторонъ и высотой.

Построить равносторонній треугольникъ (306—309), когда дано:

306. Сумма s стороны съ высотой.

307. Разность d между стороною и высотой.

308. Сумма s высоты съ отрезкомъ основанія.

309. Разность d между высотой и отрезкомъ основанія.

310. Построить треугольникъ по периметру $2p$ и двумъ угламъ B и C .

311. Построить прямоугольный треугольникъ по периметру $2p$ и острому углу B .

Построить треугольникъ (312—316), когда дано:

312. Сторона a , уголъ B и разность ϕ двухъ другихъ угловъ.

313. Сторона a , уголъ A и сумма s двухъ другихъ сторонъ.

314. Сторона a , уголъ A и разность d двухъ другихъ сторонъ.

315. Двѣ стороны a и b и разность ϕ угловъ, противолежащихъ этимъ сторонамъ.

316. Сторона a , разность ϕ угловъ, прилежащихъ къ сторонѣ, и разность d двухъ другихъ сторонъ.

317. Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ a и суммѣ s катетовъ.

318. Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ a и разности d катетовъ.

319. Построить треугольникъ по сторонѣ a , углу A и суммѣ s (или разности) высотъ, опущенныхъ на другія двѣ стороны.

320. Построить треугольникъ, зная разстоянія между смежными вершинами квадратовъ, построенныхъ на бокахъ искомаго треугольника.

321. На сторонѣ угла BAC дана точка P . Провести чрезъ точку P прямую, пересекающую AC въ Q такъ, чтобы $\angle APQ = 3 \angle AQP$.

322. Построить равнобедренный треугольникъ, у котораго вершина была въ данной точкѣ A : концы основанія лежали на двухъ параллельныхъ прямыхъ MN и KL , и основаніе было бы параллельно данной прямой XY .

323. Раздѣлить прямой уголъ XAY : 1) на три равныя части и 2) на шесть равныхъ частей.

324. Возстановить перпендикуляръ изъ конца A прямой AB , не продолжая ея.

325. Дана прямая XU и двѣ точки A и B по одну сторону ея. Найти на прямой XU такую точку, чтобы прямыя, проведенныя отъ нея къ точкамъ A и B , составляли равные углы съ данной прямой.

326. Даны двѣ прямыя MN и KL , пересекающіяся въ точкѣ O . Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы сумма (или разность) разстояній отъ каждой изъ нихъ до данныхъ прямыхъ была данной величины s .

327. Даны два угла ABC и DEF и прямая XU . Провести съ-кующую уголъ, параллельно XU такъ, чтобы сумма (или разность) отрезковъ, полученныхъ въ углахъ, была данная s .

Построить параллелограммъ (328—352), когда дано:

328. a , b и A . 329. a , k и $\angle(a, k)$. 330. k , l и $\angle(k, l)$.

331. a , b и k . 332. a , k и l . 333. b , k и $\angle(b, l)$.

334. b , A и l . 335. b , $\angle(b, k)$ и $\angle(b, l)$.

336. Уголъ A и четыре точки: M , N , P и Q . чрезъ которыя проходятъ стороны; при чемъ одна изъ нихъ параллельна данной прямой XU .

337. A , l и $\angle(a, l)$.

338. Точки M , N и P — середины трехъ сторонъ.

339. Прямая, соединяющія середины противоположныхъ сторонъ, и уголъ между ними.

340. a , b и h_b . 341. A , k и h_b . 342. b , l и h_b . 343. k , l и h_b .

344. a , h_a и h_b . 345. A , h_a и h_b . 346. a , A и h_a .

347. k , l и длина g перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины A на діагональ l .

348. A , b и сумма s діагонали съ другой изъ неравныхъ сторонъ.

349. A , b и разность d между одною изъ діагоналей и другою изъ неравныхъ сторонъ.

350. Периметръ $2p$, діагональ k и уголъ A .

351. Сторона b , сумма s діагоналей и уголъ φ между ними.

352. Сторона b , разность d діагоналей и уголъ φ между ними.

Построить ромбъ (353—367), когда дано:

353. a и $\angle A$. 354. a и $\angle(a, k)$. 355. k и l . 356. l и $\angle A$.

357. h и $\angle A$. 358. a и h . 359. h и l . 360. a и k .
 361. a и сумма s діагоналей. 362. a и разность d діагоналей.
 363. $\angle A$ и сумма s діагоналей.
 364. $\angle A$ и разность d діагоналей.
 365. $\angle A$ и сумма s стороны и діагонали.
 366. $\angle A$ и сумма s стороны и высоты.
 367. $\angle A$ и сумма s высоты съ діагональю, проходящею чрезъ вершину A .

Построить прямоугольникъ (368—377), когда дано:

368. k и $\angle(k, l)$. 369. a и k . 370. k и $\angle(k, a)$.
 371. b и $\angle(k, l)$. 372. a и сумма діагоналей.
 373. b и сумма діагонали съ другой стороною.
 374. a и разность между діагональю и другой стороною.
 375. k и периметръ $2p$. 376. k и разность неравныхъ сторонъ.
 377. Сумма s діагонали съ одною изъ сторонъ и уголъ α между

ними

Построить квадратъ (378—382), когда дано:

378. Периметръ $2p$. 379. Діагональ k .
 380. Сумма s стороны и діагонали.
 381. Сумма s сторонъ и діагоналей.
 382. Разность d между діагональю и стороною.
 383. Построить квадратъ такъ, чтобы двѣ противоположныя стороны проходили чрезъ двѣ данныя точки, а пересѣченіе діагоналей было бы въ третьей данной точкѣ.

384. Построить квадратъ, у котораго двѣ смежныя стороны проходили бы чрезъ двѣ данныя точки, а пересѣченіе діагоналей было бы въ третьей данной точкѣ.

385. Построить квадратъ, котораго стороны проходили бы чрезъ четыре данныя точки: M, N, P и Q .

Построить трапецію (386—396), когда дано:

386. A, a, b и c или A, a, b и d . 387. a, b, c и d .
 388. b, d, A и D . 389. a, d, k и l .
 390. a, d, A и D . 391. a, c, k и $d-a$ или l и $d-b$.
 392. d, h, k и l . 393. $d-a, b+c, A$ и k или l .
 394. $d-a, b-c, A$ и k или l . 395. b, d, k и l .
 396. d, k, l и $\angle(k, l)$.

Построить четырехугольникъ (397—414), когда дано:

397. a, b, c, d и A . 398. a, b, c, d и k .

399. $a, A, B, \angle(k, a)$ и $\angle(l, a)$. 400. a, d, A, k и $\angle(k, a)$.

401. a, b, A, B и C .

402. $k, B, D, \angle(k, a)$ и $\angle(k, d)$.

403. a, b, c, B и C .

404. a, b, k, A и C .

405. $a, A, B, \angle(k, a)$ и $\angle(l, a)$.

406. a, b, k, l и $\angle(k, l)$.

407. a, c, A, B и C .

408. a, b, c, k и l .

409. a, b, c, k и $\angle(k, l)$.

410. a, b, c, A и D .

411. a, b, c, d и известно еще, что диагональ, выходящая из вершины A , делит этот угол пополам.

412. a, c, k, l и $\angle(k, l)$.

413. a, b, c, d и прямая m , соединяющая середины сторон a и c .

414. a, b, c, d и $\angle(a, c)$.

415. Вписать в данный равносторонний треугольник ABC другой равносторонний же треугольник, у которого одна из вершин лежала бы в точке M , данной на стороне AC .

416. Вписать в квадрат $ABCD$ другой квадрат, которого одна из вершин лежала бы в точке M , данной на стороне AB .

417. В данный квадрат $ABCD$ вписать другой данный квадрат $MNPQ$.

418. В прямоугольник $ABCD$ вписать прямоугольник, у которого одна из вершин лежала бы в точке M , данной на стороне AB .

419. В треугольник ABC вписать ромб, который имел бы с треугольником общий угол A .

420. В равнобедренный треугольник ABC вписать равносторонний треугольник.

421. Около четырехугольника $ABCD$ описать параллелограмм.

422. В четырехугольник $ABCD$ вписать параллелограмм, у которого одна из сторон равнялась бы a .

423. Около равностороннего треугольника ABC описать квадрат, у которого одна из вершин совпадала бы с вершиною A треугольника, а из остальных сторон две проходили бы чрез вершины B и C .

424. В данный квадрат $ABCD$ вписать равносторонний треугольник, у которого одна из вершин была бы в A , а две другие лежали бы на сторонах BC и CD .

425. В квадрат $ABCD$ вписать равносторонний треугольник, у которого одна из вершин находилась бы в точке M , данной на стороне AB .

426. Построить равносторонній треугольникъ, у котораго одна изъ вершинъ лежала бы въ данной точкѣ, а двѣ другія на двухъ данныхъ пересѣкающихся прямыхъ.

427. Построить квадратъ, у котораго одна изъ вершинъ была бы въ данной точкѣ, а двѣ другія смежныя съ нею вершины лежали бы на двухъ данныхъ пересѣкающихся прямыхъ.

428. Построить квадратъ, у котораго вершины лежали бы на четырехъ прямыхъ, попарно параллельныхъ.

429. Построить выпуклый семиугольникъ, когда дано положеніе серединъ его сторонъ.

430. Въ какомъ направленіи должно бросить шаръ на прямоугольномъ бильярдѣ, чтобы онъ, ударившись послѣдовательно о четыре стѣнки его, попалъ въ данный шаръ, стоящій на бильярдѣ*).

431. Дана прямая XU и двѣ точки A и B по одну сторону ея. Найти на прямой XU такую точку, чтобы сумма разстояній отъ нея до данныхъ точекъ была наименьшая.

432. Дана прямая XU и двѣ точки A и B по разнымъ сторонамъ ея. Найти на прямой XU такую точку, чтобы разность разстояній отъ нея до данныхъ точекъ была наибольшая.

433. Даны параллельныя прямая PQ и ST ; точки A и B по разнымъ сторонамъ этихъ параллельныхъ и прямая KL . Требуется на этихъ прямыхъ найти такія двѣ точки M и N , чтобы ломаная $AMNB$, въ которой прямая MN параллельна KL , была наименьшею.

434. Данъ уголъ XOY и внутри его двѣ точки A и B . Найти на бокахъ OX и OY даннаго угла такія точки M и N , чтобы ломаная $AMNB$ была наименьшею.

435. Между треугольниками, имѣющими данный уголъ, заключенный между сторонами, которыхъ сумма постоянна, найти такой, который имѣлъ бы наименьшій периметръ.

436. На продолженіяхъ сторонъ AB и AC даннаго треугольника ABC отложимъ части BD и CE , которыхъ сумма равна третьей сторонѣ. Найти такое положеніе прямой DE , при которомъ она имѣетъ наименьшую величину?

437. На сторонѣ BC треугольника ABC найти такую точку M ,

*) По извѣстному закону: уголъ паденія равенъ углу отраженія, т.-е. шаръ, брошенный подъ извѣстнымъ угломъ къ плоскости, отскочитъ подъ тѣмъ же угломъ въ другую сторону и по тому же направленію.

чтобы сумма разстояній отъ нея до двухъ другихъ сторонъ была наименьшая.

438. Найти внутри треугольника такую точку, чтобы сумма разстояній отъ нея до боковъ треугольника была наименьшая.

439. Найти внутри четырехугольника такую точку, чтобы сумма разстояній отъ нея до вершинъ четырехугольника была наименьшая.

440. Въ данный треугольникъ ABC вписать другой треугольникъ LMN такъ, чтобы его периметръ былъ наименьшій. Показать, что въ этомъ случаѣ точки L , M и N будутъ основаніями высотъ.

С. Задачи на вычисленіе.

441. Дана прямая $AB=20$ аршинамъ и на ней точка M , отстоящая отъ B на 1,5 сажени. Найти разстояніе точки M до середины прямой AB .

442. Дана прямая $AB=3,4$ сажени и на ея продолженіи, въ направленіи отъ A къ B , точка M въ разстояніи 16 аршинъ отъ A . Найти разстояніе точки M до середины AB .

443. Дана прямая AB , длиною въ a аршинъ, и на этой прямой точка C , отстоящая отъ середины AB на b аршинъ. Найти разстоянія отъ точки C до A и B . Разсмотрѣть здѣсь случаи: 1) когда точка C лежитъ на AB и 2) когда точка C находится на продолженіи AB .

444. Одинъ изъ смежныхъ угловъ по одну сторону прямой равенъ $0,6d^*$). Найти другой уголъ.

445. Найти уголъ, дополнительный до двухъ прямыхъ углу, величиною въ $121^\circ 17' 54'' ,8$.

446. Найти дополненіе углу въ $49^\circ 30' 16''$ до прямого угла.

447. По одну сторону прямой AB , при точкѣ ся O , построены два угла: $\angle AOC=0,2d$ и $\angle BOD=40^\circ 35''$. Найти $\angle COD$.

448. По одну сторону прямой AB имѣемъ два угла: $\angle AOC$ и $\angle COB$, изъ которыхъ $\angle AOC=\frac{2}{9}d$; чрезъ точку O приведена равнодѣлящая OD угла $\angle BOC$. Найти $\angle AOD$.

449. По одну сторону прямой AB , при точкѣ O , взятой на ней, построены равные углы: $\angle AOC$ и $\angle BOD$. Найти $\angle COD$, когда $\angle AOC$ вчетверо больше $\angle COD$.

*) d обозначаетъ прямой уголъ.

450. Дана прямая AB и на ней точка O ; по одну сторону этой прямой проведемъ прямыя OC и OD такъ, чтобы $\angle COD = 5 \angle AOC$ и $\angle BDO = 7 \angle AOD$. Найти $\angle COD$.

451. Въ $\angle ABC$ проведена равнодѣлящая его прямая BD и прчмая BE , перпендикулярная къ BD . Найти $\angle CBE$, когда $\angle ABE = 81^\circ 48''$.

452. Внутри $\angle ABC = 164^\circ$ проведена прямая BD , перпендикулярная къ BA , и прмая BE , перпендикулярная къ BC . Найти $\angle DBE$.

453. Внутри $\angle ABC = 145^\circ$ проведены прямыя BD и BE такъ, что $\angle ABD = 100^\circ 29'$ и $\angle CBE = 82^\circ 47'$. Найти $\angle DBE$.

454. Внутри тупого угла ABC проведены прямыя BD и BE , перпендикулярно къ AB и BC . Зная, что $\angle DBE = \frac{3}{8} \angle ABC$, найти углы: ABC , ABE , CBD и DBE .

455. По одну сторону прямой AB , при точкѣ ея O , построены послѣдовательно: $\angle AOC = 0,3d$, $\angle COD = \frac{1}{15}d$, $\angle DOE = \frac{1}{20}d$ и еще четыре равныхъ угла. Найти величину каждаго изъ послѣднихъ.

456. Изъ точки O проведены четыре прямыя: OA , OB , OC и OD такъ, что $\angle AOB = 29^\circ 46'$, $\angle BOC = 100^\circ 24'$ и $\angle COD = 85^\circ$. Найти углы: AOD и BOD .

457. Изъ какой-либо точки O проведены четыре прямыя: OA , OB , OC и OD такъ, что $\angle AOB = \frac{1}{3}d$, $\angle AOC = \frac{2}{5}d$ и $\angle BOD = \frac{4}{3}d$. Найти углы: AOD , BOC и COD .

458. Около точки построено n равныхъ угловъ. Найти каждый изъ нихъ. $n = 72$; $n = 40$; $n = 16$.

459. Около точки расположены пять угловъ такъ, что каждый послѣдующій болѣе предыдущаго втрое. Найти меньшій и большій изъ этихъ угловъ.

460. Около точки расположено шесть угловъ такъ, что каждый послѣдующій болѣе предыдущаго на 10° . Найти углы.

461. Изъ точки O проведены четыре прямыя: OA , OB , OC и OD такъ, что углы AOB , BOC , COD и DOA находятся въ отношеніи $2 : 3 : 4 : 5$. Найти углы: BOC , BOD и DOA .

462. Около точки построено 20 угловъ, изъ которыхъ 15 равны между собою, а остальные 5 — между собою. Найти величины угловъ, когда сумма первыхъ вчетверо болѣе суммы вторыхъ.

463. Одинъ изъ угловъ треугольника равенъ $102^\circ 34''$, а другой $17^\circ 19'$. Найти третій уголъ треугольника.

464. Может ли быть такой треугольник, въ которомъ углы равны: 17° , 20° и 98° или же 45° , 137° и 54° ?

465. Найти углы прямоугольнаго треугольника, когда одинъ изъ его острыхъ угловъ равенъ $57^\circ 47' 26''$, 7.

466. Уголъ, составленный перпендикуляромъ и наклонною къ данной прямой, равенъ $24' 38''$. Найти углы, составляемые этою наклонною съ данной прямой.

467. Въ равнобедренномъ треугольникѣ уголъ при вершинѣ равенъ $0,25d$. Найти остальные углы треугольника.

468. Въ равнобедренномъ треугольникѣ одинъ изъ угловъ при основаніи равенъ 36° . Найти уголъ при вершинѣ.

469. Найти величины угловъ равносторонняго треугольника.

470. Два угла треугольника даны въ 30° и $47^\circ 54'$. Найти вѣшніе углы треугольника.

471. Два вѣшнихъ угла треугольника суть: $0,6d$ и $132^\circ 47' 54''$. Найти внутренние углы треугольника.

472. Вѣшній уголъ при основаніи равнобедреннаго треугольника равенъ $1,35d$. Найти уголъ при вершинѣ.

473. Вѣшній уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника равенъ $43^\circ 17'$. Найти углы при основаніи.

474. Внутренній уголъ треугольника равенъ 100° , а вѣшній, къ нему не прилежащій, равенъ $124^\circ 12'$. Найти остальные вѣшніе углы треугольника.

475. Одинъ изъ угловъ треугольника въ $1\frac{1}{2}$ раза болѣе другого, а этотъ послѣдній болѣе третьяго въ шесть разъ. Найти углы треугольника.

476. Внутренній уголъ треугольника равенъ $40^\circ 34'$, а вѣшній уголъ, не прилежащій къ нему, равенъ $96^\circ 28''$. Определить остальные углы треугольника.

477. Двѣ прямыя, дѣляція пополамъ углы B и C въ треугольникѣ ABC , встрѣчаются подъ угломъ въ 126° . Найти уголъ A .

478. Можно ли начертить треугольникъ, въ которомъ стороны были бы: 1) 10, 4 и 9? 2) 3, 5 и 8? 3) 2 саж., 1 арш. и 1 саж.?

479. Найти длину стороны равнобедреннаго треугольника, въ которомъ другія стороны суть: 12 и 5.

480. Сколько можно составить треугольниковъ изъ прямолинейныхъ отрѣзковъ длиною въ 2, 3, 4, 5, 6 и 7 вершковъ?

481. Сколько можно составить треугольниковъ изъ 8 различныхъ прямыхъ длиною въ 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4 и 5 вершковъ?

482. Какого вида будетъ треугольникъ, если одинъ изъ угловъ равенъ суммѣ двухъ остальныхъ? Если одинъ болѣе суммы остальныхъ? Если одинъ менѣе суммы остальныхъ?

483. Одна изъ сторонъ треугольника равна 9 арш., а другая 5 арш. Между какими предѣлами заключается величина третьей стороны?

484. Одна изъ сторонъ треугольника равна 6 саж., а другая 1 саж. Найти третью сторону, зная, что она заключаетъ въ себѣ цѣлое число сажень.

485. Разность двухъ неравныхъ угловъ параллелограмма равна $39^{\circ}29'$. Определить углы параллелограмма.

486. Сторона квадрата $a=4$ аршинамъ. Найти разстояніе отъ точки пересѣченія діагоналей до какой-либо изъ его сторонъ.

487. Периметръ трапеціи равенъ 60 метр., а прямая, соединяющая середины непараллельныхъ сторонъ, равна 17 метр. Найти сумму параллельныхъ и сумму непараллельныхъ сторонъ трапеціи.

488. Периметръ трапеціи равенъ 14,72 арш., а сумма непараллельныхъ сторонъ равна 9,78 арш. Найти длину прямой, соединяющей середины непараллельныхъ сторонъ.

489. Два угла четырехугольника прямые. Найти сумму остальныхъ его угловъ.

490. Найти уголъ четырехугольника, въ которомъ остальные углы равны: $132^{\circ}40'$, $42^{\circ}14'$ и $15^{\circ}29'$.

491. Сумма двухъ противоположныхъ угловъ четырехугольника равна $134^{\circ}46'47''$, а разность двухъ другихъ угловъ равна $74^{\circ}46'47''$. Найти углы, которыхъ дана разность.

492. Какого вида четырехугольникъ $ABCD$, когда $A+B=C+D$? Когда $A+B=C+D$ и $A=C$? Когда $A+B=C+D$ и $A=D$?

493. Найти суммы внутреннихъ угловъ семиугольника, десятиугольника и двенадцатиугольника.

494. Данъ 48-угольникъ, въ которомъ внутренніе углы равны. Найти величину каждаго изъ внутреннихъ угловъ.

495. Суммы внутреннихъ угловъ выпуклыхъ многоугольниковъ, соответственно, равны: 1) $12d$, 2) 1620° , 3) 3600° и 4) $2md$. Найти число сторонъ въ каждомъ изъ многоугольниковъ.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

Теоремы и задачи на дуги, хорды, касательныя и сѣкуція; на вписанныя и описанныя углы; на касаніе и пересѣченіе окружностей; на вписанныя и описанныя многоугольники.

А. Теоремы.

1. Если изъ какой-нибудь точки внѣ круга проведемъ двѣ прямыя подъ равными углами къ прямой, соединяющей эту точку съ центромъ круга, то дуги, отсѣкаемыя проведенными прямыми на окружности, будутъ равны.

2. Если изъ концовъ діаметра проведемъ параллельныя хорды, то эти хорды равны и ихъ другія конечныя точки лежатъ на одной прямой съ центромъ круга.

3. Если двѣ концентрическія окружности пересѣчены прямой, то отрѣзки этой прямой, заключенныя между окружностями, будутъ равны.

4. Если въ окружности опустимъ перпендикуляры изъ концовъ діаметра на какую-либо хорду или ея продолженіе, то разстоянія основаній этихъ перпендикуляровъ до соответствующихъ концовъ хорды будутъ равны.

5. Если въ окружности изъ концовъ хорды возставить къ ней перпендикуляры до пересѣченія съ какимъ-либо діаметромъ, то эти перпендикуляры отсѣкутъ отъ концовъ его равныя части.

6. Если въ равныхъ разстояніяхъ отъ концовъ какой-либо хорды окружности проведемъ къ ней двѣ перпендикулярныя хорды, то онѣ будутъ равны. Какіе изъ отрѣзковъ проведенныхъ хордъ равны?

7. Изъ точекъ A и B діаметра круга O , равноотстоящихъ отъ его центра, проведемъ двѣ параллельныя прямыя въ одну сторону отъ діаметра, пересѣкающія окружность въ P и Q . Показать, что прямая PQ перпендикулярна къ AP и BQ .

8. Если двѣ равныя и параллельныя хорды окружности пересѣкаютъ діаметръ ея, то отрѣзки діаметра при его концахъ, а также и части обѣихъ хордъ, лежащихъ по разнымъ сторонамъ діаметра, будутъ равны.

9. Если на двухъ равныхъ хордахъ круга отложимъ отъ концовъ равныя части и чрезъ точки дѣленій проведемъ хорду, то части

этой послѣдней, заключенныя между концами ея и двумя первыми хордами, будутъ равны.

10. Если концы одной изъ двухъ параллельныхъ хордъ отсѣчемъ съ центромъ круга, то этими прямыми или ихъ продолженіями отсѣчемъ отъ концовъ другой хорды равныя части.

11. Если черезъ концы одной изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ хордъ и центръ круга проведемъ прямыя, то онѣ отсѣкутъ отъ концовъ другой хорды равныя части.

12. Изъ всѣхъ хордъ, проходящихъ чрезъ точку, данную внутри круга, наименьшая та, которая въ этой точкѣ дѣлится пополамъ.

13. Шесть точекъ: A , B , C , A' , B' и C' такъ расположены на данной окружности, что хорды AB и BC параллельны хордамъ $A'B'$ и $B'C'$. Показать, что и хорда AC будетъ параллельна хордѣ $A'C'$.

14. Раздѣлимъ какую-нибудь хорду круга на три равныя части и черезъ точки дѣленія проведемъ радіусы, которые раздѣлятъ дугу, соответствующую хордѣ, тоже на три части. Показать, что двѣ крайнія части равны между собою и менѣе средней.

15. Изъ точки A , взятой внѣ круга O , проведена сѣкущая ACD такъ, что внѣшняя часть ея AC равна радіусу окружности; изъ точки же A проведена еще сѣкущая $ABOE$. Показать, что уголъ AOC равенъ трети угла DOE .

16. Данъ кругъ O и діаметръ его AB . Изъ какой-нибудь точки C радіуса AO проведемъ къ точкамъ D и E , взятымъ на окружности, прямыя CD и CE и продолжимъ CD на $DF=CD$, а CE на $EG=CE$. Показать, что точки F и G лежатъ на окружности, которой центръ на радіусѣ OB и отстоитъ отъ O на разстояніи, равномъ OC .

17. AC діаметръ окружности ABC . Проведемъ касательную чрезъ точку B окружности и опустимъ перпендикуляръ AP на касательную. Показать, что хорда AB есть равнодѣлящая угла PAC .

18. Хорды, проведенныя въ болѣеи изъ двухъ концентрическихъ окружностей и касающіяся меньшей, будутъ равны между собою.

19. Касательныя, проведенныя къ концамъ діаметра круга, будутъ параллельны между собою.

20. Показать, что вершины прямыхъ угловъ въ треугольникахъ, построенныхъ на прямой, данной по величинѣ и положенію, какъ гипотенузѣ, лежатъ на окружности, описанной изъ середины гипотенузы радіусомъ, равнымъ половинѣ ея.

21. Пусть ABC — равносторонний треугольник; D , E и F — середины боковъ: BC , AC и AB . Показать, что прямая DF будетъ касательною къ кругу, проходящему черезъ точки C , D и E .

22. Данъ кругъ, котораго центръ O , и точка A внѣ круга. Изъ точки A опишемъ дугу радіусомъ AO , а изъ точки O — дугу радіусомъ, равнымъ діаметру даннаго круга, которая пересѣчетъ первую дугу въ точкахъ B и C ; проведемъ прямыя OB и OC , которыя пересѣкутъ данную окружность въ точкахъ D и E . Показать, что прямыя AD и AE будутъ касательныя къ данному кругу.

23. Длины двухъ касательныхъ къ кругу, проведенныхъ изъ точки внѣ его, равны и составляютъ равные углы съ прямою, соединяющею эту точку съ центромъ круга.

24. Хорда, соединяющая точки касанія двухъ касательныхъ, проведенныхъ изъ точки, взятой внѣ круга, перпендикулярна къ прямою, соединяющей данную точку съ центромъ круга.

25. Если двѣ касательныя къ кругу пересѣкаются подъ угломъ въ 60° , то прямая, соединяющая точку ихъ встрѣчи съ центромъ круга, равна діаметру круга.

26. Если двѣ касательныя къ окружности встрѣчаются подъ угломъ въ 120° , то прямая, соединяющая точку ихъ встрѣчи съ центромъ круга, равна суммѣ обѣихъ касательныхъ.

27. Если на радіусѣ даннаго круга, какъ діаметръ, опишемъ окружность и изъ общей точки проведемъ хорду большаго круга, то она раздѣлится пополамъ меньшою окружностью.

28. Хорды AB и CD окружности O пересѣкаются въ точкѣ E . Продолжимъ AB , если это необходимо, и отложимъ на ней часть $EF = ED$ и на CD часть $EG = EB$. Показать, что прямыя FG и CA параллельны.

29. Опишемъ окружности на сторонахъ четырехугольника, какъ діаметрахъ. Показать, что общая хорда описанныхъ окружностей на двухъ прилежащихъ сторонахъ параллельна общей хордѣ двухъ другихъ окружностей.

30. По одну сторону прямой AB опишемъ полукругъ ACB и квадрантъ ADB ; проведемъ прямую BD , которая пересѣчетъ полуокружность въ точкѣ C . Показать, что $AC = CD$.

31. AB — діаметръ круга; AC и BD — двѣ пересѣкающіяся хорды въ точкѣ M . Показать, что прямая, проходящая черезъ точку M , перпендикулярно къ AB , проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ AD и BC .

32. Сумма двухъ противоположныхъ дугъ окружности, заключенныхъ между двумя пересѣкающимися хордами, равна суммѣ дугъ, заключенныхъ между діаметрами, параллельными хордамъ.

33. Когда двѣ пересѣкающіяся хорды круга встрѣчаются подъ прямымъ угломъ, то сумма противоположныхъ дугъ, заключенныхъ между хордами, равна полуокружности.

34. Если на радіусѣ круга опишемъ окружность и изъ центра даннаго круга проведемъ два радіуса, пересѣкающіе начерченную окружность, то хорда меньшаго круга, соответствующая дугѣ, заключенной между радіусами, равна перпендикуляру, опущенному изъ конца одного радіуса на другой.

35. Въ кругѣ O проведемъ хорду AB и діаметръ CD , перпендикулярный къ AB . Если P какая-либо точка окружности, то DP и CP будутъ равнодѣлящими угла APB и дополнительнаго ему.

36. Даны точки A и B . Если черезъ эти точки станемъ проводить прямыя, составляющія при пересѣченіи данный уголъ, то равнодѣляющія этихъ угловъ проходятъ черезъ постоянную точку.

37. Если черезъ точку пересѣченія окружности съ равнодѣлящей вписаннаго угла проведемъ хорду, параллельную одной изъ сторонъ угла, то она будетъ равна хордѣ, служащей другою стороною угла.

38. Если точку окружности соединимъ съ концами хорды и образуемый этими прямыми уголъ отложимъ на хордѣ при концѣ ея и въ сторону, противоположную центру, то сторона этого угла будетъ касательною къ окружности.

39. Окружность раздѣлена въ точкахъ A и B на двѣ части: если одну изъ нихъ раздѣлимъ пополамъ въ точкѣ C , а на другой возьмемъ двѣ какія-либо точки D и E , то уголъ между прямыми AD и CE будетъ равенъ углу, составленному прямыми CD и BE .

40. Если двѣ равныя хорды пересѣкаются внутри или внѣ круга, то соответствующія части на этихъ хордахъ, считая ихъ отъ точки пересѣченія, равны между собою.

41. AB діаметръ круга и CD хорда, перпендикулярная къ нему. Проведемъ прямую, пересѣкающую окружность въ E и продолженіе CD въ F . Показать, что углы AEC и DEF будутъ равны.

42. На AB описаны два круговые сегмента ACB и $ADEB$. Черезъ точку C проведемъ произвольно прямыя ACE и BCD . Показать, что длина дуги DE будетъ постоянная.

43. На дугѣ AB окружности O возьмемъ произвольную точку P и опустимъ перпендикуляры AG и AH на прямыя BP и AP . Показать, что прямая GH будетъ касательною къ нѣкоторой постоянной окружности.

44. Въ окружности O проведены хорды AB и CD данной длины и такія, что сумма соотвѣствующихъ имъ центральныхъ угловъ равна двумъ прямымъ. Если P точка пересѣченія AC и BD , то разстояніе отъ P до середины хорды будетъ одно и то же при всякомъ положеніи хорды.

45. Даны окружности O и O' . Черезъ точку P окружности O проведемъ касательную MPN къ ней и въ окружности O' хорду AB , параллельную касательной. Прямыя PA и PB пересѣкаютъ окружность O въ C и D , а окружность O' въ E и F . Показать, что прямыя CD и EF параллельны.

46. Черезъ точку, данную на хордѣ круга, проведена въ немъ произвольно хорда. Показать, что прямая, соединяющая середины хорды, составляетъ съ проведенною хордою одинъ и тотъ же уголъ.

47. Черезъ точку P окружности проведемъ хорды: PA, PB, \dots , которыя продолжимъ на длины: PA', PB', \dots , равныя, соотвѣственно, этимъ хордамъ. Показать, что точки A', B', \dots лежатъ на окружности, равной данной окружности.

48. A, B и C три точки окружности. Равнодѣляющіи угла BAC и угла, дополнительнаго ему, пересѣкаютъ хорду BC въ E и продолженіе ея въ F . Показать, что касательная къ окружности въ A дѣлитъ пополамъ прямую EF .

49. Опишемъ окружность произвольнымъ радіусомъ, проходящую чрезъ вершины B и C треугольника ABC и пересѣкающую стороны BA и CA или ихъ продолженія въ P и Q . Показать, что прямая PQ остается параллельной самой себѣ какимы бы радіусомъ ни была описана окружность.

50. Окружности, описанныя на двухъ сторонахъ треугольника, какъ діаметрахъ, пересѣкаются на третьей сторонѣ или ея продолженіи.

51. На окружности даны точки: A, B и C ; прямая, проходящая черезъ середины дугъ AB и AC , пересѣкаетъ хорду AB и продолженіе хорды AC въ F и G . Показать, что $AF = AG$.

52. Точки P и Q взяты произвольно на двухъ дугахъ круговыхъ сегментовъ, описанныхъ на AB и по одну сторону ея. Проведемъ

равнодѣляющія угловъ PAQ и PBQ , которыя пересѣкутся въ M . Показать, что уголъ AMB постоянный.

53. AB и CD хорды круга, пересѣкающіяся въ E ; продолжимъ AB на $BH=BE$ и опишемъ окружности, проходящія чрезъ A, C, E и A, C, H , которыя пересѣкутъ прямую BC въ K и L . Показать, что точка B середина KL .

54. Черезъ точку C окружности проведемъ прямыя ACB и DCE , гдѣ B и E суть точки пересѣченія прямыхъ съ окружностью. Показать, что равнодѣляющая угла ACE пересѣкаетъ окружность въ точкѣ P , равно удаленной отъ точекъ B и E .

55. Въ кругѣ проведена хорда AB ; черезъ одинъ ея конецъ A проведемъ діаметръ AC , а черезъ другой—касательную BD къ кругу. Означимъ буквами M и N точки пересѣченія AB и BD съ прямою XU , проходящею черезъ центръ круга, перпендикулярно къ діаметру AC , показать, что $MN=BN$.

56. Данъ прямоугольный треугольникъ ABC ; опишемъ полуокружность ADE , которой центръ лежалъ бы на катетѣ AC и которая касалась бы гипотенузы BC въ точкѣ D ; проведемъ прямую DE , которая пересѣчетъ продолженіе катета AB въ точкѣ F . Показать, что $BF=AB$.

57. Треугольникъ ABC вписанъ въ кругъ O ; D и E точки діаметрально противоположныя A и B . Проведемъ хорду DE , параллельно BC , и хорду EF , которая пересѣчетъ AC и BC въ точкахъ G и H . Показать, что прямая OG параллельна BC и что $EG=GH=GC$.

58. Въ окружности O проведемъ діаметръ AB и хорду CD , перпендикулярную къ нему. Точку M , взятую произвольно на окружности, соединимъ съ точкою C и опустимъ перпендикуляры AF и BE на прямую CM . Показать, что $ME+MF=MC$ и $ME-MF=MD$.

59. Показать, что діаметры окружностей, описанныхъ на сторонахъ треугольника и проходящихъ черезъ точку пересѣченія ихъ, равны. 50460

60. Данъ кругъ и описанный уголъ. Показать: 1) что всѣ касательныя, проведенныя къ дугѣ, обращенной выпуклостью къ вершинѣ, составляютъ съ боками угла треугольникъ, котораго периметръ будетъ величина постоянная, какъ бы ни проводили касательныя, и 2) центральный уголъ, соответствующій той сторонѣ треугольника,

которая лежит на касательной къ кругу, есть также величина постоянная. Что будетъ, когда станемъ проводить касательныя къ дугѣ, обращенной вогнутостью къ вершинѣ?

61. Изъ точки A , взятой внѣ круга O , проведемъ къ нему касательныя AB и AC , гдѣ B и C точки касанія; между боками угла проведемъ прямую DE (D на AB , E на AC) такъ, чтобы $DE = DB + CE$. Показать, что DE будетъ касательною къ кругу.

62. Отрѣзокъ касательной къ кругу, заключенный между касательными, проведенными черезъ концы какого-либо діаметра, видѣнъ изъ центра круга подъ прямымъ угломъ.

63. Если черезъ точки пересѣченія двухъ окружностей проведемъ параллельныя прямыя, то части этихъ прямыхъ, ограниченныхъ окружностями, равны.

64. Если изъ точки пересѣченія двухъ окружностей проведемъ діаметры, то другіе концы діаметровъ и другая точка пересѣченія окружностей лежатъ на одной прямой.

65. Двѣ окружности пересѣкаются въ точкахъ A и B . Если черезъ точку A проведемъ сѣкущую CAD , то уголъ CBD будетъ той же величины, какъ бы ни проводили сѣкущую.

66. Если въ двухъ касающихся кругахъ проведемъ параллельныя діаметры, то прямыя, соединяющія противоположныя концы діаметровъ, проходятъ черезъ точку касанія круговъ.

67. Если черезъ точку A касанія двухъ круговъ O и O' проведемъ двѣ прямыя: BAC и DAE , гдѣ B и D на окружности O , а C и E на окружности O' , то хорды BD и CE будутъ параллельны.

68. Черезъ точку касанія двухъ окружностей проведемъ въ каждой изъ нихъ по хордѣ. Показать, что уголъ, составленный хордами, равенъ полусуммѣ центральныхъ угловъ, соответствующихъ этимъ дугамъ.

69. Дана окружность O , касающаяся двухъ другихъ окружностей O' и O'' въ точкахъ A и B . Продолжимъ хорду AB до встрѣчи съ окружностью O'' въ точкѣ C . Показать, что радіусы $O'A$ и $O''C$ параллельны.

70. Даны круги O и O' , касающіяся внутренно въ A ; проведемъ хорду BC большаго круга, касающуюся въ точкѣ D меньшаго. Показать, что прямая AD будетъ равнодѣлящею угла BAC .

71. Изъ всѣхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ точку пересѣченія двухъ окружностей и ограниченныхъ ими, та болѣе, которая параллельна линіи центровъ.

72. Изъ точки пересѣченія двухъ равныхъ окружностей опишемъ окружность, пересѣкающую данныя окружности. Показать, что точки пересѣченія, находящіяся по одну сторону общей хорды, и другая точка пересѣченія данныхъ окружностей лежатъ на одной прямой.

73. Пусть P точка пересѣченія высотъ треугольника ABC и AD его высота. Продолжимъ AD до пересѣченія въ точкѣ G съ окружностью, описанною около даннаго треугольника. Показать, что $DG = DP$.

74. Если на бокахъ остроугольнаго треугольника, какъ основаніяхъ и внѣ его, построимъ равнобедренные треугольники, у которыхъ другія стороны равны радіусу описаннаго круга около даннаго треугольника, то отъ соединенія вершинъ построенныхъ треугольниковъ получимъ такой, у котораго стороны равны и параллельны сторонамъ даннаго треугольника.

75. Опишемъ окружность около треугольника ABC и изъ его вершинъ опустимъ перпендикуляры на противоположныя стороны, которые продолжимъ до пересѣченія съ окружностью въ D , E и F . Показать, что точки C , B и A будутъ серединами дугъ DE , DF и EF .

76. Изъ точки O на сторонѣ BC равносторонняго треугольника ABC проведемъ хорды OK и OL , параллельныя BA и CA . Опишемъ окружность, проходящую чрезъ точки O , K и L , которая пересѣчетъ AB и AC въ P и Q . Показать, что треугольникъ OPQ равносторонній.

77. Черезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ равныхъ окружностей проведемъ сѣкущую. Показать, что часть сѣкущей между окружностями дѣлится пополамъ окружностью, описанною на общей хордѣ, какъ діаметръ.

78. Начертимъ рядъ окружностей, касающихся данной прямой въ данной на ней точкѣ, и пересѣчемъ ихъ прямою, параллельною данной. Показать, что касательныя къ окружностямъ въ точкахъ пересѣченія, будутъ касательными къ нѣкоторой постоянной окружности.

79. Окружности O , O' и O'' касаются между собою: O и O' въ A , O и O'' въ B , а O' и O'' въ A ; прямая AB и AC пересѣкаютъ окружность O въ D и E . Показать, что DE будетъ діаметръ окружности O , параллельный прямой, соединяющей центры двухъ другихъ окружностей.

80. Если равнобедренный треугольникъ ABC имѣетъ при основаніи BC углы, равные двойному углу при вершинѣ, и если равно-

дѣлящая угла ABC пересѣкаетъ окружность, описанную около треугольника въ D , а равнодѣлящая угла ACB пересѣкаетъ AB въ E , то четырехугольникъ $ADCE$ будетъ ромбъ.

81. Даны пересѣкающіяся окружности O и O' въ точкахъ A и B и на O' даны точки C и D . Проведемъ прямыя: CAE , CBG , DFA и DBH , пересѣкающія окружность O , соответственно, въ точкахъ E , G , F и H . Показать, что хорды EF и GH равны.

82. AC и CB діаметры двухъ окружностей, касающихся въ C ; D середина AB . Показать, что если окружность, описанная изъ D произвольнымъ радіусомъ, пересѣчетъ данныя окружности въ E и F , то прямая EF пройдетъ черезъ C .

83. А вершина равнобедреннаго треугольника ABC . Опишемъ двѣ окружности, проходящія черезъ A и касающіяся BC въ точкахъ B и C , которыя пересѣкутъ стороны AB и AC въ D и E , а другъ друга въ F . Показать, что прямыя FD и FE будутъ соответственно перпендикулярны къ касательнымъ, проведеннымъ къ окружностямъ черезъ точку A .

84. Къ двумъ касающимся кругамъ проведемъ внѣшнюю касательную. Показать, что окружность, описанная на касательной, ограниченной точками касанія, какъ діаметръ, будетъ касаться линіи центровъ данныхъ окружностей.

85. Если черезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ окружностей проведемъ двѣ сѣкущія, то хорды въ каждомъ изъ круговъ, соединяющія точки пересѣченія сѣкущихъ съ окружностями, встрѣчаются подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, какъ бы сѣкущія не были проведены.

86. Окружность, описанная изъ середины гипотенузы прямоугольнаго треугольника радіусомъ, равнымъ полусуммѣ катетовъ, касается окружностей, описанныхъ на катетахъ, какъ діаметрахъ.

87. Если двѣ окружности пересѣкаются, то общая касательная къ нимъ, ограниченная точками касанія, видима изъ точекъ пересѣченія окружностей подъ углами, дополнительными другъ другу до двухъ прямыхъ.

88. Кругъ, произвольнаго радіуса, касается даннаго круга и данной прямой. Показать, что прямая, проходящая черезъ точки касанія, пересѣкаетъ окружность даннаго круга въ постоянной точкѣ.

89. На окружности даны три точки A , B и C . Касательныя, проведенныя къ окружности черезъ B и C , пересѣкаются въ T ;

изъ T проведемъ прямую, параллельно AB , которая пересѣчетъ AC въ E . Показать, что E лежитъ на діаметрѣ, перпендикулярномъ AB .

90. ABC дуга окружности O , меньшая половины ея, раздѣлена въ B пополамъ; продолжимъ прямую AB до пересѣченія въ D съ перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ C къ CB ; чрезъ A и C проведемъ касательныя къ окружности, которыя пересѣкутся въ E . Показать, что чрезъ точки B , C , D и E можно провести окружность.

91. Въ треугольникѣ ABC опустимъ перпендикуляры AD и BE на BC и AC ; также опустимъ перпендикуляры DF и EG на AC и BC . Показать, что прямая FG параллельна AB .

92. Внутри треугольника ABC возьмемъ точку O и опустимъ изъ нея перпендикуляры OD , OE и OF на стороны BC , CA и AB . Показать, что уголъ BOC равенъ суммѣ угловъ BAC и EDF .

93. Точки касанія вписаннаго круга въ данный треугольникъ соединимъ прямыми и въ полученномъ треугольникѣ проведемъ высоты. Показать, что прямыя, соединяющія основанія высотъ, параллельны сторонамъ даннаго треугольника.

94. P точка пересѣченія высотъ треугольника ABC . Показать, что треугольникъ, полученный отъ соединенія центровъ круговъ, описанныхъ около треугольниковъ PBC , PCA и PAB , равенъ данному.

95. Въ треугольникъ впишемъ кругъ и проведемъ къ нему касательныя съ трехъ сторонъ. Показать, что сумма периметровъ трехъ треугольниковъ, отсѣченныхъ отъ даннаго, равна периметру даннаго.

96. Найти условіе, при которомъ возможно описать окружность, касающуюся двухъ діагоналей и продолженій двухъ противоположныхъ сторонъ четырехугольника.

97. Въ кругѣ вписанъ равносторонній треугольникъ. Показать, что хорда, соединяющая середины дугъ, отсѣкаемыхъ двумя боками треугольника, дѣлится этими боками на три равныя части.

98. Прямыя, проведенныя изъ вершинъ треугольника ABC къ центру вписаннаго въ него круга, пересѣкаютъ окружность въ D , E и F . Показать, что углы треугольника DEF равны, соответственно, $\frac{1}{2}(180^\circ + A)$, $\frac{1}{2}(180^\circ + B)$ и $\frac{1}{2}(180^\circ + C)$.

99. Въ треугольникъ вписанъ и выѣвписаны круги. Показать:
1) сумма неравныхъ отрѣзковъ (чрезъ одинъ) сторонъ треугольника,

опредѣленныхъ точками касанія вписаннаго круга, равна полупериметру даннаго треугольника; 2) разстояніе точки касанія вписаннаго круга до одной изъ вершинъ, лежащихъ на той же сторонѣ, равно полупериметру треугольника, уменьшенному на сторону, противолежащую этой вершинѣ; 3) разстояніе точки касанія, лежащей на продолженіи стороны треугольника, до болѣе отдаленной изъ вершинъ, находящихся на той же сторонѣ, равно полупериметру треугольника; 4) отрѣзокъ стороны между вершиною и точкою касанія вписаннаго круга равенъ отрѣзку этой же стороны, взятому отъ другой вершины, лежащей на той же сторонѣ, до точки касанія къ этой сторонѣ вѣтви вписаннаго круга; 5) изъ четырехъ точекъ касанія (двѣ внутреннія и двѣ вѣшнія), лежащихъ на сторонѣ и ея продолженіяхъ, по двѣ равноотстоятъ отъ середины этой стороны; 6) разстояніе внутреннихъ точекъ касанія, лежащихъ на одной сторонѣ, равно разности двухъ другихъ сторонъ треугольника; 7) разстояніе двухъ вѣшнихъ точекъ касанія, лежащихъ на продолженіяхъ одного изъ боковъ треугольника, равно суммѣ двухъ другихъ боковъ треугольника и 8) разстояніе какой-либо точки касанія вписаннаго круга къ одной изъ сторонъ треугольника до одной изъ вѣшнихъ точекъ касанія вѣтви вписаннаго круга къ этой же сторонѣ, равно той сторонѣ треугольника, которой касается этотъ вѣтви вписанный кругъ.

100. Кругъ O , вписанный въ треугольникъ ABC , касается AB и AC въ D и E ; прямая, соединяющая O съ A , пересѣкаетъ окружность въ G . Показать, что G центръ вписаннаго круга въ треугольникъ ADE .

101. Показать, что стороны треугольника, полученнаго отъ соединенія центровъ вѣтви вписанныхъ круговъ, параллельны сторонамъ треугольника, у котораго вершины въ точкахъ касанія вписаннаго круга въ данный треугольникъ.

102. Въ прямоугольномъ треугольникѣ діаметръ вписаннаго въ него круга равенъ разности между суммою катетовъ и гипотенузою.

103. Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма діаметровъ описаннаго и вписаннаго въ него круговъ равна суммѣ катетовъ.

104. Если діагонали четырехугольника $ABCD$, пересѣкающіяся въ O , взаимно перпендикулярны, то сумма радіусовъ вписанныхъ круговъ въ треугольники AOB , BOC , COB и DOA равна разности между суммою діагоналей и полупериметромъ четырехугольника.

105. Изъ вершины треугольника опустимъ перпендикуляръ на противоположную сторону и въ каждомъ изъ полученныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ впишемъ кругъ; то же самое сдѣлаемъ и для другихъ сторонъ. Показать, что сумма шести радіусовъ вписанныхъ круговъ и периметра треугольника равна удвоенной суммѣ высотъ треугольника.

106. Показать, что меньшей сторонѣ треугольника соответствуетъ внѣвписанный кругъ съ меньшимъ радіусомъ, а большей сторонѣ — съ большимъ радіусомъ.

107. Точка пересѣченія равнодѣлящей внѣшняго угла треугольника съ описанной окружностью около треугольника равноотстоитъ отъ двухъ другихъ вершинъ треугольника и центровъ двухъ внѣвписанныхъ круговъ.

108. Въ треугольникѣ ABC внѣвписанъ кругъ, касающійся BC и продолженій сторонъ AB и AC въ F и G . Проведемъ касательную DE къ кругу, параллельно BC , гдѣ D и E на продолженіяхъ AB и AC . Показать, что если $DE = 3BC$, то $DE = 2AF$.

109. Центры вписаннаго и описаннаго круговъ около правильнаго треугольника совпадаютъ, и діаметръ одного вдвое болѣе діаметра другого.

110. Въ треугольникѣ ABC равнодѣлящая угла A пересѣкаетъ сторону BC въ точкѣ D . Если изъ O , центра вписаннаго круга въ треугольникъ, опустимъ перпендикуляръ OE на BC , то $\angle BOE = \angle COD$.

111. Если O центръ круга описаннаго около треугольника ABC и BD его высота, то равнодѣлящая угла B дѣлитъ пополамъ уголъ OBD .

112. Во всякомъ треугольникѣ, вписанномъ въ кругъ, перпендикуляръ, возставленный изъ середины стороны, пересѣкаетъ равнодѣлящія противоположнаго угла сторонѣ и дополнительнаго ему въ точкахъ, лежащихъ на окружности круга.

113. Прямая, соединяющая центры двухъ внѣвписанныхъ круговъ въ треугольникѣ, перпендикулярна къ прямой, соединяющей центръ вписаннаго круга съ вершиною, находящеюся между центрами круговъ.

114. Если діаметръ внѣвписаннаго круга въ треугольникъ равенъ полупериметру треугольника, то треугольникъ прямоугольный.

115. Равнодѣлящая угла треугольника пересѣкаетъ окружность, описанную около него, въ точкѣ, равноотстоящей отъ концовъ про-

1463

57

1464

789
6

тивоположной стороны этому углу и центра вписаннаго круга въ этотъ треугольникъ.

116. Около треугольника ABC описанъ кругъ. Показать, что уголъ, составленный прямыми, соединяющими середину дуги BC съ A и центромъ круга, равенъ полуразности угловъ B и C треугольника.

117. Разстояніе отъ центра*) треугольника до одной изъ его вершинъ равно разстоянію отъ центра описаннаго круга около треугольника до противоположной стороны.

118. Прямая, соединяющая середину основанія треугольника съ серединою отрезка высоты между вершиною и ортоцентромъ, равна радиусу описаннаго круга около треугольника.

119. Высоты даннаго треугольника будутъ равнодѣлящими угловъ треугольника, полученнаго черезъ соединеніе основаній высотъ; точка пересѣченія высотъ даннаго треугольника будетъ центромъ вписаннаго круга, а вершины даннаго треугольника — центрами вневписанныхъ круговъ въ полученный треугольникъ.

120. Прямые, соединяющія основанія высотъ треугольника, будутъ перпендикулярны, соотвѣтственно, къ прямымъ, соединяющимъ вершины треугольника съ центромъ описаннаго круга.

121. Если кругъ описанъ около треугольника, то середина основанія равноотстоитъ отъ ортоцентра и конца діаметра, проведеннаго изъ вершины. Показать, что эти три точки лежатъ на прямой.

122. D , E и F середины сторонъ BC , CA и AB треугольника ABC ; продолжимъ AD , BE и CF до пересѣченія съ окружностью описаннаго круга около треугольника въ точкахъ A' , B' и C' .

Показать, что треугольники $A'B'C'$ и ABC равны.

123. Окружность, проведенная чрезъ точки B и C и центръ вписаннаго круга въ треугольникъ ABC , пересѣкаетъ AB и AC въ E и F . Показать, что прямая EF , касательная къ окружности.

124. При какихъ условіяхъ можно провести окружность черезъ четыре данныя точки?

125. Показать, что изъ всѣхъ трапецій только около равнобочной можно описать кругъ.

126. Въ описанномъ четырехугольникѣ около круга, сумма двухъ противоположныхъ сторонъ равна суммѣ двухъ другихъ его сторонъ.

*) Ортоцентромъ даннаго треугольника назыв. точка пересѣченія высотъ его.

127. Если сумма двухъ противоположныхъ сторонъ выпуклаго четырехугольника равна суммѣ двухъ другихъ его сторонъ, то въ этотъ четырехугольникъ можно вписать кругъ. 364/3

128. Около круга описана трапеція. Показать, что прямая, проходящая чрезъ центръ круга, параллельно основаніямъ трапеціи и заключенная между непараллельными сторонами, равна четверти периметра трапеціи. 146

129. Въ шестигульникѣ, описанномъ около круга, суммы сторонъ, черезъ одну, равны.

130. Если около круга описанъ многоугольникъ четнаго числа сторонъ, то сумма сторонъ, черезъ одну, равна полупериметру многоугольника.

131. Если діагонали вписаннаго въ кругѣ четырехугольника пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, то прямая, соединяющая середины діагоналей, равна прямой, соединяющей точку пересѣченія діагоналей съ центромъ круга.

132. Равнодѣлящая внутренняго угла четырехугольника, вписаннаго въ кругѣ, пересѣкаетъ равнодѣлящую внѣшняго угла, противоположнаго ему, въ точкѣ на окружности.

133. Въ четырехугольникѣ, вписанномъ въ кругѣ, проведемъ равнодѣлящія противоположныхъ угловъ, которыя пересѣкутъ окружность въ P и Q . Показать, что PQ будетъ діаметръ круга.

134. Въ кругѣ вписанъ четырехугольникъ. Показать, что сумма угловъ, вписанныхъ въ сегменты, прилежащіе къ сторонамъ четырехугольника, равна шести прямымъ угламъ.

135. Если чрезъ вершины вписаннаго въ кругѣ четырехугольника, въ которомъ противоположные углы прямые, проведемъ касательныя, то онѣ составятъ трапецію. Когда описанная трапеція будетъ равнобочная?

136. Если чрезъ вершины трапеціи, вписанной въ кругѣ, проведемъ касательныя, то онѣ составятъ описанный четырехугольникъ, въ которомъ стороны, проходящія чрезъ концы каждой изъ параллельныхъ сторонъ, равны.

137. Если чрезъ A середину дуги BC проведемъ хорды AD и AE , пересѣкающія BC въ точкахъ F и G , то четырехугольникъ $DFGE$ можетъ быть вписанъ въ кругъ, или, какъ говорятъ, *вписуемый* въ кругъ.

138. Равнодѣлящія внутреннихъ (или внѣшнихъ) угловъ четыре-

угольника составляют такой четырехугольникъ, около котораго можно описать кругъ.

139. Если діагонали четырехугольника, вписаннаго въ кругъ, взаимно перпендикулярны, то перпендикуляръ, опущенный изъ точки пересѣченія діагоналей на одну изъ сторонъ, раздѣлитъ пополамъ противоположную сторону.

140. Если $PQRS$ и $pqrs$ двѣ данныя окружности и $PprR$ и $QqsS$ двѣ такія хорды, что чрезъ четыре точки P, p, q и Q можно провести окружность, то и чрезъ другія четыре точки R, r, s и S можно провести окружность.

141. Даны четыре точки A, B, C и D на окружности O . Показать, что четыре точки, въ которыхъ перпендикуляры, опущенные изъ O на AB и CD , пересѣкаютъ діагонали AC и BD , лежатъ на окружности.

142. Если опишемъ четыре круга, изъ которыхъ каждый касался бы одной изъ сторонъ четырехугольника и продолженій двухъ смежныхъ съ нею сторонъ, то центры этихъ круговъ лежатъ на одной окружности.

143. Окружность O касается двухъ непересѣкающихся окружностей O' и O'' въ точкахъ A и B ; линія центровъ $O'O''$ пересѣкаетъ эти окружности въ точкахъ D и E . Показать, что четырехугольникъ $ABED$ можно вписать въ кругъ.

144. Окружности, имѣющія хордами бока вписаннаго четырехугольника, пересѣкаются еще въ четырехъ точкахъ, чрезъ которыя можно провести окружность.

145. Четыре окружности, проходящія чрезъ середины сторонъ четырехъ треугольниковъ, изъ которыхъ каждый составленъ двумя сторонами четырехугольника и одной изъ діагоналей, пересѣкаются въ одной точкѣ.

146. Къ кругамъ O и O' , касающимся въ точкѣ E , проведены двѣ общія касательныя AB и CD , гдѣ A, B, C и D точки касанія. Показать, что въ четырехугольникъ $ABDC$ можно вписать и описать кругъ.

147. Въ кругъ вписанъ четырехугольникъ $ABCD$, въ которомъ діагонали пересѣкаются подъ прямымъ угломъ въ E ; точки K, L, M и N основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ E на стороны AB, BC, CD и DA четырехугольника. Показать, что около четырехугольника $KLMN$ можно описать и вписать окружность.

148. Равнодѣляющіе угловъ, составленныхъ продолженіями противоположныхъ боковъ вписаннаго въ кругъ четырехугольника, перпендикулярны между собою.

149. Три окружности O , O' и O'' , проведенныя чрезъ общую точку T , пересѣкаются еще попарно: O и O' въ D , O' и O'' въ E , O'' и O въ F ; проведемъ чрезъ E прямую, пересѣкающую окружности O' и O'' въ B и C . Показать, что прямыя BD и CF пересѣкаются въ точкѣ A , лежащей на окружности O .

150. E точка на діагонали AC параллелограмма $ABCD$. Опишемъ окружности около треугольниковъ AED и BEC . Показать, что діагональ BD проходитъ чрезъ другую точку пересѣченія окружностей.

151. Изъ точки пересѣченія двухъ окружностей проведемъ въ каждой изъ нихъ хорды подъ одинаковыми углами къ хордѣ пересѣченія данныхъ окружностей. Показать, что части этихъ хордъ между окружностями равны.

152. Въ четырехугольникѣ $ABCD$, вписанномъ въ кругѣ, продолжимъ AB и CD до пересѣченія въ P , BC и AD — въ Q . Около треугольниковъ ADP и CDQ опишемъ окружности, которыя пересѣкутся въ R . Показать, что точки P , Q и R лежатъ на одной прямой.

153. AKD и CKD , двѣ хорды круга O , пересѣкаются въ K внутри круга. Изъ точки A проведемъ прямую AF , пересѣкающую въ F касательную FCE , проведенную въ точкѣ C окружности, подъ угломъ, равнымъ углу COB . Показать, что прямыя KF и BC параллельны.

154. Проведемъ равнодѣляющіе вѣншихъ угловъ угловъ B и C въ треугольникѣ ABC , которыя пересѣкутся въ O . Показать, что центръ окружности, описанной около треугольника BOC , лежитъ на окружности, описанной около треугольника ABC .

155. Въ четырехугольникѣ $ABCD$ продолжимъ стороны DA и CB до встрѣчи въ F и стороны AB и DC въ E . Если равнодѣляющая угла F будетъ параллельна равнодѣляющей угла, дополнительнаго углу E , или обратно, то около четырехугольника можно описать окружность. Также, если діагонали четырехугольника пересѣкаются въ G , то равнодѣляющіе угловъ G будутъ параллельны равнодѣляющимъ угловъ E .

156. Данъ четырехугольникъ, описанный около круга и въ который можно вписать кругъ. Показать, что прямая, соединяющая точки

касания противоположныхъ сторонъ четырехугольника, будутъ перпендикулярны.

157. Четыре треугольника составлены каждымъ тремя прямыми изъ четырехъ данныхъ прямыхъ, пересекающихся попарно. Показать, что окружности, описанныя около этихъ треугольниковъ, проходятъ чрезъ одну общую точку.

158. Въ четырехугольникъ вписать другой четырехугольникъ. Если вписанный четырехугольникъ наименьшаго периметра, то около перваго четырехугольника можно описать окружность.

159. H — точка встрѣчи высотъ треугольника ABC ; M , N и P — середины AH , BH и CH . Если черезъ точки M , N и P проведемъ прямая, параллельная сторонамъ даннаго треугольника, до ихъ встрѣчи въ точкахъ D , E и F , то получимъ треугольникъ DEF , имѣющій свойства: 1) треугольникъ DEF равенъ треугольнику ABC ; 2) точка пересѣченія высотъ треугольника ABC есть центръ круга, описаннаго около треугольника DEF , и обратно; 3) точки D , E и F будутъ центрами окружностей, проходящихъ черезъ двѣ вершины даннаго треугольника и точку встрѣчи высотъ.

160. Два треугольника ABC и DEF вписаны въ одинъ и тотъ же кругъ такъ, что прямая AD , BE и CF пересекаются въ O . Показать, что если O будетъ центромъ вписаннаго круга въ одинъ изъ треугольниковъ, то O будетъ ортоцентромъ другаго треугольника.

161. Опишемъ окружность около треугольника и проведемъ діаметръ, перпендикулярный къ основанію треугольника; изъ какого-либо конца діаметра опустимъ перпендикуляръ на большую изъ оставшихся сторонъ. Показать, что основаніе перпендикуляра раздѣлитъ эту сторону на двѣ части, изъ которыхъ одна равна полусуммѣ, а другая полуразности сторонъ треугольника, прилежащихъ къ основанію.

162. На сторонахъ треугольника ABC и внѣ его построимъ равнобедренные треугольники: ABC' , BCA' и ACB' . Показать, что прямая AA' , BB' и CC' равны и пересекаются въ одной точкѣ, и что изъ точки ихъ встрѣчи стороны даннаго треугольника видны подъ равными углами.

163. Если черезъ вершину равнобедреннаго треугольника, вписаннаго въ кругѣ, проведемъ хорду, то она будетъ равна суммѣ или разности прямыхъ, соединяющихъ другой ея конецъ съ вершинами, не лежащими на хордѣ, смотря по тому, хорда пересекаетъ или не пересекаетъ бока треугольника.

164. Въ четырехугольникѣ $ABCD$, вписанномъ въ кругѣ, продолжимъ стороны AD и BC до встрѣчи въ точкѣ E ; изъ точки F , взятой на прямой DE , проведемъ прямую, параллельно CB , до пересѣченія съ CD въ точкѣ H и точку F соединимъ прямою съ точкою B , которая пересѣчетъ окружность въ точкѣ G . Показать, что сѣкущая GH проходитъ черезъ одну и ту же точку K окружности, какъ бы ни взяли точку F на AE .

165. Если D , E и F точки на сторонахъ BC , CA и AB треугольника ABC , то периметръ треугольника DEF будетъ наименьшимъ тогда, когда точки D , E и F будутъ основаниями перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ A , B и C на BC , CA и AB .

166. Если изъ оснований высотъ треугольника опустимъ перпендикуляры на его стороны, то основанія этихъ шести перпендикуляровъ лежатъ на одной окружности. 1700
11020

167. Если въ четырехугольникѣ $ABCD$ продолжимъ противоположные бока AB и CD до встрѣчи въ точкѣ E , а противоположные бока AD и BC до встрѣчи въ точкѣ F , то получимъ фигуру $BEDF$, называемую *полнымъ четырехугольникомъ*. Показать: 1) что описанныя окружности около треугольниковъ: ABF , ADE , BCE и DCF проходятъ черезъ одну и ту же точку K и 2) что точка K и центры этихъ окружностей лежатъ на одной окружности.

168. Во всякомъ треугольникѣ основанія высотъ, середины боковъ и середины отрѣзковъ высотъ, заключенныхъ между вершинами и точкою пересѣченія высотъ, лежатъ на одной окружности; центръ этой окружности, называемый окружностью девяти точекъ, находится на серединѣ прямой, соединяющей точку пересѣченія высотъ съ центромъ описаннаго круга, а радіусъ равенъ половинѣ радіуса описаннаго круга. 174
11

169. Въ кругѣ вписаны треугольники такъ, что ихъ ортоцентры лежатъ въ данной точкѣ. Показать, что середины сторонъ этихъ треугольниковъ лежатъ на одной окружности.

170. Черезъ каждую изъ вершинъ треугольника ABC проведемъ прямая, параллельно противолежащимъ сторонамъ, которая пересѣкутся въ точкахъ A' , B' и C' (A' , B' и C' лежатъ противъ A , B и C). Показать, что окружность девяти точекъ даннаго треугольника касается окружностей девяти точекъ для треугольниковъ: $A'BC$, $B'AC$ и $C'AB$ въ серединахъ боковъ: BC , AC и AB .

171. P ортоцентръ въ треугольникѣ ABC и O центръ описан-

наго около него круга; A' , B' и C' центры описанных круговъ около треугольниковъ BPC , CPA и APB . Показать, что точка O есть ортоцентръ въ треугольникѣ $A'B'C'$ и P центръ круга, описаннаго около него, а A , B и C центры описанныхъ круговъ около треугольниковъ $B'OC'$, $C'OA'$ и $A'OB'$, соответственно, и что всѣ эти восемь треугольниковъ, о которыхъ говорили, имѣютъ ту же окружность девяти точекъ.

172. Данъ треугольникъ ABC ; J центръ описаннаго круга около этого треугольника; O , O' , O'' и O''' центры вписаннаго и вѣнвиписанныхъ круговъ въ этотъ треугольникъ. Показать: 1) окружность описаннаго круга около треугольника ABC проходить черезъ середины прямыхъ, соединяющихъ попарно точки: O , O' , O'' и O''' ; 2) точки O , B , C и O' лежать на одной окружности, которой центръ находится на окружности описаннаго круга; 3) точки O''' , B , C и O'' лежать на одной окружности, которой центръ на окружности описаннаго круга.

173. На окружности круга даны четыре точки. Показать, что ортоцентры треугольниковъ, составленныхъ соединеніемъ этихъ точекъ по три, лежатъ на окружности, равной данной.

174. Четыре треугольника составлены чрезъ соединеніе по три точки изъ четырехъ данныхъ точекъ на окружности. Показать, что можно провести окружность черезъ центры вписанныхъ круговъ въ эти треугольники.

175. Доказать, что сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра описаннаго круга около треугольника на его стороны, равна суммѣ радіусовъ вписаннаго и описаннаго круговъ около него.

176. Означимъ буквою R радіусъ описаннаго круга около даннаго треугольника; буквами r , r_a , r_b , r_c — радіусы вписаннаго и вѣнвиписанныхъ круговъ. Показать, что $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

177. Внѣсь въ кругъ прямой уголъ; бока этого угла раздѣлять окружность на три части, изъ которыхъ одна будетъ полуокружность, а двѣ другія менѣе полуокружности. Изъ каждой изъ этихъ дугъ проведемъ касательныя такъ, чтобы точка касанія была серединою соответствующей касательной, ограниченной продолженіями боковъ вписаннаго угла. Показать, что точки касаній будутъ вершинами равносторонняго треугольника.

178. Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой-нибудь точки окружности на стороны вписаннаго въ нее треугольника, лежатъ на прямой (Прямая Симпсона).

179. Проведемъ прямую чрезъ точки касанія вѣнвписаннаго круга къ продолженіямъ сторонъ треугольника; тоже самое сдѣлаемъ и для другихъ вѣнвписанныхъ круговъ; тогда въ пересѣченіи этихъ прямыхъ получимъ треугольникъ. Для этого треугольника составимъ такимъ же образомъ новый треугольникъ и т. д. Показать, что послѣдній изъ всѣхъ построенныхъ треугольниковъ будетъ равноугольный.

180. P ортоцентръ треугольника ABC и Q точка на окружности, описанной около треугольника. Показать, что прямая PQ дѣлитъ пополамъ прямую, соединяющую основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки Q на стороны треугольника.

181. Въ кругѣ вписанъ треугольникъ ABC и проведенъ діаметръ PQ . Показать, что прямая, проходящая чрезъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ P на стороны треугольника, перпендикулярна къ прямой, проходящей чрезъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ Q на стороны треугольника.

182. Около треугольника ABC описана окружность и чрезъ точку D внутри треугольника проведены прямая BD и CD , пересѣкающія окружность въ P и Q . Опустимъ изъ точки P перпендикуляры на стороны треугольника и проведемъ чрезъ нихъ прямую; также опустимъ изъ точки Q перпендикуляры на стороны треугольника и чрезъ нихъ проведемъ прямую. Показать, что уголъ, составленный этими прямыми, равенъ разности угловъ D и A .

183. Въ кругѣ вписанъ четырехугольникъ $ABCD$, у котораго діагонали перпендикулярны; опустимъ перпендикуляры DF и DG на AB и BC , пересѣкающія діагональ AC и ея продолженіе въ точкахъ H и J . Означивъ буквою E точку встрѣчи діагоналей AC и BD , показать: 1) что точки F , E и G лежатъ на одной прямой и 2) что $DH=DC$ и $DA=DJ$.

184. Два треугольника ABC и $A'BC$, вписанные въ кругъ O , имѣютъ общее основаніе BC . Проведемъ прямую чрезъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ A на стороны другого треугольника, и прямую чрезъ основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ A' на стороны перваго треугольника. Показать, что эти прямая и окружности девяти точекъ этихъ треугольниковъ проходятъ чрезъ одну и ту же точку.

185. Данъ четырехугольникъ $ABCD$; продолжимъ бока AB и CD до встрѣчи въ точкѣ E , а бока AD и BC въ точкѣ F . Показать,

что основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на бока четырехугольника изъ точки пересѣченія окружностей, описанныхъ около треугольниковъ ABF и ADE , лежатъ на одной прямой.

186. Если изъ какой-нибудь точки, взятой на окружности, опустимъ перпендикуляры на стороны вписаннаго въ нее треугольника, то прямая, проходящая черезъ основанія перпендикуляровъ, раздѣляетъ пополамъ прямую, соединяющую взятую точку съ точкою пересѣченія высотъ даннаго треугольника, и равно отстоитъ отъ этихъ точекъ.

В. Задачи на построение.

187. Найти наименьшее и наибольшее разстоянія отъ точки A до окружности O .

188. Найти наименьшее и наибольшее разстоянія отъ точекъ окружности O до прямой MN .

189. На двухъ непересекающихся окружностяхъ O и O' найти точки, наименѣе и наиболѣе удаленныя одна отъ другой.

190. Найти на полуокружности ACB точку, наиболѣе удаленную отъ діаметра AB .

191. Помощію одного циркуля найти на окружности O двѣ точки, лежащія на діаметрѣ.

192. На данной окружности O отложить отъ данной точки C часть, равную данной дугѣ AB того же радіуса.

193. На окружности O опредѣлить дугу, равную данной дугѣ ея AB , взятой два раза, три раза и т. д.

194. Раздѣлить дугу AB данной окружности O на двѣ, четыре, восемь и т. д. равныхъ частей.

195. Раздѣлить окружность на 2, 3, 4, 6 и 8 равныхъ частей.

196. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, описанныхъ даннымъ радіусомъ r и проходящихъ чрезъ данную точку A .

197. Даннымъ радіусомъ r описать окружность, проходящую чрезъ данную точку A и центръ которой находился бы на данной прямой MN .

198. Найти геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ отъ данной окружности O на разстояніи a .

199. Даннымъ радіусомъ r описать окружность, которая находилась бы отъ данныхъ точекъ A и B въ разстояніяхъ k и l .

200. Описать окружность радиусомъ r такъ, чтобы она отъ данной точки A и данной прямой MN находилась въ разстояніяхъ k и l .

201. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, проходящихъ чрезъ двѣ данныя точки A и B .

202. Провести окружность чрезъ двѣ данныя точки A и B , и которой центръ находился бы на данной прямой MN .

203. Даннымъ радиусомъ r описать окружность, проходящую чрезъ двѣ данныя точки A и B .

204. Провести окружность чрезъ три данныя точки A , B и C или описать окружность около треугольника ABC .

205. Найти центръ данной окружности или центръ дуги окружности.

206. Найти центръ данной окружности помощію линейки съ параллельными краями, и ширина которой менѣе діаметра окружности.

207. Въ данный правильный треугольникъ вписать правильный же треугольникъ, у котораго сторона данной длины.

208. Въ данный квадратъ вписать квадратъ, у котораго сторона данной длины.

209. Чрезъ точку A , данную внутри круга O , провести хорду такъ, чтобы она дѣлилась пополамъ въ этой точкѣ.

210. Чрезъ данную точку A внутри круга O провести наименьшую хорду.

211. Въ данномъ кругѣ O провести хорду данной длины, которая была бы параллельна (или перпендикулярна) данной прямой MN .

212. Въ кругѣ O дана хорда AB . Провести въ немъ другую хорду такъ, чтобы она дѣлилась хордою AB пополамъ и составляла съ нею данный уголъ α .

213. Описать окружность, когда дана ея хорда AB и на ней точка C , въ которой дѣлится пополамъ другая хорда, проведенная подъ угломъ α къ данной хордѣ.

214. Найти геометрическое мѣсто серединъ хордъ въ данной окружности, имѣющихъ ту же длину a .

215. Провести въ кругѣ O хорду данной длины, которая дѣлилась бы пополамъ другою хордою AB этого круга.

216. Чрезъ точку A пересѣченія окружностей O и O' провести сѣкущую такъ, чтобы эти окружности отѣкали хорды, которымъ соответствовали бы равные центральные углы.

217. Провести чрезъ точку A пересѣченія окружностей O и O' сѣкущую такъ, чтобы полученныя на ней хорды были равны.

218. Чрезъ данную точку A въ кругѣ O провести хорду такъ, чтобы разность отрѣзковъ ея, определяемыхъ этою точкою, была данная.

219. Найти геометрическое мѣсто вершинъ прямоугольныхъ треугольниковъ, построенныхъ на гипотенузѣ, данной по величинѣ и положенію.

220. Въ окружности O провести діаметръ, находящійся на разстояніи a отъ данной точки A .

221. Чрезъ данную точку A провести прямую такъ, чтобы часть ея между перпендикулярами, опущенными на нее изъ данныхъ точекъ B и C , была равна l .

222. Чрезъ точки A и B провести двѣ параллельныя прямыя, между которыми разстояніе было бы a .

223. Чрезъ точку A , данную внутри круга O , провести хорду на разстояніи a отъ центра.

224. Чрезъ точку A , данную внутри круга O , провести хорду, которая пересѣкалась бы данной хордою BC по серединѣ.

225. Чрезъ B конецъ діаметра AB данной окружности O проведемъ къ ней касательную. Найти на касательной такую точку C , чтобы прямая AC дѣлилась пополамъ данною окружностью.

226. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей даннаго радіуса r , пересѣкающихъ прямую MN такъ, чтобы отрѣзокъ ея, внутри окружности, имѣлъ данную длину a .

227. Описать окружность, даннымъ радіусомъ r , которой центръ лежалъ на данной прямой KL и которая пересѣкала бы другую данную прямую MN такъ, чтобы опредѣленная ея часть a была хордою круга.

228. Описать окружность даннымъ радіусомъ r , которая проходила бы чрезъ данную точку A и пересѣкала данную прямую MN такъ, чтобы часть ея внутри окружности была данной длины.

229. Описать окружность радіусомъ r , пересѣкающую прямыя MN и KL такъ, чтобы части ихъ внутри окружности равнялись a и b .

230. Даны двѣ концентрическія окружности и на одной изъ нихъ точка A . Провести чрезъ A сѣкущую такъ, чтобы сумма отрѣзковъ ея, заключенныхъ между окружностями, равнялась k .

231. Даны двѣ концентрическія окружности. Провести хорду въ большей изъ окружностей такъ, чтобы она меньшею раздѣлилась на три равныя части.

232. Прямая, опредѣленной длины, оставалась параллельно самой себѣ, двигается такъ, что одинъ изъ ея концовъ описываетъ окружность O радиуса r . Найти геометрическое мѣсто точекъ, описываемыхъ другимъ концомъ прямой.

233. Дана окружность O и точка A внѣ ея. Какую-либо точку P данной окружности соединимъ съ A и проведемъ прямую AQ подъ даннымъ угломъ къ AP и на ней отложимъ часть $AQ = AP$. Найти геометрическое мѣсто точекъ Q .

234. Въ окружности O дана хорда AB . Возьмемъ произвольно точку P на окружности и построимъ параллелограммъ, у котораго прилежащія стороны были бы AB и AP . Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія діагоналей. Найти наибольшую и наименьшую величины діагонали параллелограмма, проходящей чрезъ A .

235. A данная точка на окружности O . Проведемъ произвольно диаметръ BOD окружности и касательныя къ ней въ A и D , которыя пересѣкутся въ L . Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія BL съ перпендикуляромъ AN , опущеннымъ изъ A на диаметръ.

236. Между двумя окружностями O и O' провести прямую, длиною a , параллельно данной прямой MN .

237. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, описанныхъ радиусомъ r и дѣлящихъ пополамъ данную окружность O .

238. Изъ данной точки A описать окружность, которая раздѣлила бы пополамъ данную окружность O .

239. Описать изъ данной точки A окружность, пересѣкающую данную окружность O такъ, чтобы хорда пересѣченія ихъ была данной длины a .

240. Описать окружность, проходящую чрезъ двѣ данныя точки A и B и пересѣкающую данную окружность O такъ, чтобы хорда пересѣченія была параллельна (или перпендикулярна) данной прямой MN .

241. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей даннаго радиуса r , пересѣкающихъ данную окружность O такъ, чтобы хорда пересѣченія была данной длины a .

242. Описать окружность даннымъ радиусомъ r , которой центръ лежалъ бы на прямой MN и которая пересѣкала бы данную окружность такъ, чтобы хорда пересѣченія была данной длины a .

243. Описать окружность даннымъ радиусомъ r , проходящую чрезъ данную точку A и пересѣкающую данную окружность O такъ, чтобы хорда пересѣченія была длиною a .

244. Описать окружность даннымъ радиусомъ r , пересекающую данную окружность O по хордѣ, равной a , и данную прямую MN такъ, чтобы часть ея внутри окружности равнялась b .

245. Описать окружность даннымъ радиусомъ r , пересекающую окружности O и O' такъ, чтобы хорды пересѣченія были длиною a и b .

246. Даны двѣ концентрическія окружности O и точка P . Описать окружность, проходящую чрезъ данную точку и пересекающую данныя окружности такъ, чтобы хорды пересѣченія были длиною a и b .

247. Чрезъ двѣ точки A и B , данныя на окружности O , провести параллельныя хорды такъ, чтобы ихъ сумма равнялась данной прямой s .

248. Даны два круга O и O' и между ними точка A . Провести чрезъ эту точку прямую такъ, чтобы части ея между данною точкою и данными кругами были равны.

249. Даны двѣ окружности O и O' и прямая MN . Провести прямую, параллельную данной, такъ, чтобы она, пересекая окружности, образовала равныя хорды.

250. Изъ данной точки P описать окружность, которая пересѣкала бы бока даннаго угла XAY такъ, чтобы хорда, соединяющая точки ихъ пересѣченія, была параллельна (или перпендикулярна) данной прямой MN .

251. Чрезъ точки A и B провести окружность, пересекающую двѣ параллельныя прямыя MN и KL въ точкахъ C и D такъ, чтобы $CD = AB$.

252. Чрезъ точку A , взятую на окружности O , провести къ ней касательную.

253. Провести касательную къ данному кругу O , параллельно или перпендикулярно данной прямой MN .

254. Провести къ данному кругу O касательную подъ угломъ α къ данной прямой MN .

255. Провести къ окружности O двѣ касательныя, составляющія данный уголъ α .

256. Чрезъ точку A , данную на окружности, провести къ ней касательную, не опредѣляя положенія центра.

257. Чрезъ точку A , данную внутри круга O , провести хорду такъ, чтобы она составляла наименьшій уголъ съ касательною, проведенною къ кругу чрезъ ея конецъ.

258. Найти геометрическое мѣсто центровъ всѣхъ круговъ, касающихся прямой MN въ данной на ней точкѣ A .

259. Изъ данной точки A описать окружность, касающуюся данной прямой MN .

260. Даннымъ радіусомъ r описать окружность, касающуюся данной прямой MN въ данной на ней точкѣ A .

261. Даны прямая AB и CD и на AB точка P . Начертить окружность, которой центръ лежалъ бы на AB , касалась CD и проходила чрезъ точку P .

262. Описать окружность, проходящую черезъ данную точку A и касающуюся данной прямой MN въ данной на ней точкѣ B .

263. Описать окружность, которая проходила бы чрезъ двѣ данныя точки A и B и касалась прямой MN , параллельной AB .

264. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, описанныхъ радіусомъ r и касающихся данной прямой MN .

265. Даннымъ радіусомъ r описать окружность, которой центръ лежалъ бы на данной прямой MN и которая касалась бы прямой KL .

266. Даннымъ радіусомъ r описать окружность, касательную къ данной прямой MN и проходящую черезъ точку A , лежащую внѣ этой прямой.

267. Даннымъ радіусомъ r описать окружность, касающуюся данной прямой MN и пересѣкающую прямую KL такъ, чтобы часть ея, заключенная внутри искомаго круга, была данной длины a .

268. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касающихся двухъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ MN и KL .

269. Двѣ параллельныя прямая MN и KL пересѣчены прямою PQ . Описать окружность, которой центръ лежалъ бы на сѣкущей и которая касалась параллельныхъ прямыхъ.

270. Даннымъ радіусомъ описать окружность, касающуюся данной прямой и чтобы касательныя къ ней, проведенныя изъ двухъ данныхъ точекъ, были параллельны.

271. Описать окружность, касающуюся двухъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ MN и KL и проходящую черезъ точку A между ними.

272. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, касательныхъ къ двумъ пересѣкающимся прямымъ MN и KL .

273. Описать окружность, касательную къ двумъ бокамъ треугольника и которой центръ лежалъ бы на третьей сторонѣ.

274. Даннымъ радиусомъ r описать окружность, касательную къ двумъ пересекающимся прямымъ MN и KL .

275. Описать окружность, касающуюся двухъ прямыхъ и одной изъ нихъ въ данной на ней точкѣ.

276. Описать окружность, касающуюся трехъ прямыхъ: MN , KL и PQ .

277. Вписать окружность въ треугольникъ ABC .

278. Описать окружность, касающуюся одной изъ сторонъ треугольника ABC и продолженій двухъ другихъ сторонъ или, какъ говорятъ, вѣвписать кругъ въ треугольникъ.

279. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ окружность O видна подъ даннымъ угломъ α .

280. Найти точку, изъ которой двѣ данныя окружности O и O' видны подъ данными углами α и β .

281. Чрезъ данную точку A провести окружность даннымъ радиусомъ r такъ, чтобы она изъ другой данной точки B была видна подъ даннымъ угломъ α .

282. Изъ данной точки A описать окружность, касающуюся данной окружности O .

283. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, описанныхъ даннымъ радиусомъ r и касающихся данной окружности O .

284. Изъ двухъ данныхъ точекъ A и B описать двѣ окружности, касающіяся другъ друга извнѣ.

285. Изъ двухъ данныхъ точекъ A и B описать двѣ окружности, касающіяся другъ друга внутри.

286. Найти геометрическое мѣсто центровъ круговъ, касающихся даннаго круга O въ точкѣ A , данной на его окружности.

287. Даннымъ радиусомъ r описать окружность, касающуюся данной окружности O въ точкѣ A , данной на ней.

288. Даннымъ радиусомъ r описать окружность, центръ которой лежалъ бы на данной прямой MN (или окружности) и которая касалась данной окружности O .

289. Даннымъ радиусомъ r описать окружность, касательную къ данной прямой MN и данной окружности O .

290. Даннымъ радиусомъ r описать окружность, которая проходила бы чрезъ данную точку A и касалась данной окружности O .

291. Даннымъ радиусомъ r описать окружность, касающуюся двухъ данныхъ окружностей O и O' .

292. Описать окружность, касающуюся данной окружности O въ данной на ней точкѣ A и проходящую черезъ точку B , данную внѣ круга.

293. Описать окружность, касающуюся данной прямой MN въ данной на ней точкѣ A и даннаго круга O .

294. Описать окружность, касающуюся даннаго круга O въ данной точкѣ A на его окружности и данной прямой MN .

295. Описать окружность, касающуюся двухъ данныхъ окружностей O и O' и одной изъ нихъ въ данной на ней точкѣ A .

296. Описать окружность даннымъ радіусомъ r , которая касалась данной окружности O и пересѣкала бы данную прямую MN такъ, чтобы часть ея внутри окружности равнялась a .

297. Начертить окружность даннымъ радіусомъ r , которая касалась бы данной окружности O и пересѣкала другую окружность O' по хордѣ данной длины.

298. Даны двѣ окружности O и O' . Начертить третью окружность O'' такъ, чтобы она касалась данныхъ окружностей и $\angle OO''O'$ былъ равенъ данному углу ϕ .

299. Описать кругъ, касательный къ тремъ равнымъ между собою кругамъ: O , O' и O'' .

300. Въ данномъ круговомъ секторѣ AOB вписать кругъ, касательный къ радіусамъ и дугѣ.

301. Въ данномъ полукругѣ ACB вписать кругъ, который касался бы даннаго діаметра AB и полуокружности въ данной на ней точкѣ C .

302. Въ данной окружности O вписать три равныя окружности, которыя касались бы данной и взаимно.

303. Около даннаго круга O описать три равныя круга, которые касались бы между собою попарно и даннаго.

304. Въ данной окружности O вписать четыре равныя окружности, которыя касались бы данной и взаимно.

305. Около даннаго круга O описать четыре равныхъ круга, которые касались бы между собою попарно и даннаго круга.

306. Даны три точки. Описать изъ нихъ окружности, касающіяся попарно другъ друга.

307. Даны двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя AB и CD , пересѣкающіяся въ точкѣ O ; прямая, длиною a , перемѣщается такъ, что концы ея лежатъ на данныхъ прямыхъ. Найти геометрическое мѣсто серединъ перемѣщающейся прямой.

308. На данномъ основаніи BC построены треугольники, у которыхъ сумма сторонъ при вершинѣ одна и та же s . Найти геометрическое мѣсто оснований перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки B или C на равнодѣляція вѣршинныхъ угловъ при вершинахъ треугольниковъ.

309. На данномъ основаніи BC построены треугольники, у которыхъ разность сторонъ при вершинѣ одна и та же d . Найти геометрическое мѣсто оснований перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ B или C на равнодѣляція угловъ при вершинахъ треугольниковъ.

310. На основаніи BC построены треугольники, у которыхъ медиана, проведенная изъ точки B , равна k . Найти геометрическое мѣсто вершинъ треугольниковъ.

311. Черезъ точку A , данную на одной изъ двухъ пересекающихся окружностей O и O' , провести хорду такъ, чтобы она пересѣкалась пополамъ другою окружностью.

312. Черезъ точку A , данную внутри круга O , провести хорду такъ, чтобы одна ея часть была втрое болѣе другой.

313. Даны двѣ концентрическія окружности O . Провести такъ сѣкущую къ обѣимъ окружностямъ, чтобы хорда большаго круга была вдвое болѣе хорды меньшаго круга.

314. Черезъ точку A , лежащую внѣ круга O , провести сѣкущую, которая дѣлилась бы пополамъ окружностью даннаго круга.

315. Изъ точки A , данной внѣ круга O , провести къ нему сѣкущую такъ, чтобы вѣршинный ея отрѣзокъ былъ вдвое менѣе внутрешняго.

316. Черезъ точку A пересѣченія двухъ окружностей O и O' провести къ нимъ такъ сѣкущую, чтобы сумма полученныхъ хордъ была данная s .

317. Найти наибольшую изъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку A пересѣченія двухъ окружностей O и O' и ограниченныхъ ими.

318. Черезъ двѣ данныя точки на окружности провести двѣ параллельныя хорды такъ, чтобы произведеніе ихъ было наибольшее.

319. Черезъ точку A пересѣченія двухъ окружностей O и O' провести къ нимъ такъ сѣкущую, чтобы разность полученныхъ хордъ равнялась d .

320. Провести сѣкущую къ двумъ даннымъ кругамъ O и O' , параллельно данной прямой MN , такъ, чтобы сумма полученныхъ хордъ въ кругахъ равнялась s .

321. Провести съющую къ двумъ даннымъ кругамъ O и O' , параллельно прямой MN , такъ, чтобы разность полученныхъ хордъ въ кругахъ равнялась d .

322. Построить параллелограммъ по двумъ его высотамъ h_a и h_b и діагонали k .

323. Построить параллелограммъ по двумъ его высотамъ h_a и h_b и углу α , составляемому діагональю съ одною изъ сторонъ.

324. Построить треугольникъ по двумъ высотамъ h_a и h_b и медианѣ m_c .

325. Начертить прямоугольникъ, у котораго стороны проходили черезъ четыре точки: A , B , C и D и одна изъ сторонъ была бы данной длины a .

326. Построить ромбъ, у котораго двѣ стороны лежали бы на двухъ параллельныхъ прямыхъ MN и KL , а двѣ другія проходили черезъ данныя точки A и B .

327. Черезъ точку A , взятую внутри круга O или на его окружности, проведемъ различныя хорды. Найти геометрическое мѣсто серединъ хордъ.

328. Въ кругѣ O данъ діаметръ AB ; проведемъ произвольно радиусъ OC и опустимъ перпендикуляръ CD на AB ; на OC отложимъ часть $OM=CD$. Определить геометрическое мѣсто точекъ M .

329. Данъ кругъ O и діаметръ его AB ; проведемъ хорду BC и, продолживъ ее, отложимъ часть $CD=CB$. Определить геометрическое мѣсто точекъ M пересѣченія прямыхъ OD и AC .

330. Изъ точки A , данной внѣ круга O , провести къ нему касательную.

331. Черезъ точку A , данную внутри круга O , провести хорду данной длины a .

332. Черезъ данную точку A провести съющую къ данному кругу O такъ, чтобы часть съющей, лежащей внутри круга, была данной длины a .

333. Изъ точки A провести прямую, которая отсѣкала бы на окружности O дугу, равную дугѣ BC , данной на этой окружности.

334. Построить ромбъ, зная діагональ k и радиусъ r вписаннаго круга.

335. Около даннаго круга описать четырехугольникъ, у котораго углы были бы равны угламъ даннаго четырехугольника.

336. Даны три точки: A , B и C . Черезъ точку A провести такъ

прямую, чтобы сумма разстояній до нея отъ двухъ другихъ точекъ была данной величины.

337. Даны три точки: A , B и C . Черезъ точку A провести такъ прямую, чтобы разность разстояній до нея отъ двухъ другихъ точекъ была данной величины.

338. Черезъ данную точку A провести такъ сѣкущую къ двумъ концентрическимъ окружностямъ O , чтобы часть ея между окружностями была данной длины.

339. Изъ данной точки A описать окружность такъ, чтобы касательная къ ней изъ точки B была данной длины a .

340. Черезъ данную точку A описать окружность радиусомъ r такъ, чтобы касательная къ ней изъ данной точки B была данной длины.

341. Описать окружность даннымъ радиусомъ r такъ, чтобы касательныя, проведенныя къ ней изъ данныхъ точекъ A и B , равнялись a и b .

342. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ касательныя, проведенныя къ данной окружности O , были бы данной длины.

343. Найти на данной прямой MN точку, изъ которой касательная, проведенная къ данному кругу O , была данной длины.

344. Найти такую точку, изъ которой касательныя, проведенныя къ двумъ даннымъ окружностямъ O и O' , порознь равнялись бы даннымъ прямымъ a и b .

Построить треугольникъ (345—347), когда дано:

345. $\angle A$, h_a и h_b . 346. h_a , h_b и m_a . 347. h_a , h_b и $\angle(m_b, a)$.

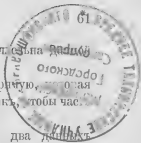
348. Дана прямая XU и по одну сторону ея двѣ точки A и B . Найти на XU такую точку, чтобы прямыя, проведенныя отъ нея къ даннымъ точкамъ, составляли углы, изъ которыхъ одинъ былъ бы вдвое болѣе другого.

349. Построить равносторонній треугольникъ, у котораго одна изъ вершинъ была въ данной точкѣ, а двѣ другія на двухъ данныхъ окружностяхъ. При какомъ положеніи данной точки возможна эта задача?

350. Къ двумъ даннымъ кругамъ провести общую касательную.

351. Провести прямую, которая отъ данныхъ точекъ A и B отстояла бы на разстояніяхъ, равныхъ a и b .

352. Изъ точекъ A и B описать двѣ касающіяся окружности такъ,



чтобы вѣшняя къ нѣмъ касательная была параллельна прямой MN .

353. Даны двѣ окружности O и O' . Провести прямую, касающуюся окружности O , а другую пересекала такъ, чтобы часть ея внутри круга равнялась данной прямой a .

354. Провести прямую, которая пересекала бы два круга O и O' такъ, чтобы части ея внутри круговъ, служащія хордами ихъ, равнялись a и b .

355. На окружности O дана дуга AB , а на окружности O' дуга CD . Провести сѣкущую къ окружностямъ такъ, чтобы она отѣкала на нихъ дуги, соответственно, равныя даннымъ дугамъ.

356. Провести къ данной окружности O касательную такъ, чтобы сумма (или разность) разстояній отъ нея до данныхъ точекъ A и B равнялась s .

357. Въ данной окружности O провести хорду данной длины такъ, чтобы сумма (или разность) разстояній до нея отъ двухъ данныхъ точекъ A и B равнялась s .

358. Найти на прямой MN такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ двумъ даннымъ кругамъ O и O' , составляли равные углы съ этою прямою.

359. Даны двѣ окружности. Найти на одной изъ окружностей такую точку, чтобы, проведя черезъ нея касательныя къ другой, хорда касанія равнялась хордѣ первой окружности, полученной отъ соединенія точекъ пересѣченія окружности съ касательными. Когда задача возможна?

360. На данной прямой AB описать сегментъ, вмѣщающій данный уголъ φ .

361. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ прямая AB , данная по величинѣ и положенію, видна подъ однимъ и тѣмъ же угломъ φ .

362. Въ окружности O дана хорда AB , по величинѣ и положенію; проведемъ въ окружности хорду $CD=AB$. Найти геометрическое мѣсто точекъ M пересѣченія прямыхъ AD и BC .

363. Окружности O и O' пересекаются въ A и B ; проведемъ черезъ A прямую, пересекающую окружности въ C и D , и равнодѣлящую угла CBD , которая пересѣчетъ CD въ E . Найти геометрическое мѣсто точекъ E .

364. Даны двѣ пересекающіяся окружности O и O' въ точкахъ

A и B ; проведемъ черезъ точку A прямую, пересекающую окружности въ P и Q , и прямая PO и QO' , пересекающіяся въ C . Найти геометрическое мѣсто точекъ C .

365. По одной сторонѣ прямой BC построимъ такіе треугольники ABC , въ которомъ сторона AC равнялась бы перпендикуляру BP , опущенному изъ B на AC . Найти геометрическое мѣсто вершинъ A .

366. На прямой MN найти такую точку, чтобы прямая, проведенная отъ нея къ концамъ другой прямой AB , данной по величинѣ и положенію, составили уголъ φ .

367. Изъ двухъ точекъ A и B провести двѣ прямыя такъ, чтобы точка C ихъ встрѣчи лежала на данной прямой MN и сумма угловъ ACM и BCN равнялась данному углу φ .

368. Найти точку, изъ которой двѣ прямыя AB и CD , данныя по величинѣ и положенію, были бы видны подъ данными углами φ и ψ .

369. Изъ данной точки A описать окружность, которая пересекала бы данную прямую MN такъ, чтобы одна изъ полученныхъ дугъ окружности вмѣщала данный уголъ φ .

370. Дана точка A и прямая MN . Провести изъ точки A двѣ прямыя такъ, чтобы онѣ составляли между собою уголъ φ и отсѣкали на прямой MN отрѣзокъ данной длины a .

371. Изъ точки A , данной внѣ круга O , провести сѣкущую такъ, чтобы она отсѣкала дугу, вмѣщающую данный уголъ φ .

372. Изъ точки A , данной внѣ круга O , провести сѣкущую, которая отсѣкала бы дугу, равную шестой части окружности даннаго круга.

373. Въ данной окружности O вписать треугольникъ, у котораго двѣ стороны проходили бы чрезъ данныя точки A и B и одинъ изъ угловъ равнялся α .

374. Найти въ треугольникѣ ABC такую точку, чтобы прямая, проведенная отъ нея къ вершинамъ треугольника, составляли бы между собой равные углы.

375. Дана окружность O и точка A . Провести въ ней хорду длиною a такъ, чтобы она изъ данной точки была видна подъ даннымъ угломъ φ .

376. Провести между параллельными прямыми KL и MN отрѣзокъ длиною a такъ, чтобы онъ былъ виденъ изъ данной точки A подъ даннымъ угломъ φ .

377. Между двумя концентрическими окружностями O провести отрезокъ длиною a такъ, чтобы онъ былъ виденъ изъ данной точки A подъ угломъ φ .

378. На дугѣ AB окружности найти такую точку, чтобы сумма разстояній отъ нея до концовъ дуги была наибольшая.

379. Дана дуга AB окружности O и къ ней касательная. Найти на касательной такую точку, чтобы прямая, соединяющая ее съ концами дуги, составляли наибольшій уголъ.

380. O центръ даннаго круга; OA прямая меньшая радиуса. Найти на окружности такую точку B , изъ которой прямая OA видна подъ наибольшимъ угломъ.

381. Въ треугольникѣ ABC найти такую точку O , чтобы $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA$.

382. Данъ треугольникъ ABC . Найти такую точку P , чтобы окружности, описанныя около треугольниковъ PBC , PCA и PAB , были равны.

383. Черезъ данныя точки A , B и C провести три прямыя такъ, чтобы онѣ составили треугольникъ, равный данному треугольнику DEF .

384. Вписать въ кругъ треугольникъ, котораго стороны были бы параллельны тремъ пересекающимся прямымъ.

385. Около даннаго треугольника ABC описать треугольникъ, равный данному треугольнику DEF .

386. Около даннаго треугольника ABC описать равносторонній треугольникъ наибольшаго периметра.

387. Даны двѣ концентрическія окружности. Построить треугольникъ по двумъ даннымъ угламъ B и C такъ, чтобы его вершины лежали на данныхъ окружностяхъ.

388. Даны двѣ точки A и B и прямая MN . Найти на прямой MN такую точку C , чтобы разность угловъ ACM и BCN равнялась данному углу φ .

389. Дана прямая MN и двѣ точки A и B по одну сторону ея. Найти на этой прямой такую точку C , чтобы разность угловъ BAC и ABC равнялась данному углу φ .

390. Даны двѣ окружности O и O' и внѣшняя къ нимъ касательная. Найти на ней такую точку, чтобы изъ нея данныя окружности были видны подъ углами, которыхъ сумма равна φ .

391. Даны двѣ пересекающіяся окружности O и O' и вну-

тренныя къ нимъ касательныя. Найти на ней такую точку, чтобы изъ этой точки окружности были видны подъ углами, которыхъ сумма равна φ .

392. Даны двѣ окружности O и O' . Найти такую точку, изъ которой касательныя къ даннымъ окружностямъ составляли уголъ φ и одна изъ нихъ была длиною a .

393. Черезъ C середину дуги AB данной окружности O проведемъ произвольно хорду CP , пересекающую хорду AB въ Q . Найти геометрическое мѣсто центра окружности, описанной около треугольника BQP .

394. Въ данный кругъ вписать треугольникъ, у котораго двѣ стороны проходили бы чрезъ двѣ данныя точки, а третья сторона была данной длины.

395. Въ окружности O даны два неподвижныхъ радіуса OA и OB , взаимно-перпендикулярныхъ между собою; проведемъ произвольно діаметръ POQ данного круга. Найти геометрическое мѣсто точки M пересѣченія прямыхъ PA и QB .

396. На данной прямой, принятой за гипотенузу, построены прямоугольные треугольники. Найти геометрическое мѣсто центровъ круговъ, вписанныхъ въ эти треугольники.

397. На данномъ основаніи BC построены треугольники, имѣющіе одинакіе углы при вершинѣ. Найти геометрическое мѣсто ортоцентровъ этихъ треугольниковъ.

398. На данномъ основаніи BC построены треугольники такъ, что у нихъ уголъ между высотами, опущенными изъ точекъ B и C , одинъ и тотъ же φ . Найти геометрическое мѣсто вершинъ треугольниковъ.

399. На данномъ основаніи BC построены треугольники, имѣющіе одинакіе углы при вершинѣ. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, вписанныхъ въ эти треугольники.

400. Чрезъ конецъ A діаметра AB данной окружности проведемъ хорда AC , которая продолжена на длину $CM=CB$. Найти геометрическое мѣсто точекъ M .

401. Чрезъ конецъ A діаметра AB данной окружности проведемъ произвольно хорда AC и на ней отложимъ часть $CM=CB$. Найти геометрическое мѣсто точекъ M .

402. Данъ кругъ O и точка A внутри его; проведемъ произвольно хорду чрезъ A и изъ D середины этой хорды возставимъ перпендикуляръ $DM=DA$. Найти геометрическое мѣсто точекъ M .

403. Данъ прямоугольный треугольникъ ABC . Изъ какой-либо точки D гипотенузы BC возставимъ перпендикуляръ, который пересѣчетъ катетъ AB въ E , а катетъ AC въ F ; проведемъ прямыя CE и BF , которыя пересѣкутся въ точкѣ M . Найти геометрическое мѣсто точекъ M .

404. На данной хордѣ AB окружности O построимъ треугольникъ, у которыхъ вершины лежали бы на окружности. Найти геометрическое мѣсто центровъ вѣтвѣписанныхъ круговъ для этихъ треугольниковъ, касающихся стороны AB .

Построить треугольникъ (405—406), когда дано:

405. a , h_a и A .

406. a , A и m_a .

407. На прямой AB , данной по величинѣ и положенію, построить такой треугольникъ, у котораго вершина лежала бы на другой прямой MN и уголъ при этой вершинѣ равнялся данному углу φ .

408. Даны двѣ точки A и B и прямая MN . Построить такой треугольникъ, у котораго вершины лежали бы въ данныхъ точкахъ и на прямой MN и чтобы сумма угловъ при точкахъ A и B равнялась данному углу φ .

Построить треугольникъ (409—417), когда дано:

409. B , C и m_a .

410. a , A и точка D на данной сторонѣ, чрезъ которую проходитъ равнодѣлящая угла A .

411. a , h_a и $\angle(h_b, h_c)$.

412. a , A и $\angle(h_b, m_a)$.

413. A , h_a и m_b .

414. A , m_a и m_c .

415. B , m_a и m_c .

416. h_a , m_a и l_a .

417. Положеніе основаній трехъ высотъ.

418. Построить параллелограммъ по діагоналямъ его k и l и углу φ , лежащему противъ діагонали k .

Построить четырехугольникъ (419—425), когда дано:

419. Стороны a и b , діагонали k и l и уголъ D .

420. Стороны a , b и c , діагональ k и уголъ D .

421. Стороны a и d , діагональ k и углы B и D .

422. Стороны a и d , діагональ k и углы A и C .

423. Стороны a и b , діагональ k и углы φ и ψ , составляемые другою діагональю съ боками, противоположными даннымъ.

424. стороны a , b и c и углы B и D .

425. Діагонали k и l , углы B и D и прямая g , соединяющая середины противоположныхъ сторонъ a и c .

426. Дана окружность O и на ней двѣ точки A и B . Найти на окружности такую точку, чтобы сумма разстояній отъ нея до точекъ A и B была данной величины s .

427. Дана окружность O и на ней двѣ точки A и B . Найти на окружности такую точку, чтобы разность разстояній отъ нея до точекъ A и B была данной величины d .

428. По данной сторонѣ a и углу A , построить такой треугольникъ, у котораго периметръ былъ бы наибольшій.

429. Построить треугольникъ по сторонѣ a , углу A и суммѣ s двухъ другихъ сторонъ.

430. Построить треугольникъ по сторонѣ a , углу A и разности d двухъ прочихъ сторонъ.

431. Построить четырехугольникъ по діагонали k , угламъ B и D и разностямъ d и d' сторонъ, содержащихъ эти углы.

432. Описать окружность, касающуюся двухъ данныхъ окружностей такъ, чтобы радіусы, проведенные изъ центра ея къ точкамъ касанія, образовали данный уголъ φ .

433. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей даннаго радіуса r , пересѣкающихъ данную окружность O радіуса R подъ даннымъ угломъ $\varphi^*)$.

434. Даннымъ радіусомъ r описать окружность, пересѣкающую данную окружность O подъ угломъ φ и данную прямую MN по хордѣ данной длины.

435. Даннымъ радіусомъ r описать окружность, пересѣкающую окружность O подъ угломъ φ и окружность O' подъ угломъ φ .

436. Описать окружность даннымъ радіусомъ r , которая пересѣкала бы окружность O подъ угломъ φ , а окружность O' пополамъ.

437. Описать окружность даннымъ радіусомъ r , пересѣкающую данную окружность O подъ угломъ φ , такъ, чтобы касательная къ ней изъ данной точки A была длиною a .

438. Описать окружность, которая касалась бы данной прямой XU въ данной на ней точкѣ A и пересѣкала бы данную окружность O подъ угломъ φ .

*) Пересѣчь данную окружность другою окружностью подъ даннымъ угломъ φ значитъ нужно провести окружность такъ, чтобы касательныя къ нимъ въ точкѣ пересѣченія составляли уголъ φ .

439. Даны окружности O и O' и точка A на окружности O . Провести чрезъ точку A окружность, которая пересѣкала бы окружность O подъ угломъ φ и окружность O' подъ угломъ ψ .

Построить четырехугольникъ, когда дано (440—444):

440. Двѣ стороны a и c , діагональ k и радіусъ R описаннаго круга.

441. Сторона a , діагонали k и l и радіусъ R описаннаго круга.

442. Двѣ стороны a и c , уголъ A и радіусъ R описаннаго круга.

443. Сторона a , два угла C и D и радіусъ R описаннаго круга.

444. Двѣ стороны a и b , уголъ A и радіусъ R описаннаго круга.

445. Построить треугольникъ ABC , зная сторону a и радіусы R и R' круговъ, описанныхъ около треугольниковъ ABD и ACD , гдѣ AD высота треугольника.

446. Построить треугольникъ ABC , зная медиану $AD=m_a$ и радіусы R и R' окружностей, описанныхъ около треугольниковъ ABD и ACD .

447. Построить треугольникъ ABC , зная уголъ A и радіусы r и r' круговъ, вписанныхъ въ треугольники ABD и ACD , гдѣ AD высота.

448. Построить равнобедренный треугольникъ по сторонѣ a и радіусу r вписаннаго въ него круга.

449. Построить равнобедренный треугольникъ по сторонѣ a и радіусу R описаннаго около него круга.

450. Построить прямоугольный треугольникъ по катету b и радіусу R описаннаго около него круга.

451. Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ a и радіусу r вписаннаго круга.

452. Построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ по радіусу R описаннаго около него круга.

453. Построить треугольникъ по двумъ угламъ A и B и радіусу r вписаннаго въ него круга.

454. Построить треугольникъ по двумъ угламъ A и B и радіусу R описаннаго около него круга.

455. Построить равносторонній треугольникъ по радіусу R описаннаго около него круга.

456. Построить равносторонній треугольникъ по радіусу r вписаннаго въ него круга.

457. Построить треугольникъ, зная положеніе вписаннаго круга и одного изъ вѣвписанныхъ круговъ.

458. Построить треугольникъ, зная положеніе двухъ вѣвписанныхъ въ него круговъ.

459. Построить треугольникъ, зная положеніе центровъ вѣвписанныхъ въ него круговъ.

460. Построить треугольникъ, когда дано положеніе одной изъ его вершинъ, ортоцентра и центра описанной окружности.

461. Построить треугольникъ, когда дано положеніе одной изъ его вершинъ и центровъ вписанной и описанной окружностей.

Построить треугольникъ (462—494), когда дано*):

462. a , m_a и R .

463. A , l_a и r .

464. $a+b$, A и R .

465. $a-b$, A и R .

466. c , R и $B-A$.

467. A , h_a и R .

468. A , h_a и r .

469. A , h_a и r_a .

470. A , h_a и r_b .

471. a , m_b и R .

472. A , m_b и R .

473. A , r и r_a .

474. A , r_a и r_b .

475. A , h_a и $b+c-a$.

476. A , l_a и $b+c-a$.

477. A , r_a и $b+c-a$.

478. a , r и r_a .

479. a , r_b и r_c .

480. r , r_a и $b-c$.

481. r , r_c и $b+c$.

482. r_b , r_c и $B-C$.

483. $2p$, A и h_a .

484. $2p$, r и r_a .

485. $2p$, A и r .

486. a , A и r .

487. A , R и r или a , R и r .

488. a , $b+c$ и R .

489. A , $b+c$ и R .

490. a , $b-c$ и R .

491. A , $b-c$ и R .

492. a , $b+c$ и r .

493. a , $b-c$ и r .

494. a , R и d разстояніе между центрами вписаннаго и описаннаго круговъ.

495. Построить треугольникъ по основанію a , углу B при основаніи и разстоянію d между центрами вписаннаго круга и вѣвписаннаго круга, касающагося основанія.

496. Описать квадратъ около даннаго четырехугольника.

497. Черезъ данную точку M провести сѣкущую сторону угла XAY такъ, чтобы она съ боками угла составила треугольникъ даннаго периметра $2p$.

498. Въ треугольникѣ ABC дана точка M . Провести черезъ точку M хорду DE (D на AB , E на AC) треугольника такъ, чтобы она равнялась суммѣ отрезковъ: BD и CE .

*) Эти задачи большею частью рѣшаются на основаніи 99 теор. этого отд.

499. Провести въ треугольникѣ ABC хорду DE (D на AB , E на AC) данной длины и равную суммѣ отрезковъ: BD и CE .

500. Въ данный кругъ O вписать трапецію, зная разстояніе h между параллельными сторонами и уголъ φ между діагоналями.

501. Въ данномъ кругѣ O вписать треугольникъ, у котораго двѣ стороны были бы параллельны пересѣкающимся прямымъ AB и CD , а третья проходила чрезъ данную точку F .

502. Въ данномъ кругѣ O вписать такой многоугольникъ, у котораго одинъ изъ боковъ проходилъ бы чрезъ данную точку A , а остальные были параллельны даннымъ прямымъ.

503. Данъ кругъ O и двѣ точки A и B . Провести радіусъ OC такъ, чтобъ разность угловъ CAO и CBO была данная φ .

504. Данъ кругъ O и двѣ точки A и B . Провести радіусъ OC такъ, чтобы сумма угловъ OAC и OBC была данная φ .

505. Построить четырехугольникъ по сторонамъ a и угламъ α , β , γ и δ , составляемымъ другими сторонами съ діагоналями четырехугольника.

506. Данъ равносторонній треугольникъ ABC . Найти такое геометрическое мѣсто точекъ M , для которыхъ $MA = MB + MC$.

507. Найти геометрическое мѣсто центровъ описанныхъ окружностей около треугольника, въ которомъ дано: одинъ изъ угловъ по величинѣ и положенію и сумма сторонъ, содержащихъ его.

508. Чрезъ точку D , взятую на сторонѣ BC треугольника ABC , проведемъ сѣкущую, кот. пересѣчетъ бокъ AC или его продолженіе въ E , а бокъ AB или его продолженіе въ F . Найти геометрическое мѣсто точекъ M пересѣченія двухъ окружностей, проходящихъ чрезъ три точки: C , D и E и чрезъ другія три точки: B , D и F .

509. Изъ точекъ D и E окружности, описанной около даннаго треугольника ABC , опущены перпендикуляры DF и EF' на BC , DG и EG' на CA , DH и EH' на AB . Найти геометрическое мѣсто точекъ P пересѣченія прямыхъ FGH и $F'G'H'$, когда точки B , C , D и E неподвижны, а точка A перемѣщается по окружности.

510. На прямой, данной по величинѣ и положенію, построимъ треугольники, у которыхъ углы, противолежащіе прямой, данной величины. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей девяти точекъ этихъ треугольниковъ.

С. Задачи на вычисленіе.

511. Дана точка A на разстояніи $k=4,8$ саж. отъ центра окружности, которой радіусъ $r=0,3$ сажени. Найти наименьшее и наибольшее разстоянія отъ точки A до окружности.

512. Даны двѣ окружности радіусовъ: $r=15$ верш. и $R=1\frac{1}{2}$ арш., которыхъ центры находятся другъ отъ друга на разстояніи $a=2$ саж. Найти наименьшее и наибольшее разстоянія между точками данныхъ окружностей.

513. Углы, вписанные въ окружность, равны $23^\circ 46' 42''$ и $120^\circ 35''$. Найти величины центральныхъ угловъ, имъ соотвѣствующихъ.

514. Уголь при центрѣ круга равенъ $84^\circ 13' 44''$. Какъ великъ уголь, имѣющій вершину на окружности и опирающійся на ту же дугу?

515. Найти вписанный уголь, опирающійся на дугу, равную $0,16$ окружности.

516. Изъ точки окружности проведены двѣ хорды; одной соотвѣствуетъ дуга въ $48^\circ 41'$, а другой — въ $98^\circ 24'$. Найти уголь, образуемый хордами.

517. Хорда дѣлитъ окружность на части въ отношеніи 11 къ 13. Найти вписанные углы, опирающіеся на эту хорду.

518. Уголь ABC вписанъ въ сегментъ такъ, что точка B раздѣляетъ дугу сегмента, равную $312^\circ 23' 4''$, на части въ отношеніи 7 къ 10. Найти углы BCA и BAC .

519. Діаметръ круга служить основаніемъ треугольника, имѣющаго противоположную вершину на полуокружности въ точкѣ, дѣлящей ее въ отношеніи 9 къ 15. Найти углы треугольника.

520. Уголь, составленный касательною и хордою, проведенною изъ точки касанія, равенъ $34^\circ 36''$. Найти центральный уголь, соотвѣствующій этой хордѣ.

521. Уголь, составленный касательною и хордою, равенъ $88^\circ 49' 58''$. Найти величину дуги, лежащей внѣ даннаго угла.

522. Черезъ точку окружности круга проведена хорда и касательная. Найти уголь между ними, когда центральный уголь, опирающійся на эту хорду, равенъ $149^\circ 59' 37''$.

523. Въ кругѣ начерченъ діаметръ, и чрезъ одинъ изъ его концовъ проведена хорда подъ угломъ къ нему въ $49^\circ 19' 34''$. Найти уголь, составленный касательными, проведенными черезъ концы хорды.

524. Въ кругѣ проведенъ діаметръ, и чрезъ одинъ изъ его концовъ — хорда; касательная, проходящая чрезъ концы хорды, составляютъ уголъ въ $68^{\circ}48''$. Найти уголъ между діаметромъ и хордою, соединяющею другой конецъ діаметра съ другимъ концомъ хорды.

525. Дуги, заключенныя между боками угла, имѣющаго вершину внутри круга, и ихъ продолженіями, суть: $39^{\circ}9'47''$ и $69^{\circ}41'16''$. Найти величину угла.

526. Дуги, заключенныя между боками угла, имѣющаго вершину внѣ даннаго круга, суть: $56^{\circ}7'36''$ и $32^{\circ}24'47''$. Найти величину самого угла.

527. Изъ точки, лежащей внѣ круга, проведены двѣ касательныя такъ, что меньшая изъ дугъ, заключенная между точками касанія, равна $9^{\circ}17'38''$. Найти величину угла, составленнаго касательными.

528. Изъ точки, лежащей внѣ круга, проведены къ нему двѣ касательныя подъ угломъ въ $6^{\circ}13'47''$. Найти величины дугъ, заключенныхъ между этими касательными.

529. Найти уголъ, составленный касательными, проведенными черезъ концы дуги въ $42^{\circ}2'0'',8$.

530. Дуги, заключенныя между сторонами описаннаго угла, относятся какъ 7 къ 11. Какъ великъ этотъ уголъ?

531. Изъ виѣшней точки M круга проведены къ нему двѣ сѣкущія MAV и MCD такъ, что дуги AC и BD относятся какъ 3 къ 5. Найти уголъ M , когда сумма дугъ AC и BD равна 240° .

532. Пересѣкающіяся въ точкѣ E хорды AB и CD круга составляютъ уголъ $AED=16^{\circ}19'12''$. Найти дуги AD и BC , когда извѣстно, что онѣ находятся въ отношеніи 5 къ 4.

533. Точки A , B , C и D , взятая последовательно на окружности круга, раздѣляютъ ее на четыре части, въ отношеніи 1 : 3 : 5 : 6. Найти уголъ, составленный касательными въ точкахъ: 1) A и C и 2) B и D .

534. Окружность раздѣлена на три части въ отношеніи 42 : 35 : 43 и черезъ точки дѣленія проведены касательныя. Найти величины угловъ треугольника, составленнаго этими касательными.

535. Точки A , B , C , D , E и F , взятая последовательно на окружности круга, раздѣляютъ ее на шесть частей въ отношеніи 5 : 9 : 11 : 17 : 20 : 13. Найти углы треугольника, полученнаго въ пересѣченіи прямыхъ AD , BE и CF .

536. Стороны треугольника суть: 12, 14 и 16. Изъ его вершинъ, какъ центра, описаны окружности такъ, что каждая изъ нихъ касается двухъ другихъ. Найти радіусы окружностей.

537. Изъ точки A , взятой внѣ круга O , проведены къ нему касательныя AB и AC ; къ дугѣ BC (меньшей) проведена касательная, которая пересѣкаетъ первыя касательныя въ точкахъ D и E . Найти длину периметра треугольника ADE , когда $AB=6,8$ арш.

538. Периметръ треугольника $ABC=7\frac{7}{12}$ фута; опишемъ кругъ, касающійся стороны BC и продолженій сторонъ AB и AC въ точкахъ M , N и P . Найти длины линій AN и AP .

539. Въ окружности вписанъ прямоугольникъ, у котораго одна изъ сторонъ равна 24 саж., а уголъ между діагональю и этой стороной равенъ 60° . Найти радіусъ окружности.

540. Къ кругу радіуса $r=3\frac{4}{5}$ сажени проведены двѣ касательныя такъ, что онѣ составляютъ уголъ въ 60° . Найти разстояніе отъ центра круга до пересѣченія касательныхъ.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

Теоремы и задачи на пропорціональность прямыхъ, подобіе треугольниковъ и многоугольниковъ и пропорціональность линій въ кругѣ.

А. Теоремы.

1. Означимъ буквою a длину прямой AB и буквами M и M' сопряженные точки этой прямой*). Показать, что когда точка M дѣлитъ AB въ отношеніи m къ n , то

$$MA = \frac{ma}{m+n}, MB = \frac{na}{m+n}, M'A = \frac{ma}{m-n} \text{ и } M'B = \frac{na}{m-n},$$

когда $m > n$, и $M'A = \frac{ma}{n-m}$ и $M'B = \frac{na}{n-m}$, когда $m < n$.

2. O — середина прямой AB ; M и M' — сопряженные точки на этой прямой. Показать, что $OA^2 = OM \cdot OM'$ и $JM^2 = JA \cdot JB$, гдѣ J есть середина прямой MM' .

*) Сопряженными точками M и M' относительно прямой AB наз. тѣ, изъ которыхъ одна лежитъ между A и B , а другая на продолженіи AB и даютъ отношеніе: $AM : BM = AM' : BM'$.

3. M и M' —сопряженные точки прямой AB . Показать, что

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AM'}.$$

4. Если C означает середину AB , а D какую-либо точку на AB , то $AD^2 + BD^2 = 2AD \cdot BD + 4CD^2$.

5. Если въ остроугольномъ треугольникѣ ABC проведемъ высоты BD и CE , то, означивъ буквою O пересѣченіе высотъ, имѣемъ:

$$1) EO \cdot CO = BO \cdot DO; \quad 2) AB \cdot AE = AC \cdot AD;$$

$$3) AD \cdot CD = BD \cdot OD \text{ и } 4) AE \cdot BE = CE \cdot OE.$$

6. На трехъ прямыхъ OAP , OBQ и OCR взяты точки A , B , C , P , Q и R такъ, что AB параллельна PQ , а BC параллельна QR . Показать, что AC параллельна PR .

7. Прямая, соединяющая основанія двухъ высотъ треугольника, отдѣляетъ треугольникъ, подобный данному.

8. Если въ треугольникахъ, имѣющихъ общее основаніе и равныя высоты, провести прямую, параллельно основанію, то отрѣзки этой прямой, заключенныя въ треугольникахъ, будутъ равны.

9. Треугольники подобны, когда имѣютъ по равному углу при основаніи, и когда основаніе и высота въ одномъ изъ нихъ пропорціональны основанію и высотѣ въ другомъ.

10. Треугольники подобны, когда имѣютъ по равному углу и когда высоты, опущенныя на стороны, заключающія эти углы, пропорціональны.

11. Треугольники подобны, когда основаніе, высота и прямая, соединяющая середину основанія съ противоположною вершиною въ одномъ треугольникѣ, пропорціональны соответствующимъ частямъ другого треугольника.

12. Треугольники подобны, когда двѣ стороны и прямая, соединяющая одну изъ вершинъ съ серединою противоположной стороны въ одномъ треугольникѣ, пропорціональны соответствующимъ частямъ другого.

13. Треугольники подобны, когда сторона и двѣ прямыя, соединяющія вершины треугольника съ серединами противоположныхъ сторонъ въ одномъ треугольникѣ, пропорціональны соответствующимъ частямъ другого.

14. Треугольники подобны, когда прямая, соединяющія середины сторонъ съ противоположными вершинами въ одномъ треугольникѣ, пропорціональны соответствующимъ частямъ другого.

15. Треугольники подобны, когда они имѣютъ по равному углу при основаніи и когда основаніе и сумма (или разность) двухъ другихъ сторонъ въ одномъ треугольникѣ пропорціональны основанію и суммѣ (или разности) двухъ другихъ сторонъ въ другомъ треугольникѣ.

16. Треугольники подобны, когда перпендикуляръ, опущенный изъ конца основанія на противоположную сторону, основаніе и сумма (или разность) двухъ другихъ сторонъ въ одномъ треугольникѣ пропорціональны соотвѣтствующимъ частямъ другого.

17. Треугольники подобны, когда имѣютъ по равному углу при основаніи и когда радіусы вписанныхъ круговъ въ эти треугольники пропорціональны основаніямъ треугольниковъ.

18. Треугольники подобны, когда имѣютъ по равному углу и когда радіусы описанныхъ круговъ около треугольниковъ пропорціональны основаніямъ треугольниковъ.

19. Въ треугольникѣ ABC изъ точки P , взятой на BC , проведемъ хорды PQ и PR , параллельно CA и BA . Доказать, что $PQ \cdot PR = BQ \cdot CR$.

20. D , E и F середины сторонъ BC , CA и AB треугольника ABC . Проведемъ черезъ A прямую, пересѣкающую DF и DE въ M и N . Показать, что прямая BM и CN параллельны.

21. Данъ параллелограммъ $ABCD$ и двѣ точки P и Q на сторонахъ AD и CD . Если черезъ эти точки проведемъ параллельныя прямая, пересѣкающія бока AB и BC въ точкахъ M и N , то произведеніе AM на CN будетъ величина постоянная.

22. D середина стороны BC въ треугольникѣ ABC . Прямая, проведенная чрезъ C пересѣкаетъ AD въ E и AB въ F . Показать, что $AE \cdot BF = 2AF \cdot ED$.

23. Если чрезъ вершину A параллелограмма $ABCD$ проведемъ прямую, пересѣкающую діагональ BD въ точкѣ E , а стороны BC и CD въ точкахъ F и G , то AE есть средняя пропорціональная между EF и EG .

24. Въ равностороннемъ треугольникѣ ABC изъ D , середины стороны BC , опустимъ перпендикуляръ DE на AB . Показать, что $AE = \frac{3}{4}AB$.

25. Данъ параллелограммъ $ABCD$ и двѣ точки E и F на прямой, параллельной AB . Показать, что если прямая AE и BF продолжимъ до встрѣчи въ точкѣ M , а прямая ED и FC — до встрѣчи въ точкѣ N , то прямая MN будетъ параллельна AD .

26. Данъ четырехугольникъ $ABCD$, въ которомъ углы B и D прямые; изъ точки M , взятой на діагонали AC , опустимъ перпендикуляры MP и MQ на BC и AD . Требуется доказать, что

$$\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = 1.$$

27. Если изъ какой-либо точки діагонали параллелограмма опустимъ перпендикуляры на стороны, выходящія изъ общей съ діагональю вершины, то длины этихъ перпендикуляровъ обратно пропорціональны сторонамъ параллелограмма.

28. Если точка O взята внутри параллелограмма $ABCD$ такъ, что $\angle OBA = \angle ODA$, то $\angle OAD = \angle OCD$.

29. Въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$ бока, соответственно, параллельные. Показать, что прямыя AA' , BB' и CC' пересѣкаются въ одной точкѣ.

30. Если три стороны одного треугольника составляютъ равные углы со сторонами другого, то эти треугольники подобны.

31. Если въ равнобочной трапеціи діагональ равна большему основанію, то каждая изъ непараллельныхъ сторонъ есть средняя пропорціональная между большимъ основаніемъ и разностью между основаніями.

32. Въ треугольникѣ ABC проведемъ хорду DE , параллельно BC ; прямыя BE и CD пересѣкаются въ точкѣ O . Показать, что прямая, проходящая черезъ точки A и O , дѣлитъ пополамъ въ точкѣ F сторону BC .

33. Показать, что точка пересѣченія діагоналей трапеціи лежитъ на прямой, соединяющей середины основаній трапеціи.

34. Точки A и B даны по одну сторону прямой XU . Опустимъ перпендикуляры AC и BD на прямую XU и проведемъ прямыя AD и BC , которыя пересѣкутся въ E ; опустимъ перпендикуляръ EF на XU . Показать, что $\angle AFC = \angle BFD$.

35. Возьмемъ равносторонній треугольникъ ABC и точку E на AC ; на продолженіи BC отложимъ части CD и CJ , соответственно, равныя AC и CE , и проведемъ прямыя AJ и DE , которыя пересѣкутся въ точкѣ H . Показать, что $HC : EC = AC : (AC + CE)$.

36. Показать, что въ треугольникѣ ABC

$$ah_a = bh_b = ch_c.$$

37. Показать, что въ треугольникѣ ABC

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = (h_a + h_b + h_c) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right).$$

38. Изъ D , середины гипотенузы BC прямоугольнаго треугольника ABC , возставимъ перпендикуляръ, который пересѣчетъ AC въ E . Показать, что $CE \cdot CA = \frac{1}{2}BC^2$.

39. Если квадратъ $DEFG$ вписанъ въ прямоугольный треугольникъ ABC такъимъ образомъ, что бокъ DE лежитъ на гипотенузѣ BC то бокъ этого квадрата есть средняя пропорціональная величина между отрезками BD и CE гипотенузы.

40. Въ треугольникѣ ABC построимъ квадратъ $BCDE$ и проведемъ прямыя AD и AE , которыя пересѣкутъ BC въ точкахъ P и Q . Показать, что отрезокъ PQ равенъ боку квадрата вписаннаго въ данный треугольникъ и соответствующаго сторонѣ BC .

41. На сторонѣ BC треугольника ABC построимъ квадратъ $BCDE$, содержащій часть или весь треугольникъ; проведемъ прямыя AD и AE , которыя пересѣкутъ BC или продолженіе BC въ точкахъ P и Q . Показать, что прямая PQ равна боку вѣвписаннаго*) квадрата, соответствующаго сторонѣ BC .

42. Если означимъ буквами x, y и z бока трехъ вписанныхъ квадратовъ и буквами x', y' и z' бока трехъ вѣвписанныхъ квадратовъ въ данный треугольникъ ABC , то

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{c},$$

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{h_a} - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{y'} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{z'} = \frac{1}{h_c} - \frac{1}{c}.$$

43. Если въ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$ углы A и A' равны и $\angle B + \angle B' = 2d$, то стороны, содержащія углы C и C' , будутъ пропорціональны.

44. Равнодѣлящая угла A въ треугольникѣ ABC пересѣкаетъ сторону BC въ точкѣ D ; на BC или продолженіи BC возьмемъ точку E , равноотстоящую отъ A и D . Доказать, что $BE : DE = DE : CE$.

45. D середина BC въ треугольникѣ ABC ; DE и DF равнодѣлящія угловъ ADC и ADB , пересѣкающія AC и AB въ E и F . Показать, что прямыя EF и BC параллельны.

46. Равнодѣлящая угла A въ треугольникѣ ABC пересѣкаетъ сторону BC въ D ; E середина OC . Показать, что отношеніе ED

*) Вѣвписаннымъ квадратомъ назыв. такой, у котораго двѣ вершины лежатъ на продолженіяхъ сторонъ треугольника.

къ EB равно отношенію разности двухъ другихъ сторонъ къ ихъ суммѣ.

47. Прямая, дѣлящая пополамъ внѣшній уголъ при вершинѣ треугольника, пересѣкаетъ продолженіе основанія въ точкѣ, разстоянія отъ которой до концовъ основанія пропорціональны двумъ другимъ сторонамъ.

48. Если въ четырехугольникѣ $ABCD$ равнодѣлящія угловъ A и C пересѣкаются на діагонали BD , то равнодѣлящія угловъ B и D пересѣкаются на другой діагонали.

49. Даны прямая AB и XY , изъ которыхъ первая имѣетъ опредѣленную длину. Если раздѣлимъ прямую AB въ точкѣ C въ отношеніи m къ n и изъ точекъ A , B и C опустимъ перпендикуляры AA' , BB' и CC' на прямую XY , то

$$(m+n) \cdot CC' = n \cdot AA' + m \cdot BB'.$$

50. Дана система точекъ: A, B, C, D, E, \dots . Показать, что можно всегда найти такую точку, разстояніе отъ которой до данной прямой XY будетъ равно среднему арифметическому разстояній данныхъ точекъ до той же прямой.

51. Если изъ вершинъ какого-либо треугольника и точки пересѣченія медіанъ опустимъ перпендикуляры на какую-либо прямую, не пересѣкающую треугольникъ, то послѣдній перпендикуляръ равенъ среднему арифметическому трехъ первыхъ перпендикуляровъ. Что будетъ, если прямая пересѣкаетъ треугольникъ?

52. Разстояніе отъ точки пересѣченія прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ сторонъ четырехугольника, до какой-либо прямой равно среднему арифметическому разстояній отъ вершинъ четырехугольника до той же прямой.

53. Если на сторонахъ треугольника построимъ равносторонніе треугольники такъ, что всѣ они или внѣ треугольника или всѣ внутри, то центры вписанныхъ круговъ въ построенные треугольники будутъ вершинами равносторонняго треугольника.

54. Если изъ вершинъ четырехугольника опустимъ перпендикуляры на діагонали, то основанія перпендикуляровъ будутъ вершинами четырехугольника, подобнаго данному.

55. Въ треугольникѣ ABC проведемъ медіану AD и равнодѣлящую угла A , которая пересѣчетъ BC въ E ; проведемъ прямую BX , перпендикулярную AE , которая пересѣчетъ AE , AD и AC въ точкахъ G , H и F . Показать, что прямая EH и AB параллельны.

56. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC , гдѣ уголъ A прямой, а уголъ B вдвое болѣе угла C , проведемъ BD , равнодѣлящую угла B , и перпендикуляры AE и DF на BC . Показать, что

$$\frac{1}{BE \cdot DF} - \frac{1}{AE \cdot BF} = \frac{1}{AE \cdot BE}.$$

57. Если AA' , BB' и CC' равнодѣлящія угловъ треугольника ABC , то $AB' \cdot BC' \cdot CA' = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b)(b+c)(a+c)}$, гдѣ a , b и c — стороны треугольника.

58. Если AA' , BB' и CC' будутъ прямыя, проведенныя изъ вершинъ угловъ въ треугольникѣ ABC къ серединамъ противоположныхъ сторонъ или къ точкамъ касанія вписаннаго круга въ треугольникъ ABC , или если эти прямыя будутъ высотами треугольника, или равнодѣлящими его угловъ, то

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB'.$$

59. Если проведемъ прямую, пересѣкающую стороны AB , AC и BC или ихъ продолженія въ точкахъ C' , B' и A' , то $AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB'$, и обратно, т.-е. когда это условіе выполнено, то точки A' , B' и C' лежатъ на одной прямой.

60. Въ треугольникѣ ABC проведена прямая CF , пересѣкающая AB въ F ; равнодѣлящія угловъ BFC и AFC пересѣкаютъ противоположныя стороны въ D и E . Показать, что прямыя AD , BC и CF пересѣкаются въ одной точкѣ.

61. Данъ четырехугольникъ $ABCD$. Проведемъ прямую, пересѣкающую AB и CD въ точкахъ M и N , AD и BC въ точкахъ K и L , AC и BD въ точкахъ P и Q ; тогда $\frac{MK}{LN} = \frac{MQ \cdot KP}{LQ \cdot NP}$.

62. Показать, что если стороны квадратовъ $ABCD$ и $EFGH$, соответственно, параллельны, то прямыя AE , BF , CG и DH пересѣкаются въ одной точкѣ, а также и прямыя AG , BH , CF и DE пересѣкаются въ одной точкѣ.

63. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC , гдѣ уголъ A прямой, опустимъ перпендикуляры: AP на BC , PQ на AB , QR на BC и т. д. Показать, что $\frac{AP+PQ+QR+\dots}{AB} = \frac{AB+BC}{AC}$.

64. Чрезъ вершины треугольника ABC проведемъ прямыя AD , BE и CF , пересѣкающіяся въ одной точкѣ O . Показать, что три прямыя, проведенныя соответственно чрезъ середину каждой изъ сторонъ, параллельно первымъ прямымъ, пересѣкаются также въ одной точкѣ.

65. Если какую-либо точку соединимъ съ серединами боковъ треугольника, то прямыя, проведенныя чрезъ вершины треугольника, параллельно этимъ прямымъ, встрѣчаются въ одной точкѣ.

66. Разстояніе какой-либо вершины треугольника до точки встрѣчи прямыхъ, проходящихъ чрезъ вершины треугольника и пересѣкающихся въ одной точкѣ, вдвое болѣе разстоянія середины противоположной стороны до встрѣчи прямыхъ, параллельныхъ соответственно первымъ и проходящихъ черезъ середины боковъ.

67. Точка встрѣчи трехъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ и проходящихъ чрезъ вершины треугольника; точка встрѣчи медианъ и точка встрѣчи прямыхъ, параллельныхъ соответственно первымъ прямымъ и проходящихъ черезъ середины сторонъ, лежатъ на одной прямой; разстояніе первой точки до второй вдвое болѣе разстоянія второй точки до третьей.

68. Точка пересѣченія высотъ треугольника, точка пересѣченія медианъ и точка пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ серединъ боковъ, лежатъ на одной прямой; при чемъ, разстояніе первой точки до второй вдвое болѣе разстоянія второй точки до третьей.

69. На катетахъ AB и AC прямоугольнаго треугольника ABC построимъ квадраты: $ADEB$ и $AFGC$. Показать, что прямыя BG , CE и перпендикуляръ изъ A на BC пересѣкаются въ одной точкѣ.

70. Внутри треугольника ABC дана точка O ; P , Q и R точки на OA , OB и OC ; прямыя BR и CQ пересѣкаются въ L ; прямыя CP и AR въ M ; прямыя AQ и BP въ N , а прямыя OL , OM и ON пересѣкаютъ BC , CA и AB въ точкахъ D , E и F . Показать, что прямыя AD , BE и CF пересѣкаются въ одной точкѣ.

71. Если одинъ изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника вдвое болѣе другого, то одинъ изъ отрѣзковъ гипотенузы, опредѣленныхъ основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу, будетъ вчетверо болѣе другого ея отрѣзка.

72. Въ треугольникѣ ABC отложимъ на сторонѣ AB часть $AD = \frac{1}{3}AB$ и на AC часть $AE = \frac{1}{3}AC$; чрезъ точку O пересѣченія прямыхъ BE и CD и вершину A проведемъ прямую, которая пересѣчетъ BC въ F . Показать, что $OD = \frac{1}{4}CD$, $OE = \frac{1}{4}BE$ и что E середина BC .

73. Въ треугольникѣ ABC отложимъ на сторонѣ AB часть $AD = \frac{1}{3}AB$ и на CD часть $DO = \frac{1}{4}CD$. Показать, что прямая BO пересѣкаетъ сторону AC въ точкѣ E такъ, что $AE = \frac{1}{3}AC$.

74. Изъ точки D , середины стороны AC равносторонняго треугольника ABC , опустимъ перпендикуляръ DE на BC . Показать, что $BD^2 = \frac{3}{4}BC^2$ и $BE = \frac{3}{4}BC$.

75. Если изъ вершины треугольника опустимъ перпендикуляръ на основаніе, то разность квадратовъ отръзковъ основанія равна разности квадратовъ двухъ другихъ сторонъ треугольника.

76. Изъ середины одного изъ катетовъ прямоугольнаго треугольника опустимъ перпендикуляръ на гипотенузу. Показать, что разность квадратовъ полученныхъ отръзковъ гипотенузы равна квадрату другого катета.

77. Въ прямоугольномъ треугольникѣ произведеніе катетовъ равно произведенію гипотенузы на высоту, проведенную изъ вершины прямого угла.

78. Квадратъ прямой, соединяющей середину катета съ противоположной вершиной, менѣе квадрата гипотенузы на утроенный квадратъ половины раздѣленнаго катета.

79. Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма гипотенузы съ перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ вершины прямого угла, болѣе суммы катетовъ.

80. b и c суть катеты прямоугольнаго треугольника и h длина перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу. Показать, что $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

81. a , b и c суть стороны прямоугольнаго треугольника и h высота, соотвѣтствующая гипотенузѣ a . Показать, что треугольникъ, имѣющій боками $b+c$, b и $a+h$, будетъ тоже прямоугольный.

82. Показать, что если въ треугольникѣ высота есть средняя пропорціональная между отръзками основанія, то уголъ при вершинѣ будетъ прямой.

83. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC продолжимъ катетъ AB на $BD=BA$ и катетъ AC на $CE=CA$, то

$$DC^2 + BE^2 = 5BC^2.$$

84. Прямая AB раздѣлена въ точкѣ C такъ, что $AB \cdot BC = AC^2$; на BC построимъ равнобедренный треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны равны AC . Показать, что прямая, соединяющая A съ F , серединою BD , раздѣлитъ CD въ E такъ, что $CE:ED = BC:CA$.

85. Изъ точки, взятой внутри треугольника, опустимъ перпендикуляры на его стороны; тогда на каждой сторонѣ получимъ по

два отрезка. Показать, что сумма квадратов этих отрезков, черезъ одинъ, равна суммѣ квадратовъ остальныхъ.

86. Изъ точки, взятой внутри многоугольника, опустимъ перпендикуляры на его стороны. Показать, что сумма квадратовъ отрезковъ на сторонахъ многоугольника, черезъ одинъ, равна суммѣ квадратовъ остальныхъ.

87. Если возьмемъ въ треугольникѣ ABC на бокахъ AB , BC и AC такія точки N , L и M , для которыхъ существуетъ отношеніе: $(BL^2 - CL^2) + (CM^2 - AM^2) + (AN^2 - BN^2) = 0$, то перпендикуляры, возставленные изъ этихъ точекъ къ бокамъ треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ. Изъ этой теоремы вывести: 1) что перпендикуляры, возставленные изъ серединъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ; 2) высоты треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ, и 3) перпендикуляры, возставленные къ бокамъ треугольника изъ точекъ касанія къ нимъ вписаннаго круга, пересѣкаются также въ одной точкѣ.

88. На катетахъ AB и AC прямоугольнаго треугольника ABC , построены квадраты: $ABKG$ и $ACHF$. Продолживъ AB , отложимъ $AD = CK$, а продолживъ AC , отложимъ $AE = BH$. Показать, что $CD = BE$.

89. AB діаметръ полуокружности; P , Q , R , и K точки на ней по порядку отъ A . Показать, что

$$AB^2 < AP^2 + PQ^2 + \dots + KB^2.$$

90. Если изъ вершины C при основаніи BC равнобедреннаго треугольника ABC опустимъ перпендикуляръ CD на сторону AB , то сумма квадратовъ сторонъ даннаго треугольника будетъ равна $BD^2 + 2AD^2 + 3CD^2$.

91. Если на основаніи BC равнобедреннаго треугольника ABC или его продолженіи возьмемъ какую-нибудь точку M , то $BM \cdot CM = -AC^2 - AM^2$.

92. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC , въ которомъ уголъ A прямой, проведена равнодѣлящая угла C до пересѣченія съ бокомъ AB въ точкѣ D . Показать, что $AB : AC = (BC - AC) : AD$.

93. На гипотенузѣ BC прямоугольнаго треугольника ABC построимъ квадратъ. Показать, что разность квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ вершину прямого угла съ противоположными вершинами квадрата, равна разности квадратовъ катетовъ треугольника.

94. Пусть BD будетъ одна изъ равныхъ высотъ равнобедреннаго треугольника ABC , у котораго основаніе BC . Показать, что $AC \cdot CD = \frac{1}{2} BC^2$.

95. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC опустимъ изъ конца основанія BC перпендикуляръ BD на противоположную сторону. Показать, что $CD^2 + BD^2 = 2AC \cdot CD$.

96. Если одинъ изъ угловъ треугольника равенъ $\frac{1}{2}$ прямого, то квадратъ противолежащей ему стороны равенъ суммѣ квадратовъ остальныхъ сторонъ, сложенной съ произведеніемъ сторонъ, содержащихъ этотъ уголъ.

97. Въ треугольникѣ ABC точка D будетъ серединою бока AC и AE высотой треугольника; смотря по тому, точка E будетъ ли на BC или продолженіи BC , имѣемъ: $BD^2 = CD^2 + BC \cdot BE$ или $BD^2 = CD^2 - BC \cdot BE$.

98. Когда въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC каждый изъ угловъ B и C при основаніи вдвое болѣе угла A при вершинѣ, то $AB^2 = BC^2 + AB \cdot BC$.

99. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC , въ которомъ A вершина, проведена хорда DE , параллельно основанію. Показать, что $BE^2 = CE^2 + BC \cdot DE$.

100. BD и CE суть высоты треугольника ABC . Показать, что $BC^2 = AB \cdot BE + AC \cdot CD$.

101. Данъ треугольникъ ABC , въ которомъ сумма сторонъ AB и AC въ n разъ болѣе третьей стороны; изъ точки A проведемъ къ BC наклонную $AD = AC$. Показать, что разность между AB и AC составляетъ n -ую часть CD .

102. Сумма квадратовъ діагоналей трапеціи равна суммѣ квадратовъ непараллельныхъ сторонъ + удвоенное произведеніе оснований.

103. Во всякомъ параллелограммѣ сумма квадратовъ діагоналей равна суммѣ квадратовъ его боковъ.

104. Если въ треугольникѣ ABC соединимъ A съ точкою D , лежащею на серединѣ противоположнаго бока, то $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

105. Раздѣлимъ гипотенузу BC прямоугольнаго треугольника ABC на три равныя части въ точкахъ D и E . Доказать, что сумма квадратовъ сторонъ треугольника ADE равна $\frac{1}{3} BC^2$.

106. Если на гипотенузѣ BC прямоугольнаго треугольника ABC возьмемъ точки D и E такъ, чтобы $BD = BA$ и $BE = CA$, то $DE^2 = 2BE \cdot CD$.

107. Сумма квадратовъ разстояній отъ произвольно взятой точки внутри прямоугольника до его двухъ противоположныхъ вершинъ равна суммѣ квадратовъ разстояній отъ той же точки до двухъ другихъ вершинъ.

108. Если для каждой точки, взятой внутри четырехугольника, сумма квадратовъ разстояній отъ нея до двухъ противоположныхъ вершинъ равна суммѣ квадратовъ отъ нея до двухъ другихъ противоположныхъ вершинъ, то такой четырехугольникъ будетъ прямоугольникомъ.

109. Во всякомъ четырехугольникѣ сумма квадратовъ діагоналей равна удвоенной суммѣ квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ сторонъ.

110. Пусть D и F —середины діагоналей AC и BD какого-либо четырехугольника $ABCD$. Показать, что $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$.

111. Сумма квадратовъ двухъ противоположныхъ сторонъ четырехугольника и его діагоналей равна суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ четырехугольника, сложенной съ учетвереннымъ квадратомъ прямой, соединяющей середины этихъ боковъ.

112. Показать, что сумма квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ вершины четырехугольника съ серединою прямой, соединяющей середины его діагоналей, равна суммѣ квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ сторонъ четырехугольника съ серединами его діагоналей.

113. Данъ четырехугольникъ $ABCD$ и E , середина прямой, соединяющей середины діагоналей. Если изъ точки E опишемъ окружность, то сумма квадратовъ разстояній какой-либо точки P этой окружности до четырехъ вершинъ четырехугольника постоянна и равна суммѣ квадратовъ разстояній точки E до тѣхъ же вершинъ, сложенной съ $4EP^2$.

114. На сторонахъ AB и BC какого-либо треугольника ABC построимъ квадраты $ADMB$ и $AENC$. Показать, что сумма квадратовъ BC и DE равна удвоенной суммѣ квадратовъ AB и AC .

115. На трехъ сторонахъ треугольника построимъ квадраты и соединимъ смежныя вершины этихъ квадратовъ. Показать, что сумма квадратовъ сторонъ полученнаго шестиугольника равна учетверенной суммѣ квадратовъ сторонъ треугольника.

116. Показать, что сумма квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ какую-либо точку треугольника съ серединами его сторонъ равна

суммѣ квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ эту точку съ вершинами треугольника, сложенной съ $\frac{1}{4}$ суммы квадратовъ его сторонъ.

117. Сумма квадратовъ сторонъ треугольника равна утроенной суммѣ квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ вершины треугольника съ точкою пересѣченія прямыхъ, проведенныхъ изъ серединъ сторонъ къ противоположнымъ вершинамъ.

118. Показать, что учетверенная сумма квадратовъ сторонъ треугольника равна утроенной суммѣ квадратовъ медіанъ.

119. Дана трапеція $ABCD$, въ которой AD параллельна BC . Показать, что $(AC^2 - BD^2) : (CD^2 - AB^2) = (BC + AD) : (BC - AD)$.

120. Во всякомъ треугольникѣ ABC произведение разстояній отъ вершинъ B и C до равнодѣлящей угла A равно квадрату половины BC , уменьшенному на квадратъ полуразности сторонъ AB и AC .

121. Во всякомъ треугольникѣ ABC произведение разстояній отъ вершинъ B и C до равнодѣлящей вѣшняго угла при вершинѣ A равно квадрату полусуммы сторонъ AB и AC , уменьшенному на квадратъ половины стороны BC .

122. Сумма квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ вершины треугольника съ какою-либо точкою внутри его, равна суммѣ квадратовъ медіанъ, сложенной съ утроеннымъ квадратомъ прямой, соединяющей взятую точку съ точкою пересѣченія медіанъ.

123. Соединивъ вершину A въ треугольникѣ ABC съ точкою M , лежащею на сторонѣ BC , получимъ:

$$AB^2 \cdot CM + AC^2 \cdot BM = (AM^2 + BM \cdot CM)BC.$$

Если же точку M возьмемъ на продолженіи BC , то

$$AC^2 \cdot BM - AB^2 \cdot CM = (AM^2 - BM \cdot CM)BC.$$

124. Проведемъ равнодѣлящую угла A въ треугольникѣ ABC до пересѣченія съ BC въ точкѣ M . Показать, что

$$AB \cdot AC = AM^2 + BM \cdot CM.$$

Если же проведемъ равнодѣлящую вѣшняго угла при вершинѣ A до пересѣченія съ продолженіемъ BC въ точкѣ M , то

$$AB \cdot AC = AM^2 - BM \cdot CM.$$

125. Даны въ окружности параллельныя хорды: AB , CD и EF . Возьмемъ произвольную точку P на окружности и проведемъ прямыя PC и DF , которыя пересѣкутъ AB или продолженіе AB

въ точкахъ Q и R ; проведемъ прямыя EC и FD , которыя пересѣкутъ AB въ G и H . Показать, что произведеніе GH на HI постоянное.

126. Если чрезъ точку касанія двухъ круговъ проведемъ къ нимъ сѣкущую, то части сѣкущей внутри круговъ будутъ пропорціональны радіусамъ круговъ.

127. P , Q и R точки на окружности, которой центръ O . AOB діаметръ, дѣлящій пополамъ хорду QR и пересѣкающій PQ и PR въ M и N . Показать, что треугольники QCM и RCN подобны.

128. P точка на окружности, описанной около треугольника ABC . Опустимъ перпендикуляры PM и PL на AC и BC и перпендикуляръ PG на прямую, проходящую чрезъ M и L . Показать, что $PG \cdot PC = PL \cdot PM$.

129. Окружности O и O' пересѣкаются въ A и B ; проведемъ равнодѣлящую угла между касательными къ кругамъ въ точкѣ A . Показать, что отрѣзки этой равнодѣлящей между A и окружностями пропорціональны радіусамъ.

130. Даны двѣ прямыя MN и KL , пересѣкающіяся въ точкѣ E ; отложимъ на MN такія части EA и EB , а на KL части EC и ED , чтобы $EA \cdot EB = EC \cdot ED$. Показать, что точки A , B , C и D лежатъ на окружности.

131. Данъ уголъ XEY ; возьмемъ на сторонѣ EX точки A и B и на сторонѣ EY точки C и D такъ, чтобы $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. Показать, что точки A , B , C и D лежатъ на окружности.

132. Прямая AC раздѣлена въ B на двѣ части. На AB и BC опишемъ сегменты, выходящіе равные углы и пересѣкающіеся въ D . Показать, что если CD и AD продолжимъ до встрѣчи съ дугами сегментовъ въ точкахъ F и E , то ABF и CBE будутъ подобные равнобедренные треугольники.

133. Двѣ окружности пересѣкаются въ точкахъ P и Q . Если чрезъ точку P проведемъ три прямыя, которыя пересѣкутъ одну окружность въ точкахъ A , B и C , а другую, соответственно, въ точкахъ A' , B' и C' , то треугольникъ ABC будетъ подобенъ треугольнику $A'B'C'$.

134. AOB есть квадратъ, гдѣ O —центръ дуги AB . Изъ какой-нибудь точки C на AB опустимъ перпендикуляръ CD на радіусъ OA , который пересѣчетъ равнодѣлящую угла AOB въ точкѣ E . Показать, что сумма квадратовъ CD и DE равна квадрату радіуса.

135. Если изъ какой-нибудь точки діаметра полукруга возставимъ перпендикуляръ до встрѣчи съ окружностью и соединимъ полученную точку съ серединою полуокружности, то сумма квадратовъ этихъ прямыхъ равна удвоенному квадрату радіуса.

136. Сумма квадрата прямой, соединяющей центръ круга съ какою-либо точкою хорды этого круга и произведенія отрезковъ хорды, опредѣляемыхъ взятою на ней точкою, равна квадрату радіуса.

137. Пусть AB и AC — двѣ взаимно перпендикулярныя хорды круга O ; проведемъ чрезъ центръ круга прямую, которая пересѣчетъ хорду AB въ точкѣ D и продолженіе хорды AC въ точкѣ E . Доказать, что $AE : CE = AD : BD$.

138. На полуокружности AB возьмемъ точку P ; изъ точки C діаметра возставимъ къ нему перпендикуляръ, который пересѣчетъ прямыя AP и BP въ D и E и окружность F . Показать, что CF есть средняя пропорціональная между CE и CD .

139. Въ кругѣ проведена хорда подъ угломъ въ 45° къ діаметру. Показать, что сумма квадратовъ отрезковъ хорды, заключенныхъ между діаметромъ и окружностью, равна удвоенному квадрату радіуса.

140. Около треугольника ABC опишемъ окружность и изъ точки A опустимъ перпендикуляръ AE на противоположную сторону. Показать, что $AB \cdot AC = 2R \cdot AE$, гдѣ R — радіусъ окружности.

141. Показать, что въ треугольникѣ ABC , вписанномъ въ кругъ радіуса R , $ab = 2Rh_a$, $bc = 2Rh_b$ и $ac = 2Rh_c$.

142. Если стороны треугольника составляютъ арифметическую прогрессію, то высота треугольника, соответствующая меньшей сторонѣ и радіусъ вѣвписаннаго круга, касающійся этой стороны, втрое болѣе радіуса вписаннаго круга въ треугольникъ.

143. Въ треугольникѣ ABC , вписанномъ въ кругъ, проведемъ прямую BD , параллельно касательной къ кругу въ точкѣ A , до пересѣченія съ AC въ точкѣ D . Показать, что $AB^2 = AC \cdot AD$.

144. Изъ точки P , взятой внѣ круга O , проведемъ къ нему касательныя PA и PB и прямую AC , перпендикулярную къ діаметру BD . Показать, что PD раздѣляетъ AC пополамъ.

145. На радіусѣ OA даннаго круга, какъ діаметръ, опишемъ окружность; изъ какой-нибудь точки B , взятой на OA , возставимъ къ ней перпендикуляръ, который пересѣчетъ меньшую окружность въ точкѣ C и большую въ D . Показать, что $AD^2 = 2AC^2$.

146. Проведемъ прямую, пересѣкающую двѣ концентрическія

окружности O въ точкахъ A и B , C и D . Показать, что произведение AC на AD или AC на CB будетъ постоянное, при всякомъ положеніи прямой.

147. Въ треугольникѣ ABC , вписанномъ въ окружность, проведемъ равнодѣлящую угла A до пересѣченія съ BC въ D ; также проведемъ изъ точки A прямая подѣляющая углы A къ AD , изъ которыхъ одна пересѣчетъ BC въ F , а другая окружность въ G . Показать, что $AB \cdot AC = AF \cdot AG$.

148. Возьмемъ точку D на окружности, описанной около равнобедреннаго треугольника ABC . Показать, что отношеніе DA къ суммѣ или разности DB и DC , смотря по тому, точки A и D лежатъ по одну сторону BC или по разнымъ сторонамъ ея, величина постоянная.

149. Проведемъ въ кругѣ діаметръ, перпендикулярный въ точкѣ A къ данной хордѣ MN , и еще другую хорду BC , пересѣкающую MN въ точкѣ D . Показать, что $AD^2 + BD \cdot CD$ будетъ величина постоянная, какъ бы ни проводили хорду BC , равная AM^2 .

150. Равнодѣлящая вѣшняго угла A въ треугольникѣ ABC пересѣкаетъ продолженіе BC въ D и окружность, описанную около треугольника, въ E . Показать, что $AB \cdot AC + AD^2 = DB \cdot DC$ и $AB \cdot AC = AE \cdot AD$.

151. Опшемъ полуокруги на отрѣзкахъ гипотенузы прямоугольнаго треугольника, опредѣленныхъ основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго на нее изъ вершины прямого угла. Показать, что отрѣзки катетовъ внутри круговъ пропорціональны кубамъ катетовъ.

152. Если равнобедренный треугольникъ вписанъ въ кругъ и имѣетъ каждую изъ равныхъ сторонъ вдвое болѣе основанія, то отношеніе квадрата радіуса къ квадрату одной изъ равныхъ сторонъ равно отношенію 4 къ 15.

153. Если на діаметрѣ круга возьмемъ двѣ точки, равно удаленныя отъ центра, то сумма квадратовъ разстояній каждой точки окружности до этихъ двухъ точекъ постоянна.

154. Даны двѣ окружности O и O' , проходящія чрезъ центры другъ друга; проведемъ сѣкущую $ACBD$ къ этимъ кругамъ, параллельно линіи центровъ. Показать, что фигуры: $OACO'$ и $ODBO'$ будутъ ромбы, и что если продолжимъ DO до пересѣченія съ окружностью O въ точкѣ E и окружностью O' въ точкѣ F , то $CD = DF$ и $AB = EF$.

155. AB и CD хорды круга, пересекающіяся въ Q , и прямая AC и DB , пересекающіяся въ P . Если опишемъ окружности около треугольниковъ AQC и BQD , то уголъ между касательными къ этимъ окружностямъ въ точкѣ Q равенъ углу APB и другая точка пересѣченія окружностей будетъ лежать на прямой PQ .

156. AB діаметръ круга; CD хорда, перпендикулярная къ AB и E какая-либо точка на CD ; проведемъ прямыя AE и BE до пересѣченія съ окружностью въ F и G . Показать, что въ четырехъ угольникѣ $CFDG$ отношеніе двухъ смежныхъ сторонъ равно отношенію двухъ другихъ сторонъ.

157. Діагонали AC и BD вписаннаго четырехъугольника пересекаются въ E . Показать, что $AB \cdot BC : AD \cdot CD = BE : DE$.

158. Пусть O и O' — центры двухъ круговъ; OP и $O'P'$ — параллельные радіусы. Показать, что прямая PP' проходитъ черезъ постоянную точку, разстоянія отъ которой до центровъ круговъ пропорціональны радіусамъ круговъ.

159. Если на двухъ сторонахъ треугольника опишемъ окружности, пересекающіяся на третьей сторонѣ, то діаметры этихъ окружностей будутъ пропорціональны тѣмъ сторонамъ треугольника, на которыхъ онѣ описаны.

160. BD и CD суть два перпендикуляра къ сторонамъ AB и AC треугольника ABC ; CFE — перпендикуляръ къ AD , пересекающій AD въ F и продолженіе AB въ E . Показать, что треугольники ABC и ACE подобны.

161. Проведемъ въ кругѣ O діаметръ AB и полуокружность AB раздѣлимъ на нѣсколько равныхъ частей въ точкахъ C, D, E, \dots ; проведемъ хорды: CC', DD', EE', \dots , перпендикулярныя къ AB . Показать, что $AC : BC = AB : (CC' + DD' + EE' + \dots)$.

162. $ABCDEF$ шестиугольникъ, вписанный въ кругѣ. Положивъ $AB=a, CD=b, EF=c, DE=a', FA=b', BC=c', CF=x, BE=y$ и $AD=z$, то

$$xyz = aa'x + bb'y + cc'z + abc + a'b'c'.$$

163. На прямой AB описанъ полукругъ, и въ немъ проведены двѣ пересекающіяся хорды AD и BC . Означивъ буквою P точку пересѣченія этихъ хордъ, показать, что $AB^2 = AD \cdot AP + BC \cdot BP$.

164. A, B и C три точки на окружности; D середина хорды BC . Проведя хорду AE чрезъ точку D , показать, что сумма квадратовъ AB и AC равна удвоенному произведенію AD на AE .

165. AB діаметръ круга O и CD хорда, параллельная AB . Продолжимъ AC и AD до пересѣченія въ E и F съ касательной, проведенной къ кругу, въ B . Показать, что $AC \cdot CE + AD \cdot DF = AB^2$.

166. $OFAE$ параллелограммъ и BOC произвольная прямая, пересѣкающая продолженія сторонъ AF и AE въ B и C . Показать, что $BA \cdot AF + CA \cdot AE = AO^2 + BO \cdot OC$.

167. Дана окружность и внѣ ея точки A и B . Проведемъ въ окружности хорду CD , параллельно AB , и прямую AC , пересѣкающую окружность въ E , и прямую EB , пересѣкающую окружность въ F . Показать, что прямая DF пересѣкаетъ прямую AB въ одной и той же точкѣ.

168. Дана точка C внѣ круга O . Если проведемъ произвольно прямую черезъ C , пересѣкающую окружность въ P и P' , то показать, что окружность, описанная около треугольника POP' , пересѣкаетъ OC въ постоянной точкѣ D и если A точка пересѣченія окружности съ OC , то AP равнодѣлящая угла CPD .

169. Разстояніе какой-нибудь точки окружности до хорды круга есть средняя пропорціональная величина между разстояніями той же точки до касательныхъ, проведенныхъ черезъ концы хорды.

170. Опишемъ окружность, проходящую чрезъ центръ другой и изъ какой-либо точки первой окружности проведемъ касательную къ второй. Показать, что общая хорда окружностей проходитъ чрезъ середину хорды касанія.

171. Показать, что часть касательной, заключенной между двумя касательными, проведенными черезъ концы одного изъ діаметровъ круга, дѣлится въ точкѣ касанія на такія двѣ части, произведеніе которыхъ постоянно.

172. Изъ центра O круга опустимъ перпендикуляръ OA на данную прямую AB , не пересѣкающую кругъ; на OA возьмемъ такую точку P , чтобы AP равнялась длинѣ касательной, проведенной изъ A къ этому кругу. Показать, что если Q какая-либо точка прямой AB , то QP равна касательной, проведенной изъ Q къ окружности.

173. Если M середина прямой PQ , гдѣ точки P и Q внѣ круга O , то сумма квадратовъ двухъ касательныхъ къ кругу изъ точекъ P и Q равна удвоенной суммѣ квадрата касательной къ кругу изъ точки M и квадрата PM .

174. Черезъ какую-нибудь точку окружности проведемъ хорды

и касательную; пересѣчемъ эти хорды прямою, параллельною касательной. Показать, что произведеніе каждой изъ хордъ на отрезокъ ея между касательной и прямой будетъ одно и то же для каждой изъ нихъ.

175. Даны двѣ точки внѣ круга; проведемъ изъ каждой изъ нихъ по двѣ касательныхъ. Показать, что можно провести окружность черезъ середины хордъ касанія и данныя точки.

176. TA и TB касательныя къ кругу O въ точкахъ A и B . Проведемъ изъ T прямую, пересѣкающую окружность въ C и D ; пусть Q середина CD . Показать, что прямая TQ будетъ равнодѣлящею угла AQB и длина касательной TA пропорціональна суммѣ AQ и BQ .

177. Проведемъ касательную къ нѣсколькимъ кругамъ, внутренно касающимся, и изъ точки, взятой на касательной, опишемъ дугу, произвольнымъ радіусомъ, пересѣкающую окружности; точки пересѣченія дуги съ окружностями соединимъ съ центромъ дуги. Показать, что части прямыхъ, находящіяся внутри круговъ, равны.

178. Если въ углѣ начертимъ три окружности, касающіяся между собой и боковъ угла, то радіусъ средней окружности будетъ средняя пропорціональная величина между радіусами крайнихъ окружностей.

179. Пересѣкающіяся прямыя EAB , EDC , FDA и FCB составляютъ четыре треугольника и O общая точка пересѣченія окружностей, описанныхъ около этихъ треугольниковъ. Показать, что $OA \cdot OC = OE \cdot OF$.

180. Касательныя къ кругу O въ точкахъ P и Q пересѣкаются въ T . Изъ точки K окружности опустимъ перпендикуляры KM и KN на касательныя TP и TQ и перпендикуляръ KL на хорду PQ . Показать, что KL есть средняя пропорціональная между KM и KN .

181. Двѣ окружности A и B касаются въ C ; внѣ ихъ взята точка D такъ, что $\angle ADC = \angle BDC$. Если DE и DF касательныя къ окружностямъ, то $DE \cdot DF = DC^2$.

182. Если прямая, проходящая чрезъ центры двухъ окружностей O и O' , лежащихъ одна внѣ другой, пересѣкаетъ ихъ въ точкахъ A , B , C и D , то длина общей касательной къ нимъ есть средняя пропорціональная величина между AC и BD или между AD и BC . Какъ выразится эта теорема, если окружности касаются или же пересѣкаются?

183. Опишемъ окружности, проходящія чрезъ одну изъ вершинъ

параллелограмма и данную точку на діагонали, выходящей изъ той же вершины. Показать, что сумма квадратовъ касательныхъ, проведенныхъ изъ концовъ другой діагонали къ каждой изъ окружностей, есть величина постоянная.

184. Изъ точки E , внѣ круга O , проведемъ къ нему касательныя EA и EB ; чрезъ точку D окружности проведемъ касательную, которая пересѣчетъ прямую, проходящую чрезъ A и B , въ точкѣ F . Показать, что окружности, описанныя изъ E радіусомъ EA , а изъ F радіусомъ FD , пересѣкаютъ данную окружность подъ прямымъ угломъ и сами пересѣкаются также подъ прямымъ угломъ.

185. Если прямая AB раздѣлена въ точкѣ C въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, т.-е. $AB:AC=AC:BC$, то, продолживъ AB за точку A на разстояніе $AD=AC$, получимъ прямую BD , раздѣленную въ точкѣ A въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

186. Если меньшую часть прямой, раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, отложить на большей части, то эта послѣдняя раздѣлится также въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

187. Если прямую раздѣлимъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, то сумма квадратовъ данной прямой и меньшаго отрѣзка равна утроенному квадрату большаго отрѣзка.

188. Прямую AB раздѣлимъ въ точкахъ C и D такъ, чтобы $AB:AC=AC:AD$, и черезъ точку A проведемъ прямую $AE=AC$. Показать, что для угла BED прямая EC будетъ равнодѣлящею.

189. AB основаніе треугольника ABC , въ которомъ двѣ другія стороны будутъ отрѣзками прямой AB , раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношеніи; CP равнодѣлящая угла ACB и CQ перпендикуляръ на AB , гдѣ точки P и Q на AB . Показать, что $CP^2=2PQ \cdot AB$.

190. Данъ равнобедренный треугольникъ ABC , въ которомъ уголъ B вдвое болѣе угла A при вершинѣ. Показать, что равнодѣлящая угла B дѣлитъ противоположную сторону въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

191. Показать, что въ равнобедренномъ треугольникѣ, въ которомъ уголъ при основаніи вдвое болѣе угла при вершинѣ, основаніе будетъ средней пропорціональной величиной между одной изъ равныхъ сторонъ и разностью между нею и основаніемъ треугольника.

192. Построимъ равнобедренный треугольникъ ABD , въ которомъ углы B и D вдвое болѣе угла A . Отложимъ на AB часть

$AC=BD$ и опишемъ окружность O около треугольника ACD , которая пересѣчетъ окружность, описанную изъ A радиусомъ AB , въ точкѣ E . Показать: 1) хорды CD и DE равны; 2) окружности, описанныя около треугольниковъ ACD и ABD , равны; 3) если проведемъ діаметръ AF окружности CDE , то хорда DF равна радиусу описаннаго круга около треугольника BCD и 4) прямыя BD и CE параллельны.

193. Въ треугольникѣ ABC — точки D , E и F основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ A , B и C на противоположныя стороны; O точка ихъ пересѣченія. Показать, что $DO \cdot DA = DE \cdot DF$.

194. Проведемъ прямую, встрѣчающую двѣ пересѣкающіяся окружности въ точкахъ A и D , B и E , и общую хорду, пересѣкающую прямую AE въ точкѣ C . Показать, что $AB : BC = ED : CD$ и $AE^2 : BD^2 = AC \cdot CE : BC \cdot CD$.

195. Окружность FDG касается другой окружности $ADBE$ въ D и ея хорды AB въ F . Изъ C середины AB возставимъ перпендикуляръ до пересѣченія въ E съ окружностью BDE и проведемъ діаметръ FG окружности FDG . Показать, что $FA \cdot FB = FG \cdot EC$.

196. Даны два касающихся круга O и O' въ точкѣ E ; проведемъ прямую $AOEO'A'$, гдѣ A и A' концы діаметровъ и E точка касанія; изъ точки A проведемъ касательную AC' къ кругу O' , которая пересѣчетъ окружность O въ точкѣ B , а изъ точки A' — касательную $A'C$ къ кругу O , которая пересѣчетъ окружность O' въ точкѣ B' . Показать, что $AB \cdot A'B' = 4BC' \cdot B'C$.

197. Хорду AB круга O раздѣлимъ въ C такъ, чтобы $AC : CB = AP : PB$, гдѣ P точка окружности O . Показать, что можно описать окружность, касающуюся AB въ C и данную окружность въ P .

198. Двѣ окружности касаются внутренно въ точкѣ D . Проведемъ хорду AB наружной окружности, касающуюся внутренней въ точкѣ C . Показать, что $AC : CB = DA : DB$.

199. Если двѣ хорды пересѣкаются въ кругѣ, то разность ихъ квадратовъ равна разности квадратовъ разностей ихъ отрѣзковъ.

200. Въ кругѣ, котораго центръ O , проведемъ діаметръ AB и хорда CD , параллельно діаметру. Взявъ какую-нибудь точку E на діаметрѣ, показать, что $CE^2 + DE^2 = AE^2 + BE^2$.

201. Даны двѣ хорды, пересѣкающіяся внутри или внѣ даннаго круга подъ прямымъ угломъ. Показать, что сумма квадратовъ

двухъ противоположныхъ прямыхъ, соединяющихъ концы хордъ, равна квадрату діаметра, точно такъ же, какъ и сумма квадратовъ четырехъ отрѣзковъ данныхъ прямыхъ.

202. Показать, что въ кругѣ сумма квадратовъ двухъ пересѣкающихся перпендикулярныхъ хордъ, сложенная съ учтеннымъ квадратомъ разстоянія точки ихъ пересѣченія до центра круга, равна удвоенному квадрату діаметра этого круга.

203. На діаметрѣ круга даны двѣ точки, равноотстоящія отъ центра, и чрезъ одну изъ нихъ проведена хорда, которой концы соединены съ другою данною точкою. Показать, что сумма квадратовъ сторонъ полученнаго треугольника будетъ величина постоянная.

204. Если изъ точки A пересѣченія двухъ касательныхъ AB и AC къ кругу O провести къ нему сѣкущую $ADEF$, пересѣкающую окружность въ точкахъ D и F , а хорду BC въ точкѣ E , то $AE^2 = AB^2 - EF \cdot ED$.

205. Къ двумъ кругамъ проведена общая касательная CDE , пересѣкающая линію центровъ въ точкѣ E , и прямая $FGHKE$ — сѣкущая этихъ круговъ. Показать, что $EC \cdot ED = EF \cdot EK = EG \cdot EH$.

206. Окружность, вписанная въ треугольникъ ABC , касается его сторонъ BC , CA и AB въ D , E и F . Отложимъ на BC часть $CD' = BD$ и проведемъ прямую AD' , которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ P и Q (P ближайшая къ A). Показать, что $AP \cdot BC = AE \cdot PD'$.

207. Если въ данныхъ кругахъ O и O' проведемъ, по одну сторону прямой OO' , параллельные радіусы: OA и $O'A'$, OB и $O'B'$, OC и $O'C'$, ..., то сѣкущія, проведенныя чрезъ точки A и A' , B и B' , C и C' , ..., проходятъ чрезъ точку пересѣченія вѣншихъ касательныхъ къ даннымъ кругамъ.

208. Если въ данныхъ непересѣкающихся окружностяхъ O и O' проведемъ, по разнымъ сторонамъ прямой OO' , параллельные радіусы: OA и $O'A'$, OB и $O'B'$, OC и $O'C'$, ..., то сѣкущія, проведенныя чрезъ точки A и A' , B и B' , C и C' , ..., проходятъ чрезъ точку пересѣченія внутреннихъ касательныхъ къ даннымъ окружностямъ.

209. Если опишемъ произвольнымъ радіусомъ окружность, касающуюся окружностей O и O' , то прямая, проходящая чрезъ точки касанія, пройдетъ чрезъ точку пересѣченія вѣншихъ касательныхъ къ даннымъ окружностямъ.

210. Если чрезъ двѣ данныя точки A и B проведемъ окружности, пересѣкающія данную окружность O , то хорды пересѣченій, по своимъ продолженіи, встрѣтятся въ одной точкѣ.

211. Если три круга пересѣкаются попарно, то хорды пересѣченій проходятъ чрезъ одну точку.

212. Пары общихъ касательныхъ къ двумъ изъ трехъ пересѣкающихся круговъ встрѣчаются въ точкахъ, лежащихъ на прямой.

213. AB и CD двѣ хорды круга, которыя, по продолженіи, встрѣчаются въ точкѣ M , и хорда EF , параллельная AB ; проведемъ прямыя: CF , CE , DE и DF до пересѣченія съ прямою AM въ точкахъ: L , G , K и H . Показать, что $MG \cdot MH = MK \cdot ML$.

214. A центръ окружности; CAB діаметръ ея; на продолженіи CB возьмемъ точку D такъ, чтобы $DB \cdot DC^2 = AD \cdot AB^2$ и изъ D опишемъ дугу радіусомъ AB , которая пересѣчетъ данную окружность въ E . Показать, что дуга EB равна $\frac{1}{2}$ окружности.

215. Пусть r радіусъ вписаннаго круга и r_a радіусъ внѣвписаннаго круга въ треугольникъ ABC , касающійся стороны BC ; первый кругъ касается AB и AC въ точкахъ D и E , а второй касается продолженій этихъ сторонъ въ точкахъ D' и E' . Показать, что $BD \cdot BD' = CE \cdot CE' = rr_a$.

216. O и r центръ и радіусъ вписанной окружности въ данный треугольникъ ABC ; продолжимъ AO до пересѣченія въ E съ окружностью, описанною около треугольника ABC . Показать, что $AO \cdot OE = -2Rr$, гдѣ R радіусъ описанной окружности около треугольника.

217. O' и r_a центръ и радіусъ внѣвписаннаго круга въ треугольникъ ABC , касающагося BC ; прямая AO' пересѣкаетъ окружность описаннаго круга около треугольника въ E . Показать, что $AO' \cdot OE = 2Rr_a$, гдѣ R радіусъ описанной окружности около треугольника.

218. Изъ вершины A прямоугольнаго треугольника опустимъ перпендикуляръ AD на гипотенузу BC . Означивъ буквами r , r_1 и r_2 радіусы круговъ, вписанныхъ въ треугольники: ABC , ABD и ACD , показать, что $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

219. Изъ точки T , взятой внѣ круга, проведемъ касательныя TP и TQ къ кругу и прямую TO , гдѣ O центръ круга. Чрезъ точку же T проведемъ еще прямую, пересѣкающую дугу PQ въ точкѣ K , хорду PQ въ L , и изъ точки O опустимъ перпендикуляръ ON на эту прямую. Показать, что $NL \cdot NT = KN^2$.

220. Если проведемъ равнодѣлящую вѣшняго угла при вершинѣ треугольника до встрѣчи съ продолженіемъ основанія, то квадратъ равнодѣлящей равенъ разности произведеній другихъ сторонъ треугольника и отрезковъ основанія, считая ихъ отъ вершинъ до точки пересѣченія равнодѣлящей съ продолженіемъ основанія.

221. Въ кругѣ вписанъ треугольникъ ABC ; проведемъ прямыя AD и AE параллельно касательнымъ къ кругу въ точкахъ B и C , до встрѣчи съ основаніемъ BC въ точкахъ D и E . Показать что $AD=AE$ и $BD:CE=AB^2:AC^2$.

222. Даны два не пересѣкающихся круга O и O' ; чрезъ ихъ центры проведемъ прямую, пересѣкающую окружность O въ точкахъ A и C , а окружность O' въ точкахъ D и B ; проведемъ касательную EF къ этимъ кругамъ и изъ G , середины EF , опустимъ перпендикуляръ GH на AB . Показать, что $HC \cdot HA=HD \cdot HB$.

223. Данъ параллелограммъ $ABCD$; опишемъ окружность, проходящую черезъ точку A и пересѣкающую стороны AB , AD и діагональ AC , соответственно, въ точкахъ F , H и G . Показать, что $AB \cdot AF+AD \cdot AH=AC \cdot AG$.

224. C означаетъ середину дуги AB и D какую-нибудь точку этой дуги. Вывести слѣдующую зависимость между хордами: $AC+BC>AD+BD$. 3538(22)

225. Проведемъ діаметръ $АН$ въ кругѣ O и раздѣлимъ полуокружность $АН$ на нечетное число равныхъ частей: AB, BC, CD, DE, EF, FG и GH ; проведемъ прямыя BG и CF , пересѣкающія радіусы OE и OD , соответственно, въ точкахъ M и N, K и L ; соединимъ D съ E . Показать, что сумма отрезковъ прямыхъ между OD и OE , т.-е. $ED+KL+MN$, равна радіусу круга.

226. O, O_1, O_2 и O_3 центры вписаннаго и вѣвписанныхъ круговъ, касающихся сторонъ BC, CA и AB треугольника ABC . Показать, что $AO \cdot OO_1=OB \cdot OO_2=OC \cdot OO_3=4Rr$.

227. Пусть R, r, r_a, r_b и r_c будутъ радіусы круговъ описаннаго, вписаннаго и вѣвписанныхъ въ данный треугольникъ; d, d_1, d_2 и d_3 — разстоянія центра описаннаго круга до центровъ круговъ вписаннаго и вѣвписанныхъ. Показать, что $R^2=d^2+2Rr=d_1^2-2Rr_a=d_2^2-2Rr_b=d_3^2-2Rr_c=\frac{1}{12}(d^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2)$.

228. Около треугольника ABC опишемъ окружность O и впишемъ въ него окружность O' . Проведемъ чрезъ O и O' прямую, которая пересѣчетъ окружности въ точкахъ F, E, E' и F' . Озна-

чивъ буквами R и r радіусъ описанной и вписанной окружностей, показать, что $EF \cdot EF' \cdot E'F \cdot E'F' = r^3(4R + r)$.

229. O и O' центры вписанной и описанной окружностей около треугольника ABC ; r и R ихъ радіусы; прямая OO' пересѣкаетъ описанную окружность въ P и Q . Показать, что $OP \cdot OQ = 2Rr$.

230. Если x , y и z разстоянія отъ центра окружности девяти точекъ даннаго треугольника до ортоцентра его, то

$$x^2 + y^2 + z^2 + d^2 = 3R^2,$$

гдѣ R радіусъ описанной окружности около треугольника.

231. O и O' центры описанной и одной изъ вѣвписанныхъ окружностей треугольника; P одна изъ точекъ пересѣченія ихъ. Если продолжимъ прямую $O'P$ до пересѣченія съ описанною окружностью въ точкѣ Q , то $O'Q$ равна діаметру описанной окружности около даннаго треугольника.

232. Опшемъ на AB , какъ діаметръ, полуокружность AMB и по другую сторону AB построимъ прямоугольникъ $ABB'A'$, у котораго сторона BB' равна боку квадрата, вписаннаго въ кругъ діаметра, равнаго AB ; изъ произвольной точки M полуокружности опустимъ перпендикуляръ MP на AB и соединимъ прямыми точку M съ точками A' и B' , которыя пересѣкутъ AB въ точкахъ C и D . Показать, что $AD^2 + BC^2 = AB^2$ (Fermat).

233. Если въ четырехугольникѣ, вписанномъ въ кругъ, продолжимъ стороны до ихъ встрѣчи, то равнодѣляція угловъ, образуемыхъ ими, пересѣкаются въ точкѣ, лежащей на прямой, соединяющей середины діагоналей четырехугольника.

234. Въ четырехугольникѣ, вписанномъ въ кругъ, квадратъ прямой, соединяющей точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ четырехугольника, менѣе суммы квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ эти точки съ центромъ окружности, на удвоенный квадратъ радіуса окружности.

235. Продолжимъ противоположныя стороны вписаннаго четырехугольника до ихъ встрѣчи. Показать, что сумма квадратовъ двухъ касательныхъ, проведенныхъ изъ точекъ пересѣченій, равна квадрату прямой, соединяющей эти точки.

236. Четырехугольникъ $ABCD$ вписанъ въ кругъ O . Продолжимъ AB и DC до пересѣченія въ E ; BC и AD до пересѣченія въ F . Показать, что окружность, описанная на EF , какъ діаметръ, пересѣкаетъ данную окружность подъ прямымъ угломъ.

237. Если чрезъ E , пересѣченіе діагоналей вписаннаго въ кругъ O четырехугольника $ABCD$, проведемъ хорду FEG такъ, чтобы E была ея серединою, то часть этой хорды между противоположными сторонами четырехугольника также дѣлится пополамъ въ точкѣ E .

238. Чрезъ вершины треугольника ABC и точку внутри его проведемъ прямыя, пересѣкающія стороны треугольника, соответственно, въ точкахъ D , E и F ; черезъ точки D , E и F проведемъ окружность, которая пересѣчетъ эти стороны, соответственно, въ точкахъ D' , E' и F' . Показать, что прямыя AD' , BE' и CF' пересѣкаются въ одной точкѣ.

239. Въ треугольникѣ ABC высоты его AD , BE и CF пересѣкаются въ P ; D' , E' и F' середины сторонъ BC , CA и AB . Показать, что прямыя, соединяющія точки D' , E' и F' съ серединами AP , BP и CP , равны и пересѣкаются въ одной точкѣ, и что и прямыя, соединяющія D' , E' и F' съ серединами AD , BE и CF , пересѣкаются также въ одной точкѣ.

240. Если въ шестиугольникѣ, вписанномъ въ кругъ, продолжимъ его стороны, черезъ двѣ, до ихъ встрѣчи, то полученные три точки пересѣченія лежатъ на одной прямой.

241. Діаметръ d данной окружности раздѣлимъ на $2n$ равныхъ частей и изъ какой-нибудь точки окружности проведемъ прямыя къ точкамъ дѣленія. Если $a_1, a_2, \dots a_{2n-1}$ длины проведенныхъ прямыхъ, то

$$\lim (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2n-1}^2) = \frac{1}{2}d^2,$$

когда число дѣленій увеличимъ до бесконечности.

В. Задачи на построение.

242. Данную прямую AB раздѣлить на части, пропорціональныя частямъ a и b другой данной прямой.

243. Данную прямую AB раздѣлить въ отношеніи 2 къ 3.

244. Данную прямую AB раздѣлить въ отношеніи $m : n : p$.

245. Найти двѣ прямыя, которыя относились бы какъ m къ n .

246. Данную прямую AB продолжить на столько, чтобы отношеніе данной прямой къ продолженной части было равно отношенію данныхъ примыхъ a и b .

247. Данную прямую AB продолжить на столько, чтобы отношеніе всей прямой къ продолженной части было равно отношенію m къ n .

248. Данную прямую AB раздѣлить на такія двѣ части, чтобы сумма ихъ относилась къ разности ихъ же, какъ данная прямая k къ l .

249. Дана прямая MN и внѣ ее точка A . Найти такую точку, чтобы разстоянія отъ нее до точки A и до прямой MN были въ отношеніи m къ n и чтобы сумма этихъ разстояній равнялась данной прямой s .

250. Дана прямая MN и внѣ ее точка A . Найти такую точку, чтобы разстоянія отъ нее до точки A и до прямой MN были въ отношеніи m къ n и чтобы разность этихъ разстояній равнялась данной прямой d .

251. Найти геометрическое мѣсто точекъ, которыя раздѣляютъ въ отношеніи m къ n всѣ прямыя, соединяющія данную точку A съ точками прямой MN .

252. По тремъ даннымъ прямымъ a , b и c найти четвертую, нѣтъ пропорціональную.

253. Построить: 1) $\frac{ab}{c}$; 2) $\frac{a^2}{2b}$; 3) $\frac{abc}{de}$; 4) $\frac{a^2+ab}{c+d}$ и 5) $\frac{a^3+2ab^2-b^3}{a^2-b^2+ab}$,

гдѣ a , b , c , d и e данныя прямыя.

254. Помощію одного циркуля, построить четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ примымъ.

255. Построить двѣ прямыя по данной ихъ суммѣ s и отношенію $m:n$.

256. Построить двѣ прямыя по данной ихъ разности d и отношенію $m:n$.

257. Раздѣлить данную прямую AB такъ, чтобы первая часть относилась ко второй, какъ прямая a къ b , а вторая часть къ третьей, какъ прямая c къ d .

258. Данную прямую AB раздѣлить на двѣ части пропорціональныя квадратамъ прямыхъ a и b .

259. На данной прямой a построить треугольникъ, подобный данному треугольнику ABC .

260. Построить треугольникъ, котораго стороны были бы въ отношеніи $m:n:p$.

261. На данной прямой a построить параллелограммъ, подобный данному параллелограмму $ABCD$.

262. На данной прямой a построить многоугольникъ, подобный данному и одинаково съ нимъ расположенный.

263. Построить треугольникъ по углу A , отношенію $m:n$ сторонъ, заключающихъ уголъ A , и сторонѣ a .

264. Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ a и отношенію $m:n$ катетовъ.

265. Построить треугольникъ, подобный данному треугольнику ABC и у котораго одна изъ высотъ равнялась бы h .

266. Построить равнобедренный треугольникъ по высотѣ h_a и отношенію $m:n$ основанія къ одной изъ равныхъ сторонъ.

Построить треугольникъ (267—281), когда дано:

267. $a, a:b$ и B .

268. $a, a:b$ и $a:c$.

269. $a, b-c$ и $b:c$.

270. $a, b+c$ и $b:c$.

271. a, B и $b:c$.

272. A, a и $b:c$.

273. $b:c, A$ и h_a .

274. $b:c, A$ и h_b .

275. A, a и $h_b:b$.

276. A, b и $c:h_c$.

277. Уголъ A , высота h_a и отношеніе $m:n$ отрезковъ стороны, опредѣленныхъ на ней высотой h_a .

278. Уголъ A , равнодѣлящая l_a и отношеніе $m:n$ отрезковъ стороны, опредѣленныхъ на ней высотой, опущенною изъ A .

279. $B, a:b$ и $2p$.

280. $2p, A$ и отношеніе $m:n$ отрезковъ стороны, опредѣленныхъ высотой, проведенною изъ вершины угла A .

281. Высота h_a и двѣ прямыя s и t , соединяющія одну изъ вершинъ треугольника съ точками, дѣлящими противоположную сторону въ отношеніи $m:n:p$.

282. Чрезъ точку M , данную внутри угла XAY , провести прямую такъ, чтобы части ея, ограниченныя данною точкою и боками угла, были въ отношеніи m къ n .

283. Чрезъ точку M , данную внутри угла XAY , провести прямую такъ, чтобы части, отсѣкаемые ею на бокахъ угла, считая ихъ отъ вершины, были въ отношеніи m къ n .

284. Стороны AB и AC треугольника ABC продолжимъ до D и E такъ, чтобы прямая DE была параллельна BC ; прямую DE раздѣлимъ въ точкѣ F такъ, чтобы $DF:EF=BD:CE$. Найти геометрическое мѣсто точки F .

285. Найти геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія отъ которыхъ до пересѣкающихся прямыхъ AX и AY были бы въ отношеніи m къ n .

286. Въ данномъ треугольникѣ ABC найти такую точку, разстояніе отъ которой до боковъ его: AB, BC и AC были бы въ отношеніи $m:n:p$.

3521(9)

287. Черезъ данную точку M провести прямую, которая проходила бы черезъ точку пересѣченія непараллельныхъ прямыхъ AB и CD , не опредѣляя точки ихъ встрѣчи.

288. Черезъ точку A пересѣченія окружностей O и O' провести сѣкающую такъ, чтобы полученныя на ней хорды въ этихъ окружностяхъ были въ отношеніи m къ n .

289. Въ кругѣ O даны два радіуса OA и OB . Провести хорду въ немъ такъ, чтобы она этими радіусами раздѣлилась въ отношеніи $m : n : p$.

290. Данъ уголъ HOY и двѣ прямыя: AB и CD . Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы отрѣзки прямыхъ, проведенныхъ изъ каждой изъ нихъ, параллельно AB и CD и заключенныхъ между нею и боками угла, были въ отношеніи m къ n .

291. Даны двѣ параллельныя прямыя MN и KL . Провести прямую, параллельную имъ, такъ, чтобы отрѣзки прямыхъ, пересѣкающихъ MN и KL и заключенныя между смежными прямыми, были въ отношеніи m къ n .

292. Даны прямыя MN и KL и точка P . Найти на прямой KL такую точку, чтобы разстоянія отъ нея до точки P и прямой MN были равны.

293. Даны прямыя MN и KL и точка P . Найти на прямой KL такую точку, чтобы разстоянія отъ нея до точки P и прямой MN были въ данномъ отношеніи.

294. Данъ уголъ HAY и внутри его точка P . На сторонѣ AX найти такую точку, чтобы разстоянія отъ нея до точекъ P и A были въ данномъ отношеніи.

295. Даны три точки: A , B и C . Провести прямую чрезъ точку A такъ, чтобы разстоянія до нея отъ точекъ B и C были въ отношеніи m къ n .

296. Даны точки A , B и C . Провести прямую такъ, чтобы разстоянія до нея отъ данныхъ точекъ были въ отношеніи $m : n : p$.

297. Даны точки A , B и C . Провести чрезъ точку A прямую такъ, чтобы разстоянія отъ A до основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ на прямую изъ точекъ B и C , были въ отношеніи m къ n .

298. Даны три точки: A , B и C . Найти такую четвертую точку D , чтобы разстояніе отъ точки C до прямой, проведенной чрезъ D , равнялось суммѣ разстояній отъ точекъ A и B до той же прямой.

299. Даны три прямыя: AX , AY и AZ и точка M . Провести чрезъ точку M сѣкущую такъ, чтобы отрѣзокъ ея между крайними прямыми дѣлился пополамъ среднею прямою.

300. Даны три прямыя: AX , AY и AZ и точка M . Провести чрезъ эту точку сѣкущую такъ, чтобы отрѣзки ея между данными прямыми были въ отношеніи m къ n .

301. Даны три точки: A , B и C . Провести чрезъ нихъ параллельныя прямыя: AX , BY и CZ такъ, чтобы разстояніе между прямыми AX и BY и разстояніе между прямыми BY и CZ были въ отношеніи m къ n .

302. На сторонѣ AB даннаго треугольника ABC найти такую точку M , чтобы длина перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на сторону AC , была въ данномъ отношеніи $m : n$ къ длинѣ хорды, проведенной изъ M , параллельно сторонѣ AC .

303. Найти на сторонѣ AB треугольника ABC такую точку, чтобы хорды, проведенныя изъ нея, параллельно другимъ сторонамъ, были въ отношеніи $m : n$.

304. Въ данномъ треугольникѣ ABC провести хорду DE (D на AB , E на AC) такъ, чтобы отношеніе отрѣзковъ AD и CE равнялось отношенію m къ n .

305. Въ треугольникѣ ABC провести определенной длины хорду DE (D на AB , E на AC) такъ, чтобы отношеніе BD къ CE равнялось отношенію m къ n .

306. Въ треугольникѣ ABC провести прямую, параллельно данной прямой KL , которая раздѣлила бы периметръ треугольника въ отношеніи m къ n .

307. Въ треугольникѣ ABC провести хорду DE (D на AB , E на BC), параллельно AC , такъ, чтобы сумма отрѣзковъ AD и CE была данная s .

308. Въ треугольникѣ ABC провести хорду DE (D на AB , E на BC), параллельно AC , такъ, чтобы разность отрѣзковъ AD и CE была данная d .

309. Данъ уголъ XAY . Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, для которыхъ сумма разстоянія отъ каждой изъ нихъ до прямой AY и отрѣзка прямой, проведенной изъ нея параллельно AY , до прямой AX , была бы равна s .

310. Данъ уголъ XAY и прямыя KL и PQ . Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы, проведя изъ каждой изъ нихъ

прямая, параллельно даннымъ, сумма отрезковъ на этихъ прямыхъ, считая отъ точки до боковъ угла, была равна s .

311. Данъ уголъ $ХАУ$ и двѣ прямая KL и PQ . Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы, проведя изъ какой-либо изъ нихъ прямая, параллельно даннымъ, разность отрезковъ на проведенныхъ прямыхъ, считая отъ точки до боковъ угла, была равна d .

312. Около даннаго круга O описать треугольникъ, подобный данному треугольнику ABC и въ которомъ одна сторона была бы параллельна данной прямой KL .

313. Въ данный кругъ O вписать треугольникъ, подобный данному треугольнику ABC .

314. Въ данный кругъ O вписать треугольникъ, подобный данному треугольнику ABC и у котораго одна изъ сторонъ проходила бы чрезъ данную точку P .

315. Въ данный кругъ O вписать треугольникъ, подобный данному и одна изъ сторонъ котораго была бы параллельна данной прямой KL .

316. Около даннаго треугольника ABC описать треугольникъ, подобный треугольнику DEF и въ которомъ одна изъ сторонъ была бы параллельна данной прямой KL .

317. Въ данный треугольникъ ABC вписать треугольникъ, подобный данному треугольнику DEF и въ которомъ одна изъ сторонъ была бы параллельна данной прямой KL .

318. Въ данный треугольникъ ABC вписать параллелограммъ, который съ треугольникомъ имѣлъ бы общій уголъ C , а неравныя стороны его были бы въ отношеніи m къ n .

319. Вписать въ данный треугольникъ ABC параллелограммъ, подобный данному параллелограмму $DEFG$.

320. Данъ уголъ $ХАУ$, внутри его точка P и прямая KL . Построить треугольникъ такъ, чтобы вершина даннаго въ немъ угла α была въ точкѣ P , а противоположная ему сторона была параллельна прямой KL и концы ея лежали на бокахъ угла $ХАУ$.

321. Данъ уголъ $ХАУ$ и точка P внутри его. Построить треугольникъ, подобный данному треугольнику DEF , такъ, чтобы одна изъ его вершинъ была въ точкѣ P , а двѣ другія на бокахъ угла.

322. Въ данный треугольникъ ABC вписать треугольникъ, подобный данному треугольнику DEF , и чтобы одна изъ вершинъ его была въ точкѣ M , данной на BC .

323. Въ данный треугольникъ ABC вписать квадратъ.

324. Въѣвписатьъ квадратъ въ данный треугольникъ ABC *).

325. Въ данный треугольникъ ABC вписать прямоугольникъ, подобный данному прямоугольнику $DEFG$.

326. Въ данный треугольникъ ABC вписать прямоугольникъ даннаго периметра $2p$.

327. Въ данный секторъ вписать квадратъ такъ, чтобы двѣ вершины его лежали на дугѣ, а двѣ другія на двухъ радіусахъ.

328. Въ данный секторъ вписать квадратъ такъ, чтобы двѣ его вершины лежали на одномъ радіусѣ, одна на другомъ радіусѣ и одна на дугѣ сектора.

329. Дана окружность и прямая. Построить квадратъ такъ, чтобы двѣ его вершины лежали на прямой, а двѣ на окружности.

330. Въ данный сегментъ ACB вписать квадратъ.

331. Въ данный сегментъ ACB вписать прямоугольникъ, подобный данному прямоугольнику $DEFG$.

332. Въ данный сегментъ ACB вписать прямоугольникъ даннаго периметра $2p$.

333. Въ данный секторъ AOB вписать прямоугольникъ такъ, чтобы сумма двухъ смежныхъ сторонъ его была s и чтобы двѣ вершины лежали на одномъ изъ радіусовъ сектора.

334. Въ данный секторъ AOB вписать прямоугольникъ такъ, чтобы разность смежныхъ сторонъ была d и чтобы двѣ вершины его лежали на одномъ изъ радіусовъ сектора.

335. Въ данный секторъ AOB вписать прямоугольникъ даннаго периметра $2p$ такъ, чтобы двѣ его вершины лежали на дугѣ сектора.

336. Даны четыре точки: A , B , C и D . Провести чрезъ нихъ двѣ пары параллельныхъ прямыхъ такъ, чтобы въ пересѣченіи получился прямоугольникъ, подобный данному $MNPQ$.

337. Даны три параллельныя прямыя: KL , MN и PQ и треугольникъ ABC . Построить треугольникъ, подобный данному и котораго вершины лежали бы на данныхъ прямыхъ.

338. Въ треугольникѣ ABC провести хорду DE (D на AB , E на AC) такъ, чтобы отрезки: BD , DE и EC были равны.

339. Въ треугольникѣ ABC провести хорду DE (D на AB , E

*) Въѣвписатьъ квадратъ въ треугольникъ значитъ построить такъ квадратъ, чтобы нѣкоторыя изъ его вершинъ лежали на продолженіяхъ сторонъ \triangle .

на AC) такъ, чтобы отрезки: BD , DE и EC были въ данномъ отношеніи $m : n : p$.

340. На сторонахъ AB и CD четырехугольника $ABCD$ найти такія точки E и F , чтобы отрезки: AE , EF и FC были равны.

341. На сторонахъ AB и CD четырехугольника $ABCD$ найти такія точки E и F , чтобы отрезки: AE , EF и FC были въ отношеніи $m : n : p$.

342. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы сумма разстояній отъ каждой изъ нихъ до боковъ даннаго угла XAY , умноженныхъ, соответственно, на числа m и n , равнялась данной прямой l .

343. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы разность разстояній отъ каждой изъ нихъ до боковъ даннаго угла XAY , умноженныхъ, соответственно, на числа m и n , равнялась данной прямой l .

344. Найти на данной прямой KL такую точку, чтобы сумма (или разность) отъ нея до данныхъ прямыхъ AB и CD , умноженныхъ, соответственно, на m и n , равнялась данной прямой l .

345. Дана окружность O и на ней двѣ точки A и B . Найти на окружности такую точку, чтобы разстоянія отъ нея до данныхъ точекъ были въ отношеніи m къ n .

Построить треугольникъ (346—356), когда дано:

346. A , $b : c$ и R .

347. A , $b : c$ и r .

348. A , $b : c$ и r_a .

349. a , b и l_c .

350. a , b и прямая k , соединяющая вершину угла между ними съ точкою, дѣлящую противоположную сторону въ отношеніи m къ n .

351. $a + h_a$, B и C .

352. $a + c$, $b + c$ и A .

353. $c - a$, $b - c$ и A .

354. a , $(b + c) : (b - c)$ и B .

355. A , $b + c$ и отношеніе $m : n$ отрезковъ стороны, противоположной углу A , определенныхъ высотой, проведенною изъ A .

356. A , R и отношеніе $m : n$, въ которомъ раздѣлена сторона, противоположная углу A , точкою касанія вѣнписаннаго круга.

357. Изъ данныхъ точекъ A и B описать окружности радиусамъ, находящимися въ отношеніи m къ n , такъ, чтобы общая касательная къ окружностямъ проходила чрезъ данную точку C .

358. Чрезъ точку A пересѣченія окружностей O и O' провести сѣкущую BAC (B на окружности O , C на окружности O') такъ, чтобы произведеніе хордъ AB и AC равнялось k^2 .

359. Дана окружность O и на ней точка A . Описать окружность, касающуюся данной окружности въ точкѣ A , такъ, чтобы, проведя чрезъ точку A сѣкущую къ нимъ, получили на ней хорды, находящіяся въ отношеніи m къ n .

360. Чрезъ точку A , данную внутри круга O , провести хорду такъ, чтобы она въ этой точкѣ дѣлилась въ отношеніи m къ n .

361. Дана окружность O и въ ней хорда AB . Провести въ окружности хорду данной длины такъ, чтобы она хордою AB раздѣлилась въ отношеніи m къ n .

362. Даны два непересекающихся круга O и O' и между ними точка A . Провести чрезъ A сѣкущую BAC (B на окружности O , C на окружности O') такъ, чтобы отрѣзки AB и AC были въ отношеніи m къ n .

363. Между окружностями O и O' , касающимися внутренно въ точкѣ A , провести прямую, длиною a , такъ, чтобы она, по своемъ продолженіи, проходила чрезъ точку A .

364. Дана точка A и прямая KL . Провести изъ данной точки три прямыя, образующія между собою данные углы φ и ψ и отсѣкающія на данной прямой отрѣзки, находящіяся въ отношеніи m къ n .

365. Данъ секторъ AOB . Провести къ дугѣ его касательную такъ, чтобы отрѣзокъ ея, заключающійся между продолженіями радіусовъ OA и OB , дѣлился въ точкѣ касанія въ данномъ отношеніи m къ n .

366. Даны окружность O и двѣ точки A и B внѣ окружности. Найти на окружности такую точку, чтобы сумма квадратовъ разстояній отъ нея до данныхъ точекъ была максимум или минимум.

367. Даны двѣ точки A и B внутри окружности. Найти на окружности такую точку P , чтобы сумма квадратовъ PA и PB была наименьшая. При какомъ условіи задача будетъ неопредѣленною?

368. Найти геометрическое мѣсто точекъ, дѣлящихъ въ отношеніи m къ n прямыя, соединяющія данную точку A съ точками данной окружности O .

369. Дано основаніе треугольника по величинѣ и положенію и уголъ при вершинѣ. Найти геометрическое мѣсто пересѣченія медіанъ треугольника.

370. Чрезъ точку A данной окружности O проведемъ хорду AB

и на продолженіи ея возьмемъ такую точку M , чтобы $AB \cdot AM = k^2$, гдѣ k данная длина. Найти геометрическое мѣсто точекъ M .

371. Дана точка A и прямая XU ; соединимъ A съ какою-либо точкою B прямой XU и прямую AB раздѣлимъ въ точкѣ M такъ, чтобы $AM \cdot AB = k^2$, гдѣ k данная длина. Найти геометрическое мѣсто точекъ M .

372. Дана точка A и прямая XU . Проведемъ наклонную AB къ данной прямой и продолжимъ ее на такую длину BM , чтобы $AB \cdot AM = k^2$, гдѣ k данная длина. Найти геометрическое мѣсто точекъ M .

373. Данъ кругъ O и вѣ его точка A . Изъ A проведемъ сѣкущую ABC къ кругу (B и C на окружности) и чрезъ точки B и C касательныя, которыя пересѣкутся въ M . Найти геометрическое мѣсто точекъ M .

374. AB діаметръ данной окружности O . Прямая PQ , определенной длины, движется параллельно AB такъ, что середина ея на окружности. Найти геометрическое мѣсто пересѣченія прямыхъ AP и BQ , и прямыхъ AQ и BP .

375. Дана точка A на окружности O и въ нее вписанъ такой треугольникъ ABC , въ которомъ сумма квадратовъ сторонъ AB и AC постоянна. Найти геометрическое мѣсто серединъ BC .

376. Построить: 1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) $\sqrt{a^2 - b^2}$; 3) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; 4) $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$; 5) $\sqrt{2b^2 - a^2}$ и 6) $\sqrt{2a^2 + 3b^2}$, гдѣ a , b и данная длины.

377. Построить среднюю пропорціональную между a и b .

378. Данную прямую AB , равную a , продолжить на такую длину BC , чтобы средняя пропорціональная между AB и BC равнялась данной длинѣ b .

379. Данную прямую AB продолжить на такую длину BC , чтобы BC было среднимъ пропорціональнымъ между AB и AC .

380. Найти такую точку, чтобы отношеніе квадратовъ разстояній отъ нея до данныхъ точекъ A и B было m къ n .

381. Построить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ a и отношенію $m : n$ квадратовъ катетовъ.

382. Построить прямоугольный треугольникъ по отношенію $m : n$ квадратовъ катетовъ и высотѣ h , проведенной изъ вершины прямого угла.

383. Найти такую прямую, чтобы отношеніе квадратовъ ея п данной прямой a было равно отношенію m къ n .

384. Раздѣлить данную прямую a на такія двѣ части, чтобы сумма квадратовъ ихъ равнялась квадрату данной прямой k .

385. Раздѣлить данную прямую a на такія двѣ части, чтобы разность квадратовъ ихъ равнялась квадрату данной прямой k .

386. На данной прямой AB найти такую точку C , чтобы $AC^2 : BC^2 = m : n$, гдѣ m и n данныя числа.

387. Найти на продолженіи данной прямой AB такую точку C , чтобы $AC^2 : BC^2 = m : n$, гдѣ m и n данныя числа.

388. Черезъ двѣ данныя точки на окружности провести двѣ параллельныя хорды, которыхъ длины были бы въ отношеніи m къ n .

389. Дана прямая PQ и на ней точка K ; на PK и KQ , какъ діаметрахъ, описаны окружности. Провести изъ точки P прямую, пересекающую окружности такъ, чтобы хорды, заключенныя въ этихъ окружностяхъ, были равны.

390. Равнодѣлящая угла A въ треугольникѣ ABC пересекаетъ BC въ D . Найти на продолженіи BC такую точку E , чтобы $DE^2 = EB \cdot EC$.

391. Чрезъ точку A , данную на окружности O , проведемъ хорду AB и на продолженіи ея возьмемъ такую точку M , чтобы $AM \cdot BM = k^2$. Найти геометрическое мѣсто точекъ M .

392. Изъ точки A , взятой внѣ круга O , провести къ нему касательную, не опредѣляя положенія центра круга.

393. Данъ уголъ XAY и на его бокахъ AX и AY точки B и C . Описать окружность такъ, чтобы AB была касательною къ ней, а AC сѣкущею.

394. Даны точки: A , B и C . Провести окружность чрезъ точки A и B такъ, чтобы касательная къ ней изъ точки C была данной длины a .

395. Даны точки A , B и C . Провести окружность чрезъ точку A такъ, чтобы касательныя къ ней изъ точекъ B и C были данной длины a и b .

396. Изъ точки A , данной внѣ круга O , провести сѣкущую къ нему такъ, чтобы произведеніе ея внѣшней части на внутреннюю равнялось k^2 , гдѣ k данная длина.

397. Въ треугольникѣ ABC провести прямую BD (D на AC) такъ, чтобы $BD^2 = AD \cdot DC$.

398. Въ треугольникѣ ABC провести хорду DE (D на AB , E

на AC), параллельно данной прямой MN , такъ, чтобы эта хорда была среднею пропорціональною между AD и BD .

399. Построить: 1) $\sqrt{ab - cd}$; 2) $k\sqrt{\frac{2}{3}}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}c^2}$; 4) $\sqrt{2a^2 - 5ab + \frac{1}{4}b^2}$; 6) $k\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$; 7) $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$ и 8) $\sqrt[4]{a^4 + 3a^3b + 2b^4}$, гдѣ a , b , c и k данныя длины.

400. Построить двѣ прямыя, которыхъ дана сумма s и произведение k^2 .

401. Построить двѣ прямыя, которыхъ дана разность d и произведение k^2 .

402. Чрезъ точку A , данную внѣ круга O , провести къ нему сѣкущую такъ, чтобы она раздѣлилась окружностью круга въ отношеніи m къ n .

403. Раздѣлить прямую AB въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

404. На продолженіи данной прямой AB найти такую точку C , чтобы прямая AC въ точкѣ B дѣлилась въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

405. Изъ точки A , данной внѣ круга O , провести къ нему сѣкущую такъ, чтобы она раздѣлилась окружностью въ крайнемъ и среднемъ отношеніи и чтобы большій отрезокъ былъ внутри круга.

406. Построить равнобедренный треугольникъ по одной изъ равныхъ сторонъ b и въ которомъ уголъ при основаніи былъ бы вдвое болѣе угла при вершинѣ.

407. Построить равнобедренный треугольникъ по основанію a и въ которомъ уголъ при основаніи былъ бы вдвое болѣе угла при вершинѣ.

408. Раздѣлить прямой уголъ XAY на пять равныхъ частей.

409. Раздѣлить прямой уголъ XAY на пятнадцать равныхъ частей.

410. Даны прямыя MN и KL и точка A на KL . Описать окружность, которая проходила бы чрезъ точку A , касалась бы прямой MN и центръ ея лежалъ бы на прямой KL .

411. Описать окружность, которой центръ лежалъ бы на сторонѣ AY даннаго угла XAY и чтобы она, проходя чрезъ точку P , данную внутри угла, касалась другой его стороны.

412. Чрезъ конецъ A діаметра AB даннаго полукруга проведена хорда AC . Начертить полуокружность, проходящую чрезъ B ,

касающуюся хорды AC и которой центръ лежалъ бы на діаметрѣ даннаго полукруга.

413. Начертить окружность касающуюся сторонъ угла XAY и проходящую чрезъ точку P , данную внутри угла.

414. Начертить окружность, проходящую чрезъ данную точку A и касающуюся данныхъ прямыхъ MN и KL .

415. Начертить окружность, проходящую чрезъ двѣ данныя точки A и B и касающуюся данной прямой MN .

416. Данъ угола XAY и точка M на равнодѣлящей угла AZ . Построить равнобедренный треугольникъ, у котораго вершина была бы въ M , концы основанія лежали на бокахъ угла и периметръ равнялся $2p$.

417. Дана прямая XU и по одну сторону ея двѣ точки A и B . На прямой XU найти такую точку M , чтобы уголъ AMB былъ наибольшимъ.

418. Чрезъ точку P , данную внутри угла XAY , провести такъ сѣкущую, чтобы полученный треугольникъ имѣлъ наименьшій периметръ.

419. Начертить окружность, проходящую чрезъ двѣ данныя точки A и B и касающуюся данной окружности O .

420. На прямой XU даны точки A , B и C . Найти на прямой CZ перпендикулярной къ прямой XU , такую точку, чтобы сумма разстояній отъ нея до A и B равнялась $2a$.

421. Даны двѣ прямыя MN и KL и окружность O . Начертить такую окружность, которая касалась бы прямой MN , окружности O и центръ лежалъ бы на прямой KL .

422. Начертить окружность, проходящую чрезъ данную точку A и касающуюся данной прямой MN и данной окружности O .

423. Начертить окружность, касающуюся двухъ параллельныхъ прямыхъ MN и KL и окружности O , находящейся между ними.

424. Начертить окружность, касающуюся двухъ пересекающихсяъ прямыхъ MN и KL и данной окружности O .

425. Начертить окружность, касающуюся данной прямой MN и двухъ данныхъ окружностей O и O' .

426. Начертить окружность, проходящую чрезъ данную точку A и касающуюся двухъ данныхъ окружностей O и O' .

427. Начертить окружность, касающуюся трехъ данныхъ окружностей O , O' и O'' .

79 (28)

428. Описать окружность, касающуюся двух данных окружностей O и O' и одной из них въ данной на ней точкѣ A .

429. Описать окружность, касательную къ даннымъ окружностямъ O и O' такъ, чтобы прямая, соединяющая точки касанія, проходила чрезъ данную точку A .

430. Чрезъ двѣ данныя точки A и B провести окружность, пересекающую данную окружность O такъ, чтобы хорда пересѣченія проходила чрезъ данную точку M .

431. Описать окружность, касательную къ двумъ даннымъ окружностямъ O и O' такъ, чтобы прямая, соединяющая точки касанія, была данной длины a .

432. Описать окружность, касательную къ прямой KL въ данной на ней точкѣ A и пересекающую данную окружность O такъ, чтобы хорда пересѣченія была данной длины a .

433. Найти геометрическое мѣсто точекъ, разность квадратовъ разстояній отъ которыхъ до двухъ данныхъ точекъ A и B равнялась бы квадрату данной прямой a .

434. Найти геометрическое мѣсто точекъ, сумма квадратовъ разстояній отъ которыхъ до двухъ данныхъ точекъ A и B равнялась бы квадрату данной прямой a .

435. Описать окружность, проходящую чрезъ двѣ данныя точки A и B такъ, чтобы касательная къ ней изъ данной точки C была длиною a .

436. Описать окружность, проходящую чрезъ данную точку A такъ, чтобы касательныя, проведенныя къ ней изъ данныхъ точекъ B и C , равнялись a и b .

437. Начертить такую окружность, чтобы касательныя, проведенныя къ ней изъ точекъ A , B и C , равнялись a , b и c .

438. Провести окружность, дѣлящую пополамъ данную окружность O и касательную къ прямой KL въ данной на ней точкѣ A .

439. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, пересекающихъ двѣ данныя окружности O и O' подъ прямыми углами.

440. Найти геометрическое мѣсто центровъ окружностей, раздѣляющихъ пополамъ двѣ данныя окружности O и O' .

441. Провести окружность, раздѣляющую пополамъ три данныя окружности: O , O' и O'' .

442. Чрезъ данныя точки A и B провести окружность, дѣлящую пополамъ данную окружность O .

443. Прѣзь данную точку A провести окружность, пересѣкающую данныя окружности O и O' подѣ прямыми углами.

444. Описать окружность, пересѣкающую три данныя окружности O , O' и O'' подѣ прямыми углами.

445. Описать окружность, пересѣкающую окружность O пополамъ, а двѣ другія O' и O'' подѣ прямыми углами.

446. Описать окружность, пересѣкающую двѣ данныя окружности O и O' пополамъ, а третью O'' подѣ прямымъ угломъ.

447. Дана окружность O и на ней двѣ точки A и B . Найти на окружности такую точку, чтобы произведеніе разстояній отъ нея до A и B равнялось k^2 .

448. Построить треугольникъ по сторонѣ a , высотѣ h_a и произведенію k^2 двухъ другихъ сторонъ.

449. Найти центръ окружности помощію одного циркуля.

450. Найти на прямой KL такую точку, чтобы сумма разстояній отъ нея до двухъ данныхъ точекъ A и B равнялась данной прямой s .

451. Найти на прямой KL такую точку, чтобы разность разстояній отъ нея до двухъ данныхъ точекъ A и B равнялась данной прямой d .

452. Построить треугольникъ по основанію a , высотѣ h_a и суммѣ s (или разности d) двухъ другихъ сторонъ.

453. Дана точка A и двѣ окружности O и O' . Провести чрезъ данную точку такую окружность, которая касалась бы окружности O и пересѣкала пополамъ окружность O' .

454. Чрезъ точку M , данную внутри угла $ХАУ$, провести сѣкущую такъ, чтобы произведеніе отрѣзковъ ея, заключенныхъ между точкою M и боками угла, равнялось k^2 , гдѣ k данная длина.

455. Данъ уголъ $ХАУ$ и точка M внѣ его. Изъ точки M провести сѣкущую MBC (B на AX , C на $AУ$) такъ, чтобы $MB \cdot MC = k^2$, гдѣ k данная длина.

456. Данъ уголъ $ХАУ$ и точка M . Провести чрезъ точку M сѣкущую такъ, чтобы сумма отрѣзковъ на бокахъ угла, считая ихъ отъ вершины A до сѣкущей, была данная s .

457. Данъ уголъ $ХАУ$ и точка M . Провести чрезъ M сѣкущую такъ, чтобы разность отрѣзковъ на бокахъ угла, считая ихъ отъ A до сѣкущей, была данная d .

458. Чрезъ точку A пересѣченія двухъ окружностей O и O' провести сѣкущую такъ, чтобы сумма полученныхъ хордъ въ этихъ

кругахъ, умноженныхъ соответственно на данныя числа m и n , равнялась l .

459. Даны точки A и B и двѣ окружности O и O' . Провести параллельные радіусы OC и $O'D$ въ этихъ окружностяхъ такъ, чтобы углы CAO и DBO' были равны.

460. Въ окружностяхъ O и O' провести параллельные радіусы OC и $O'D$ такъ, чтобы они были видны подъ равными углами изъ данной точки A .

461. Чрезъ точку A , данную между кругами O и O' , провести сѣкущую ихъ такъ, чтобы полученные на ней хорды были равны.

462. Даны точки: A, B и C . Провести чрезъ точку C прямую такъ, чтобы произведение разстояній до нея отъ A и B было равно k^2 .

463. Даны пересѣкающіяся прямая: AB, AC и BC . Описать окружность, касающуюся BC въ данной на ней точкѣ D и чтобы концы діаметра лежали на прямыхъ AB и AC .

464. Даны прямая: AX, AY и AZ и сѣкущая ихъ MN . Провести прямую, параллельно MN , такъ, чтобы произведение отрезковъ ея между данными прямыми было равно k^2 .

465. Даны окружности O и O' и точка A . Провести къ окружностямъ двѣ параллельныя касательныя такъ, чтобы разстоянія отъ данной точки до касательныхъ были въ отношеніи m къ n .

466. Построить прямоугольный треугольникъ по длинѣ h перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу, и суммѣ s катетовъ.

467. Построить прямоугольный треугольникъ по длинѣ h перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу, и разности d катетовъ.

468. На кругломъ бильярдѣ поставленъ шаръ. По какому направленію ударить шаръ, чтобы онъ, ударившись два раза о стѣнки бильярда, пришелъ на то же мѣсто.

469. Найти геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія отъ которыхъ до данныхъ точекъ A и B были бы въ данномъ отношеніи.

470. A и B центры двухъ окружностей. Проведена прямая, параллельная AB , пересѣкающая окружность въ P и Q . Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія прямыхъ AP и BQ .

471. На данной прямой KL найти точку, разстоянія отъ которой до данныхъ точекъ A и B были бы въ отношеніи m къ n .

472. Найти точку, разстояніи отъ которой до данныхъ точекъ A , B и C были бы въ отношеніи $m:n:p$.

473. На діаметръ AB окружности O даны точки C и D по разнымъ сторонамъ центра. Найти на окружности такую точку M , чтобы радіусъ MO былъ равнодѣлящею угла CMD .

474. Дана прямая KL и точки A и B по разнымъ сторонамъ ея. Найти на прямой KL такую точку M , чтобы KL была равнодѣлящею угла AMB .

475. Построить треугольникъ по сторонамъ a , отношенію $m:n$ двухъ другихъ сторонъ и медианѣ m_a .

476. Даны прямая: MN и KL . Построить треугольникъ по сторонамъ c , отношенію $m:n$ двухъ другихъ сторонъ и чтобы данная сторона лежала на прямой MN , а противоположная ей вершина на прямой KL .

477. Найти геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстояній отъ которыхъ до данныхъ точекъ A и B было бы равно отношенію квадратовъ прямыхъ a и b .

478. На данной прямой KL найти точку, квадраты разстояній отъ которой до данныхъ точекъ A и B относились бы какъ данныя прямая a и b .

479. Найти геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе квадратовъ разстояній отъ которыхъ до данныхъ точекъ A и B было бы равно отношенію прямыхъ k и l .

480. Построить треугольникъ по углу A , противолежащей ему сторонѣ a и отношенію $k:l$ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ.

481. На прямой XY даны три точки: A , B и C . Найти геометрическое мѣсто точекъ M , для которыхъ $\angle AMB = \angle CMB$.

482. Даны прямая AB и CD по величинѣ и положенію. Найти такую точку M , чтобы треугольники AMB и CMD были подобны и при точкѣ M углы въ нихъ были бы равны.

483. Даны три концентрическія окружности O . Провести прямую, пересекающую ихъ въ точкахъ A , B и C такъ, чтобы $AB = BC$ (или $AB:BC = m:n$).

484. Даны три концентрическія окружности. Построить треугольникъ, подобный данному треугольнику ABC и котораго вершины лежали бы на этихъ окружностяхъ.

485. Данъ прямой уголъ XAY и на сторонѣ AY двѣ точки B и C . Найти на сторонѣ AX такую точку M , чтобы уголъ BMC былъ вдвое болѣе угла BCM .

486. На прямой XU даны два отрезка AB и $A'B'$. Найти геометрическое место точек, из которых эти отрезки были бы видны под равными углами.

487. Начертить круг, который из точек A , B и C был бы виден под данными углами: 2α , 2β и 2γ .

488. Найти геометрическое место точек, из которых два данные круга O и O' видны под равными углами.

489. Найти точку, из которой три данные круга: O , O' и O'' видны под равными углами.

490. На трех данных окружностях найти вершины такого треугольника, кот. бока были бы параллельны линиям центров.

491. Даны точки A , B и C . Провести через точки A и B окружность так, чтобы она из точки C была видна под данным углом φ .

492. Даны точки A , B и C . Провести через точку A окружность так, чтобы она была видна из точек B и C под углами φ и ψ .

493. Описать окружность, которой центр лежал бы на данной прямой KL и которая была бы видна из точек A и B под углами φ и ψ .

494. Дана окружность O и вне ее точки A и B . Найти на окружности такую точку M , чтобы хорда, соединяющая точки пересечения окружности с AM и BM , была параллельна AB .

495. Даны окружности O и O' , пересекающиеся в точках A и B . Проведем прямую, пересекающую окружность O в P и P' , а окружность O' в Q и Q' так, что $\angle PAP' = \angle QAQ'$. Найти геометрическое место точки T пересечения касательных, проведенных к окружностям в P и Q .

496. Окружности A и B пересекаются в M ; через M проведем произвольно прямую, пересекающую окружность A в R и окружность B в S ; продолжим SM до P так, чтобы $MP \cdot RS$ было постоянное. Найти геометрическое место точек P .

497. Описать окружность, проходящую через данную точку A , касающуюся данной окружности O и пересекающую другую данную окружность O' так, чтобы хорда пересечения проходила через данную точку G .

498. На боках угла PSQ даны точки M и N . Описать две окружности, касающиеся между собою и боков угла в точках

M и N , соответственно, и чтобы радіусы этихъ окружностей были въ отношеніи a къ b .

499. Данъ кругъ и внѣ его точки A и B . Найти на окружности круга такую точку M , чтобы хорда, соединяющая точки пересѣченія окружности съ прямыми AM и BM , была параллельна данной прямой KL .

500. Вписать въ кругѣ треугольникъ, котораго двѣ стороны проходили бы чрезъ двѣ данныя точки A и B , а третья была бы параллельна прямой CD .

501. Вписать въ окружности O треугольникъ, котораго стороны проходили бы чрезъ три данныя точки A , B и C .

502. Чрезъ точку O на равнодѣлящей угла XAY провести прямую такъ, чтобы часть ея между боками угла равнилась данной прямой a .

503. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы сумма квадратовъ разстояній отъ каждой изъ нихъ до трехъ вершинъ равносторонняго треугольника ABC была постоянна и равна k^2 .

504. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы сумма квадратовъ касательныхъ, проведенныхъ изъ каждой изъ нихъ къ даннымъ кругамъ O и O' была постоянна и равна k^2 .

505. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы разность квадратовъ касательныхъ, проведенныхъ изъ каждой изъ нихъ къ даннымъ кругамъ O и O' была постоянна и равна k^2 .

506. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы касательныя, проведенныя изъ каждой изъ нихъ къ даннымъ кругамъ O и O' , были равны между собою.

507. Найти точку, изъ которой касательныя, проведенныя къ тремъ даннымъ кругамъ O , O' и O'' , были бы равны.

508. Провести къ даннымъ кругамъ O и O' равныя касательныя, составляющія между собою уголъ, равный φ .

509. Изъ концовъ A и B данной прямой AB возставимъ перпендикуляры AX и BY , по одну сторону ея; пересѣчемъ эти перпендикуляры прямою CD (C на AX , D на AY) и изъ точки P , дѣлящей прямую AB такъ, что $AP \cdot BP = AC \cdot BD$, опустимъ перпендикуляръ PM на CD . Найти геометрическое мѣсто точекъ M .

510. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой-либо изъ нихъ на стороны даннаго треугольника, лежали на одной прямой.

511. Даны двѣ точки A и B . Найти геометрическое мѣсто точекъ M , удовлетворяющихъ условію: $m \cdot AM^2 + n \cdot BM^2 = l^2$, гдѣ m и n положительныя числа, а l — данная длина.

512. Даны двѣ точки A и B . Найти геометрическое мѣсто точекъ M , удовлетворяющихъ условію: $m \cdot AM^2 - n \cdot BM^2 = l^2$, гдѣ m и n положительныя числа, а l — данная длина.

513. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы касательныя, проведенныя изъ какой-либо изъ нихъ къ даннымъ окружностямъ O и O' , были въ отношеніи m къ n .

514. Найти въ треугольникѣ ABC такую точку P , чтобы сумма квадратовъ разстояній отъ нея до вершинъ треугольника была наименьшая.

С. Задачи на вычисленіе.

515. Найти четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ прямымъ, длиною въ 4 аршина, 3 фута и 2 сажени.

516. Найти среднюю пропорціональную между прямыми: $a=2,5$ аршина и $b=1\frac{1}{6}$ фута.

517. Въ треугольникѣ, у котораго основаніе равно $5\frac{3}{4}$ метра, проведена хорда, параллельно основанію, раздѣляющая другіе два бока въ отношеніи 5 къ 4, считая отъ вершины. Найти длину этой хорды.

518. Прямая, равная 4,5 фута, раздѣлена на такія три части, изъ которыхъ первая относится ко второй какъ 3 къ 2, а вторая къ третьей — какъ 4 къ 5. Найти эти части.

519. Въ треугольникѣ части одного бока, считая отъ вершины, суть: 1 сажень и 5 аршинъ, а другого — 7 аршинъ и 5 футовъ. Будетъ ли прямая, соединяющая точки дѣленія, параллельна третьему боку?

520. Въ треугольникѣ части одного бока суть: 0,2 сажени и 1 аршинъ, а другого бока: 1 сажень и 1 саж. + 2 арш. Будетъ ли прямая, соединяющая точки дѣленія, параллельна третьему боку?

521. Одинъ изъ боковъ треугольника раздѣленъ въ отношеніи 5 къ 9 и чрезъ точку дѣленія проведена прямая, параллельно основанію. Найти отрѣзки другого бока, длина котораго $8\frac{5}{6}$ аршина.

522. Одинъ изъ боковъ треугольника раздѣленъ въ отношеніи 2 къ 3 и чрезъ точку дѣленія проведена хорда, длиною въ 2,4 саж., параллельно другому боку. Найти длину того бока, которому проведена параллельна хорда.

523. Дана трапеція, въ которой параллельныя стороны длиною въ 2 саж. и 3 саж. и одна изъ непараллельныхъ сторонъ — въ 1,5 саж. Какъ велико продолженіе этой послѣдней стороны до точки встрѣчи ея съ продолженіемъ другой непараллельной стороны?

524. Въ треугольникѣ, у котораго основаніе равно 4 фут., а высота равна 5 арш., проведена хорда параллельно основанію, на разстояніи отъ него 1,5 аршина. Найти длину этой хорды.

525. Въ треугольникѣ, имѣющемъ основаніе, равное 5,6 фута, и высоту = 4 арш., вписанъ прямоугольникъ, котораго бока находятся въ отношеніи 5 къ 4. Найти стороны прямоугольника, когда извѣстно, что большая сторона его лежитъ на основаніи треугольника.

526. Неравныя стороны параллелограмма равны 4 футамъ и 5 футамъ; разстояніе же двухъ параллельныхъ сторонъ въ 4 фута равно 6 футамъ. Найти разстояніе между двумя другими сторонами.

527. Бока треугольника равны 3 арш., 4 арш. и 2 сажениамъ. Найти длины отрѣзковъ большаго бока, на которые онъ раздѣлится равнодѣлящаго угла, противоположащаго этому боку.

528. Два бока треугольника равны 6 арш. и 4 арш., а третій раздѣленъ, соотвѣственно, на части въ 5 аршинъ и 2 аршина. Будетъ ли прямая, соединяющая точку дѣленія съ противоположною вершиною, равнодѣлящею угла при этой вершинѣ?

529. Стороны треугольника равны: 4 арш., 5 арш. и 8 арш.; бокъ въ 8 арш. раздѣленъ на двѣ части, изъ коихъ часть, прилежащая къ большему боку, составляетъ $\frac{5}{8}$ всего бока. Будетъ ли прямая, соединяющая точку дѣленія съ противоположною вершиною, равнодѣлящею угла или нѣтъ?

530. Въ одномъ изъ угловъ треугольника проведена равнодѣлящая и отъ этого противоположный ему бокъ раздѣлился на двѣ части въ отношеніи 8 къ 9. Найти длину стороны, прилежащей къ большему отрѣзку, когда прилежащая сторона къ меньшему отрѣзку равна 12 метрамъ.

531. Периметръ треугольника $2p = 45\frac{10}{19}$ арш., а прямая, дѣлящая пополамъ одинъ изъ угловъ треугольника, раздѣляетъ противоположную сторону на части: $k = 13,5$ арш. и $l = 3,8$ арш. Найти остальные стороны треугольника.

532. Въ треугольникѣ дано основаніе $b = 9,8$ саж. и высота $h = 4,5$ саж. Найти высоту треугольника, подобнаго данному и у котораго основаніе $b' = 3\frac{4}{5}$ саж.

533. Вертикально поставленный шестъ длиною въ $a=3,6$ фута бросаетъ тѣнь въ $b=2\frac{2}{3}$ фута. Найти высоту предмета, который въ то же время, бросаетъ тѣнь въ $c=1,4$ фута.

534. Найти сторону квадрата, вписаннаго въ треугольникъ, у котораго основаніе $b=0,66$ метра и высота $h=1,54$ метра.

535. Въ треугольникѣ, у котораго основаніе равно $3\frac{1}{3}$ саж. и высота $=8$ арш., вписанъ квадратъ. Найти сторону этого квадрата.

536. Найти стороны параллелограмма, котораго периметръ $2p=8$ саж., а высоты: $h=3,5$ саж. и $h'=2\frac{1}{3}$ саж.

537. Найти гипотенузу прямоугольнаго треугольника, у котораго катеты: $a=2,2$ саж. и $b=5$ аршинъ.

538. Найти катетъ прямоугольнаго треугольника, у котораго гипотенуза равна $2\frac{1}{2}$ фута, а другой катетъ равенъ 5,6 дюйма.

539. Сторона равносторонняго треугольника равна 3 дюймамъ. Найти его высоту.

540. Стороны прямоугольника равны 0,2 фута и 5 дюймамъ. Найти его діагональ.

541. Периметръ квадрата равенъ 8,4 арш. Найти его діагональ.

542. Въ равностороннемъ треугольникѣ высота равна 5 футамъ. Найти его стороны.

543. Катетъ прямоугольнаго треугольника равенъ 4 футамъ, а прилежащій къ нему отрѣзокъ гипотенузы равенъ 2,5 фута. Найти другой отрѣзокъ гипотенузы и другой катетъ.

544. Гипотенуза прямоугольнаго треугольника равна 2,4 сажени и одинъ изъ отрѣзковъ ея равенъ 4 арш. Найти катеты.

545. Отрѣзки гипотенузы прямоугольнаго треугольника находятся въ отношеніи 2 къ 3 и одинъ изъ катетовъ, прилежащій къ меньшему отрѣзку, равенъ 4 футамъ. Найти другой катетъ и гипотенузу.

546. Отрѣзокъ гипотенузы прямоугольнаго треугольника равенъ 2 футамъ, а перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, равенъ 3 футамъ. Найти катеты.

547. Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу, когда извѣстно, что гипотенуза равна 2,3 сажени и одинъ изъ отрѣзковъ ея равенъ 5,6 фута.

548. Въ прямоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ катетовъ равенъ 3 футамъ и гипотенуза равна 1 саж. Какое послѣдуетъ измѣненіе съ другимъ катетомъ, когда, при той же величинѣ гипотенузы, увеличимъ данный катетъ на 2 фута?

549. Въ прямоугольномъ треугольникѣ, у котораго катеты 2 арш. и 3 арш., отодвинемъ гипотенузу на 1 аршинъ, оставляя ее параллельною прежнему положенію. На сколько увеличатся катеты?

550. Основаніе равнобедреннаго треугольника равно 6 футамъ, а высота 4 футамъ. Найти разстояніе отъ конца основанія до противоположнаго бока.

551. Въ равнобедренномъ треугольникѣ основаніе равно 6 аршинамъ, а разстояніе отъ конца основанія до противоположной стороны равно 4,8 аршина. Найти высоту треугольника.

552. Основаніе равнобедреннаго треугольника равняется 10 футамъ. Изъ точки, взятой на основаніи и отстоящей отъ одного изъ его концовъ на 3 фута, опущенъ перпендикуляръ на дальнюю сторону. Найти высоту треугольника, если длина перпендикуляра 5 футъ.

553. Въ треугольникѣ, котораго стороны суть: $a=2$ арш., $b=3$ арш. и $c=4$ арш., опущенъ перпендикуляръ изъ вершины на сторону c . Найти отрѣзки основанія.

554. Стороны треугольника равны 3, 4 и 5 аршинамъ. Найти уголъ, противолежащій большей сторонѣ.

555. Стороны треугольника равны 7, 10 и 12 футамъ. Узнать, уголъ, противолежащій большей сторонѣ, будетъ ли тупой или острый.

556. Разность квадратовъ катетовъ прямоугольнаго треугольника равна a^2 , а гипотенуза равна b . Найти катеты.

557. Сумма катетовъ прямоугольнаго треугольника равна $a=7$ аршинамъ, а гипотенуза $b=5$ аршинамъ. Найти катеты.

558. Периметръ равнобедреннаго треугольника $2p=20$ аршинамъ и высота $h=6$ аршинамъ. Найти его стороны.

559. Периметръ $2p$ прямоугольнаго треугольника $=12,5$ метра. Найти его стороны, когда катеты относятся, какъ $m=3$ къ $n=2$. Также, когда $2p=24$, $m=3$ и $n=4$.

560. Периметръ $2p$ прямоугольнаго треугольника $=10$ арш. и одинъ изъ катетовъ $a=4$ арш. Найти другой катетъ и гипотенузу.

561. Отношеніе гипотенузы къ большему катету равно отношенію $m=5$ къ $n=4$, а больший катетъ болѣе меньшаго на $a=3$ метрамъ. Найти катеты.

562. Гипотенуза болѣе меньшаго катета на $a=2$ саж., а онъ менѣе большаго катета на $b=2$ арш. Найти катеты.

563. Стороны треугольника равны a , b и c . Найти длину прямой, соединяющей середину бока c съ противоположною вершиною.

564. Катеты прямоугольнаго треугольника суть: $a=120$ арш. и $b=182$ арш. Найти длины отрезковъ гипотенузы, отсѣченныхъ на ней равноудляющею прямого угла.

565. Найти длину прямой, соединяющей вершину прямого угла съ серединою гипотенузы.

566. Найти периметръ ромба, у котораго діагонали: $a=0,9$ дюйма и $b=0,56$ дюйма.

567. Діагонали параллелограмма равны k и l и одинъ изъ боковъ равенъ a . Найти другой бокъ.

568. По сторонамъ a и діагоналямъ k и l параллелограмма, найти другую изъ неравныхъ сторонъ его.

569. По сторонамъ a и b и діагонали k параллелограмма, лежащей противъ остраго угла, найти другую діагональ его.

570. Найти высоту треугольника ABC , опущенную изъ вершины угла A , когда $AB=c$, $AC=b$ и $BC=a$.

571. Въ треугольникѣ даны двѣ стороны: $a=4$ футамъ и $b=7$ футамъ и уголъ между ними въ 45° . Найти третью сторону.

572. Въ треугольникѣ даны двѣ стороны: $a=1\frac{1}{2}$ арш. и $b=0,5$ арш. и уголъ между ними въ 60° . Найти третью сторону.

573. Въ треугольникѣ даны двѣ стороны: $a=1,2$ фута и $b=0,8$ фута и уголъ между ними въ 120° . Найти третью сторону съ точностью до 0,01.

574. Въ треугольникѣ даны двѣ стороны a и b и уголъ между ними въ 30° . Найти третью сторону.

575. Периметръ $2p$ прямоугольника $=1$ футу, а діагональ $b=5$ дюймамъ. Найти стороны прямоугольника.

576. Въ трапеціи даны основанія: b и d , гдѣ $b < d$, и діагонали k и l . Найти непараллельныя стороны трапеціи.

577. По сторонамъ трапеціи: a , b , c и d , гдѣ b и d — основанія и $b < d$, найти діагонали.

578. По сторонамъ четырехугольника, равнымъ: 5, $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{10}$ и 10, и діагонали, соединяющей концы первыхъ двухъ сторонъ, равной 10, найти другую діагональ.

579. Данъ многоугольникъ, у котораго стороны равны: 5, 6, 7 и 8 футамъ. Найти стороны другого многоугольника, подобнаго данному и у котораго меньшая изъ сторонъ равна 2 аршинамъ.

580. Периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ $m=5$ къ $n=3$ и одна изъ сторонъ a меньшаго многоугольника

равна 4 аршинамъ. Найти въ другомъ многоугольникѣ сторону, сходственную съ a .

581. Периметры подобныхъ многоугольниковъ суть: $P=20$ футовъ и $P_1=12$ футовъ, а одна изъ сторонъ большаго многоугольника $a=5$ аршинамъ. Найти сходственную сторону съ бокомъ a въ другомъ многоугольникѣ.

582. Одна изъ сторонъ многоугольника $a=2,4$ аршина и периметръ его $P=3$ саженьямъ. Найти периметръ другого многоугольника, подобнаго первому, и въ которомъ сходственная сторона съ a есть $b=1$ сажени.

583. Стороны треугольника суть: $a=3\frac{3}{4}$ фута, $b=2,4$ фута и $c=1\frac{23}{50}$ фута. Найти стороны другого треугольника, подобнаго данному, когда его периметръ $2p=16$ футовъ.

584. Периметры подобныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ равны: $2p=31,7$ саж. и $2p'=18,2$ саж.; основаніе перваго треугольника на $a=8,1$ арш. болѣе основанія втораго. Найти стороны треугольниковъ.

585. Сумма двухъ периметровъ подобныхъ многоугольниковъ $s=50$ аршинъ. Найти периметръ каждаго изъ нихъ, когда извѣстно, что сходственные стороны этихъ многоугольниковъ находятся въ отношеніи $m=6$ къ $n=5$.

586. Разность периметровъ подобныхъ многоугольниковъ равна $d=2$ саж. Найти периметръ каждаго изъ нихъ, когда извѣстно, что сходственные стороны этихъ многоугольниковъ находятся въ отношеніи $m=4$ къ $n=3$.

587. Въ кругѣ, у котораго діаметръ $d=5$ арш., проведена хорда $b=3$ арш. Найти разстояніе отъ центра круга до хорды.

588. Въ кругѣ, у котораго радіусъ $r=5$ метрамъ проведена хорда, на разстояніи $a=3$ метрамъ отъ центра. Найти длину хорды.

589. Хорда, длиною въ $a=2$ саженьямъ, отстоитъ отъ центра круга на $b=0,5$ саж. Найти діаметръ этого круга.

590. Изъ точки, отстоящей на $a=5$ аршинъ отъ окружности, которой радіусъ $r=4$ арш., проведена касательная. Найти длину этой касательной.

591. Изъ точки, отстоящей отъ центра круга на a , проведена къ нему касательная, длиною b . Найти радіусъ круга, когда $a=1,15$ саж. и $b=1,65$ арш.

592. Изъ точки A , взятой внѣ круга O радіуса r , проведена къ нему касательная, длиною b . Найти длину AO ; $b=3$ и $r=2,4$.

593. Найти въ кругѣ длину хорды, стягивающей концы двухъ радіусовъ $r=0,4$ арш., составляющихъ между собою уголъ въ 60° .

594. Найти въ кругѣ длину хорды, стягивающей концы двухъ радіусовъ $r=4$ футамъ, составляющихъ между собою уголъ въ 90° .

595. Найти въ кругѣ длину хорды, стягивающей концы двухъ радіусовъ $r=2$ метрамъ, составляющихъ между собою уголъ въ 30° .

596. Найти въ кругѣ длину хорды, стягивающей концы радіусовъ $r=4$ саж., составляющихъ между собою уголъ въ 150° .

597. Найти въ кругѣ длину хорды, стягивающей концы радіусовъ $r=2\frac{1}{3}$ дюйма, составляющихъ между собою уголъ въ 120° .

598. Въ кругѣ радіуса $r=5$ верш., проведена хорда $a=0,5$ верш.; на разстояніи $b=0,5$ верш. отъ хорды a , между центромъ и хордою, проведена другая хорда, параллельная первой. Найти длину другой хорды.

599. Хорда раздѣляетъ окружность на двѣ части въ отношеніи $m=5$ къ $n=4$. Найти величины угловъ, имѣющихъ вершину на окружности и опирающихся на данную хорду.

600. Двѣ хорды круга пересѣкаются такъ, что отрѣзки одной равны $a=4$ арш. и $b=0,5$ арш. и одинъ изъ отрѣзковъ другой хорды равенъ $c=2\frac{1}{6}$ арш. Найти другой отрѣзокъ.

601. Двѣ хорды круга, длиною въ $a=3,5$ фута и $b=4,1$ фута, пересѣкаются такъ, что одинъ изъ отрѣзковъ большей хорды равенъ $c=2\frac{7}{12}$ фута. Найти отрѣзки меньшей хорды.

602. Двѣ хорды пересѣкаются въ кругѣ такъ, что отрѣзки одной: $a=6$ саж. и $b=14$ саж., а отрѣзки другой относятся какъ $m=7$ къ $n=3$. Найти длину второй хорды.

603. Изъ конца діаметра $d=8$ дециметрамъ круга проведена хорда къ нему подъ угломъ въ 45° . Найти длину хорды, соединяющей другой конецъ хорды съ другимъ концомъ діаметра.

604. Въ кругѣ, изъ конца діаметра $d=0,8$ арш., проведена хорда къ діаметру подъ угломъ въ 30° . Найти длину хорды, соединяющей другой конецъ хорды съ другимъ концомъ діаметра.

605. Въ кругѣ, изъ конца діаметра, проведена хорда подъ угломъ въ 60° къ діаметру. Найти длину хорды, соединяющей другой конецъ хорды съ другимъ концомъ діаметра, когда радіусъ этого круга равенъ $1\frac{2}{3}$ фута.

606. Въ кругѣ радіуса $r=4\frac{1}{2}$ метра проведена хорда и чрезъ одинъ изъ ея концовъ проведенъ діаметръ, а изъ другого конца опущенъ на него перпендикуляръ, раздѣляющій діаметръ на двѣ части, изъ которыхъ прилежащая къ хордѣ равна $b=0,6$ метра. Найти длину хорды.

607. Хорда $a=3\frac{1}{2}$ саж. проведена перпендикулярно къ радіусу круга и дѣлитъ его на двѣ части, изъ которыхъ одна, прилежащая къ окружности, равна $c=0,2$ саж. Найти радіусъ круга.

608. Хорда, длиною въ $a=0,3$ арш., перпендикулярна къ радіусу круга и раздѣляетъ его въ отношеніи $m=8$ къ $n=9$. Найти діаметръ круга.

609. Въ кругѣ проведена хорда, перпендикулярно къ діаметру $d=4,5$ арш., раздѣляющая его на двѣ части, изъ коихъ одна $b=1\frac{1}{2}$ арш. Найти длину хорды.

610. Хорда, длиною $a=3$ дюймамъ, проведена перпендикулярно къ радіусу и раздѣляетъ его на двѣ части, изъ которыхъ лежащая между центромъ и хордою болѣе другой части на $b=1,5$ дюйма. Найти радіусъ круга.

611. Въ кругѣ, черезъ конецъ хорды, длиною въ $a=0,6$ фута, проведенъ діаметръ, на которомъ прилежащій отрѣзокъ къ хордѣ въ $m=8$ разъ менѣе другого отрѣзка. Найти радіусъ круга.

612. Въ кругѣ, черезъ одинъ конецъ хорды $a=2$ арш., проведенъ діаметръ, а изъ другого конца ея опущенъ перпендикуляръ на него; прилежащій отрѣзокъ діаметра къ хордѣ на $b=1$ саж. менѣе другого отрѣзка. Найти радіусъ круга.

613. Чрезъ конецъ діаметра круга проведены двѣ хорды, изъ которыхъ меньшая $a=5$ футамъ. Найти длину большей хорды, когда прилежащій отрѣзокъ къ меньшей хордѣ равенъ $b=1\frac{1}{2}$ фута, а къ большей равенъ $c=0,4$ сажени.

614. Въ кругѣ проведена хорда, перпендикулярно къ діаметру, въ разстояніи $a=1$ сажени отъ центра, и одинъ изъ ея концовъ соединенъ прямыми съ концами діаметра. Найти хорду, соответствующую большому отрѣзку діаметра, когда хорда, соответствующая меньшему отрѣзку, равна $b=6$ арш.

615. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены двѣ сѣкущія, изъ которыхъ одна равна $a=13,75$ фута и имѣетъ внутренній отрѣзокъ $b=6\frac{1}{2}$ фута. Найти длину другой сѣкущей, у которой внѣшній отрѣзокъ $c=360$ дюймамъ.

616. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая и касательная. Найти длину касательной, когда извѣстно, что внутреннѣй и внѣшнѣй отрѣзки сѣкущей суть: $a = \frac{11}{27}$ сажени и $b = 2\frac{7}{9}$ аршина.

617. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая $a = 2,2$ саж. и касательная $b = 3\frac{3}{4}$ саж. Найти внѣшнѣй отрѣзокъ сѣкущей.

618. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены двѣ сѣкущія, длиною въ $a = 5$ метрамъ и $b = 9$ метрамъ. Найти длину внѣшняго отрѣзка большей сѣкущей, когда внѣшнѣй отрѣзокъ меньшей равенъ $c = 3$ метрамъ.

619. Сумма двухъ сѣкущихъ, проведенныхъ изъ точки, взятой внѣ круга, равна $s = 8$ метрамъ; внѣшнѣй отрѣзокъ большей сѣкущей равенъ $a = 0,25$ метра, а внѣшнѣй отрѣзокъ меньшей равенъ $b = 1\frac{1}{2}$ метра. Найти длины сѣкущихъ.

620. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены сѣкущія, сумма которыхъ $s = 2,4$ арш. Найти длины сѣкущихъ, когда извѣстно, что отношеніе между ихъ внѣшними отрѣзками равно отношенію $m = 7$ къ $n = 5$.

621. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены касательная и сѣкущая. Найти длины сѣкущей и касательной, когда извѣстно, что сѣкущая болѣе касательной на $a = 2,5$ дюйма и что внутреннѣй отрѣзокъ сѣкущей $b = 3$ дюймамъ.

622. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены сѣкущія длиною $a = 3,5$ арш. и $b = 5$ арш. Найти длины внутреннихъ отрѣзковъ сѣкущихъ, когда извѣстно, что внѣшнѣй отрѣзокъ большей сѣкущей болѣе на $c = 3\frac{1}{2}$ арш. внѣшняго отрѣзка меньшей.

623. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены сѣкущія длиною въ $a = 2$ саж. и $b = 5$ арш. Найти отрѣзки сѣкущихъ, когда извѣстно, что отношеніе внѣшняго отрѣзка большей сѣкущей къ внутреннему отрѣзку меньшей равно отношенію $m = 3$ къ $n = 2$.

624. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены двѣ сѣкущія, изъ которыхъ одна имѣетъ отрѣзки: внѣшнѣй $a = 0,5$ арш. и внутреннѣй $b = 2,5$ саж., а у другой внѣшнѣй отрѣзокъ болѣе внутренняго на $c = 1$ сажени. Найти длину второй сѣкущей.

625. Хорды круга, длиною въ $a = 7$ арш. и $b = 5,75$ арш., продолжены до ихъ встрѣчи. Найти продолженіе меньшей хорды, когда продолженіе большей хорды равно $c = 2\frac{1}{2}$ фута.

626. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая и кас-

тельная. Найти длину сѣкущей, когда внутренній ея отрѣзокъ $a=3,2$ фута и касательная $b=5$ футамъ.

627. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены касательная и сѣкущая, внутренняя часть которой относится къ касательной, какъ $m=3$ къ $n=2$; внѣшняя же часть сѣкущей равна $a=1,5$ фута. Найти длины сѣкущей и касательной.

628. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая и касательная, разность между которыми $a=2,5$ саж. Найти длины сѣкущей и касательной, когда извѣстно, что разность между внѣшнимъ и внутреннимъ отрѣзками сѣкущей равна $b=2$ сажениамъ.

629. Найти длины сѣкущихъ, проведенныхъ изъ точки, взятой внѣ круга, когда извѣстно, что сумма внѣшнихъ отрѣзковъ равна $a=2,4$ метра, сумма внутреннихъ равна $b=1\frac{5}{8}$ метра и отношеніе сѣкущихъ равно отношенію $m=6$ къ $n=4$.

630. Найти длины сѣкущихъ, проведенныхъ къ кругу изъ точки, взятой внѣ его, когда извѣстно, что разность сѣкущихъ равна $a=0,65$ аршина; сумма внутреннихъ отрѣзковъ равна $b=4$ аршинамъ и отношеніе внѣшняго отрѣзка большей сѣкущей къ внутреннему отрѣзку меньшей равно отношенію $m=5$ къ $n=4$.

631. Найти радіусъ круга, касающагося другого даннаго круга радіуса r и данной прямой. въ данной на пей точкѣ, когда извѣстно, что центръ даннаго круга отстоитъ отъ данной прямой на a и что данная точка отстоитъ на b отъ основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ центра даннаго круга на данную прямую.

632. Найти радіусъ круга, касающагося данной прямой и даннаго круга радіуса r въ точкѣ, данной на его окружности, отстоящей отъ данной прямой на b , и когда еще извѣстно, что центръ даннаго круга отстоитъ отъ данной прямой на a .

633. По даннымъ радіусамъ R и r двухъ пересекающихся окружностей и общей ихъ хордѣ a , найти длину прямой, соединяющей центры окружностей.

634. Даны двѣ пересекающіяся окружности радіусовъ R и r . Найти длину ихъ общей хорды, когда извѣстно, что разстояніе между центрами окружностей равно a .

635. Даны два круга, у которыхъ радіусы R и r ($R>r$), и разстояніе между центрами равно a . Найти разстояніе центра меньшаго круга до точки пересѣченія общей къ нимъ касательной съ линіей центровъ.

636. Къ кругамъ радіусовъ R и r проведена общая касательная. Найти длину касательной, заключенной между точками касанія, когда извѣстно, что разстояніе между центрами равно a .

637. Даны окружности O и O' радіусовъ r и R , касающихся другъ друга въ A ; проведемъ діаметръ AB въ окружности O и черезъ B касательную къ ней. Найти радіусъ окружности, касающейся данныхъ окружностей и касательной.

638. Пусть r и r_1 —радіусы круговъ, касающихся прямой AB въ точкѣ C , и лежащихъ по разнымъ сторонамъ ея; R —радіусъ круга, касающагося ихъ обоихъ. Найти длину хорды круга радіуса R , полученной на прямой AB .

639. Найти діAGONАЛИ вписаннаго въ кругѣ четырехугольника, у котораго стороны: $a=3$ арш., $b=4$ арш., $c=5$ арш. и $d=2$ саж.

640. Данъ вписанный въ кругъ четырехугольникъ $ABCD$, котораго стороны суть: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и $DA=d$; продолжимъ стороны BC и AD до ихъ встрѣчи въ точкѣ E . Найти длины прямыхъ AE и BE .

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Теоремы и задачи на правильные многоугольники и окружность круга.

А. Теоремы.

1. Если въ правильномъ многоугольникѣ $ABCD\dots$, гдѣ O центръ многоугольника, продолжимъ бока AB и CD до пересѣченія въ точкѣ Q , то получимъ такой четырехугольникъ $AQCO$, который можно вписать въ кругъ.

2. Если углы равносторонняго шестугольника равны черезъ одинъ, то въ него можно вписать кругъ.

3. Если $ABCDE$ пятиугольникъ, описанный около круга, и F точка касанія бока AB , то $2AF=(AB+AE+CD)-(BC+DE)$.

4. ДіAGONАЛИ, проведенныя изъ вершинъ правильнаго пятиугольника, раздѣляютъ уголъ при этой вершинѣ на три равныя части.

5. Доказать, что сумма угловъ: ABE , BCA , CDB , DEC и EAD въ правильномъ пятиугольникѣ $ABCDE$ равна двумъ прямымъ.

6. Если въ пятиугольникѣ съ равными сторонами три послѣдовательныхъ угла равны, то пятиугольникъ будетъ правильнымъ.

7. Если въ правильномъ пятиугольникѣ $ABCDE$ проведемъ діагонали AC и BD пересѣкающіяся въ F , то $AC = AB + BF$.

8. $ABCDE$ правильный пятиугольникъ, вписанный въ окружность O радіуса R , и P середина дуги AB . Показать, что $AP + R = PC$.

9. Въ правильномъ пятиугольникѣ, двѣ пересѣкающіяся діагонали дѣлятъ другъ друга въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

10. Разность квадратовъ діагонали и стороны правильного пятиугольника равна ихъ произведенію.

11. Соединивъ черезъ одну вершину правильного пятиугольника, или продолживъ его бока черезъ одну, получимъ въ пересѣченіи прямыхъ, внутри или внѣ даннаго многоугольника, другой правильный пятиугольникъ.

12. Доказать, что можно сложить безъ просвѣта одинакіе правильные треугольники, равно какъ и одинакіе квадраты, равно какъ и одинакіе правильные шестиугольники. Доказать, что этого невозможно сдѣлать какъ для правильныхъ пятиугольниковъ, такъ и для всѣхъ правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ сторонъ свыше шести.

13. Доказать, что можно сложить безъ просвѣта квадраты и правильные восьмиугольники, при одинаковой длинѣ боковъ; равно какъ правильные треугольники и правильные двѣнадцатугольники, при одинаковой длинѣ боковъ; равно какъ правильные десятиугольники и правильные пятиугольники, при одинаковой же длинѣ боковъ.

14. ABC и $A'B'C'$ два правильныхъ треугольника, вписанныхъ въ кругъ $AA'BB'CC'$, котораго центръ O . Стороны ихъ пересѣкаются попарно: BC и $B'C'$ въ M , CA и $C'A'$ въ N , AB и $A'B'$ въ P . Показать, что треугольникъ MNP правильный.

15. Доказать, что равносторонній многоугольникъ, вписанный въ кругъ, будетъ правильный.

16. Доказать, что равносторонній многоугольникъ, описанный около круга, будетъ правильный, если имѣть нечетное число сторонъ.

17. Доказать, что равноугольный многоугольникъ, вписанный въ кругъ, будетъ правильный, если имѣть нечетное число сторонъ.

18. Доказать, что равноугольный многоугольникъ, описанный около круга, будетъ правильный.

19. Если вписанная и описанная окружности около данного многоугольника концентрические, то многоугольник правильный.

20. Высота равносторонняго треугольника равна боку правильного треугольника, вписаннаго въ кругъ, котораго діаметръ равенъ сторонѣ даннаго треугольника.

21. Данъ правильный треугольникъ ABC , вписанный въ кругъ, и изъ его вершины опущены перпендикуляры: AA' , BB' и CC' на діаметръ круга. Показать, что разстояніе отъ центра круга до основанія одного изъ перпендикуляровъ будетъ равно суммѣ или разности разстояній центра до основаній двухъ другихъ перпендикуляровъ, смотря потому основаніе перваго перпендикуляра лежитъ ли однимъ отъ центра круга или вѣтъ.

22. Сумма квадратовъ разстояній вершинъ правильного треугольника до какой-нибудь точки окружности, описанной изъ центра вписаннаго круга въ этотъ треугольникъ, постоянна.

23. Если $ABCP$ и $A'B'C'P'$ будутъ двѣ концентрическія окружности, въ которыхъ вписаны правильные треугольники: ABC и $A'B'C'$, то $AP^2 + BP^2 + CP^2 = A'P'^2 + B'P'^2 + C'P'^2$.

24. Бокъ правильного звѣздчатаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ, равенъ боку правильного десятиугольника, вписаннаго въ этотъ же кругъ, сложенному съ радіусомъ круга.

25. Пусть AB и AC бока правильнаго пятиугольника и десятиугольника, вписанныхъ въ кругъ, котораго центръ O : проведемъ равнодѣлящую угла AOC до пересѣченія съ AB въ точкѣ D . Показать, что треугольники ABC и ACD подобны, такъ же какъ и треугольники AOB и DOB , и что $AB^2 = AC^2 + AO^2$.

26. Въ данную окружность O вписать правильный шестиугольникъ $ABCDEF$. Начертимъ окружность M , проходящую чрезъ A и B и пересѣкающую окружность круга O подъ прямымъ угломъ; начертимъ еще окружность N , проходящую чрезъ A и C и пересѣкающую данную окружность подъ прямымъ угломъ. Показать, что діаметръ окружности N вътрое болѣе діаметра окружности M .

27. Если AB , BC и CD стороны правильнаго пятиугольника $ABCDE$, то окружность, касающаяся AB и CD въ B и C , проходитъ черезъ центръ окружности, вписанной въ пятиугольникъ.

28. Проведемъ въ кругъ два взаимно перпендикулярные діаметра AOB и COF ; изъ D середины OC опишемъ дугу радіусомъ DA , которая пересѣчетъ діаметръ CF въ точкѣ E . Доказать, что отрѣзки

OE и AE будутъ равны бокамъ правильныхъ десятиугольника и пятиугольника, вписанныхъ въ этотъ же кругъ.

29. Если $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ вершины правильного многоугольника, описаннаго около круга и P точка на окружности круга между точками A_1 и A_{2n+1} , то

$$PA_1 + PA_3 + PA_5 + \dots = PA_2 + PA_4 + PA_6 + \dots$$

30. Означимъ буквами p и P периметры вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ того же числа сторонъ и буквами p' и P' периметры вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ съ двойнымъ числомъ сторонъ. Показать, что

$$P' = \frac{2Pp}{P+p} \quad \text{и} \quad p' = \sqrt{P' \cdot p}.$$

31. Пусть m означаетъ отношеніе периметровъ вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ того же числа сторонъ, а m' — отношеніе периметровъ вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ съ двойнымъ числомъ сторонъ. Показать, что

$$m' = \sqrt{\frac{m+1}{2}}.$$

32. Периметры вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ о n , $2n$ и $4n$ сторонахъ суть: p , p' и p'' . Показать, что $p''^2 = \frac{2p'^3}{p+p'}$.

33. Означимъ буквами r и R радіусы вписаннаго и описаннаго круговъ для даннаго правильнаго многоугольника, а чрезъ r' и R' радіусы вписаннаго и описаннаго круговъ для правильнаго многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ и имѣющаго одинаковый периметръ съ первымъ. Показать, что $r' = \frac{1}{2}(R+r)$ и $R' = \sqrt{Rr}$.

34. Означимъ буквами R , R' и R'' радіусы описанныхъ круговъ около изопериметрическихъ*) правильныхъ многоугольниковъ о n , $2n$ и $4n$ сторонахъ. Показать, что $R''^2 = \frac{R'^2(R+R')}{2R}$.

35. Пусть r и R означаютъ радіусы вписаннаго и описаннаго круговъ для даннаго правильнаго многоугольника, а r' и R' радіусы вписаннаго и описаннаго круговъ для правильнаго многоугольника съ двойнымъ числомъ сторонъ и изопериметрическаго съ первымъ. Показать, что $R' - r' < \frac{1}{4}(R - r)$.

*) Одинаковаго периметра.

36. Пусть p и P означают периметры вписанного и описанного правильных многоугольников одинаковаго числа сторонъ, а p' и P' периметры вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ около того же круга, но съ двойнымъ числомъ сторонъ. Показать, что $P' - p' < \frac{1}{4}(P - p)$.

37. Показать, что π содержится между 3 и 4.

38. Показать, что окружность, описанная около правильного многоугольника о n сторонахъ, заключается между na и $(n+1)a$, гдѣ a сторона даннаго многоугольника.

39. Показать, что

$$\frac{\pi}{2} = \text{предѣлу } \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$$

В. Задачи на построене.

Въ кругъ радіуса R вписать правильный многоугольникъ (40—49):

40. Квадратъ.

41. Шестиугольникъ.

42. Треугольникъ.

43. Десятиугольникъ,

44. Пятиугольникъ.

45. Пятнадцатугульникъ.

46. Восьмугульникъ, шестнадцатугульникъ... и вообще $4n$ -угульникъ, гдѣ n цѣлое число.

47. Двѣнадцатугульникъ, двадцатичетыреугольникъ... и вообще $6n$ -угульникъ, гдѣ n цѣлое число.

48. Двадцатугульникъ, сорокаугольникъ и т. д.

49. Тридцатугульникъ, шестидесятугульникъ и т. д.

Описать около круга радіуса R правильный многоугольникъ (50—55):

50. Треугольникъ.

51. Квадратъ.

52. Пятиугольникъ.

53. Шестиугольникъ.

54. Восьмугульникъ.

55. Десятиугольникъ.

56. Вписать въ кругъ звѣздчатый правильный пятиугольникъ.

57. Вписать въ кругъ звѣздчатый правильный десятиугольникъ.

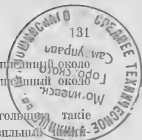
58. На данной прямой построить правильный шестугульникъ.

59. На данной прямой построить правильный восьмугульникъ.

60. На данной прямой построить правильный пятиугольникъ.

61. На данной прямой построить правильный десятиугольникъ.

62. Данъ правильный многоугольникъ $ABCD...$, вписанный въ кругъ O . Построить правильный многоугольникъ, описанный около круга и съ тѣмъ же числомъ сторонъ,



63. Данъ правильный многоугольникъ $ABCD...$, описанный около круга O . Построить правильный многоугольникъ, описанный около того же круга, но съ двойнымъ числомъ сторонъ.

64. Отрѣзать при вершинахъ правильного треугольника такіе треугольники, чтобы оставшаяся часть была правильнымъ угольникомъ.

65. Отрѣзать при вершинахъ квадрата такіе треугольники, чтобы оставшаяся часть квадрата была правильнымъ восьмиугольникомъ.

66. Отрѣзать при вершинахъ правильного пятиугольника такіе треугольники, чтобы оставшаяся часть была правильнымъ десятиугольникомъ.

67. Вписать въ квадратъ $ABCD$ правильный восьмиугольникъ.

68. Въ правильный пятиугольникъ $ABCDE$ вписать квадратъ.

69. По данному боку AB правильного многоугольника $ABCD...$ о n сторонахъ, построить бокъ правильного многоугольника изопериметрическаго съ даннымъ о $2n$ сторонахъ.

70. Начертить окружность, вдвое болѣе данной.

71. Начертить окружность, въ семь разъ меньшую данной.

С. Задачи на вычисленіе.

Въ задачахъ отъ 72 до 127-ой r означать радіусъ круга; a_n и a_n — сторону и апофему правильного многоугольника о n сторонахъ, вписаннаго въ этотъ кругъ; b_n — сторону правильного многоугольника о n сторонахъ, описаннаго около того же круга.

- | | |
|--|--|
| 72. Дано: $r = 2\frac{1}{3}$; найти a_6 . | 73. Дано: $r = 1,2$; найти a_3 . |
| 74. Дано: $r = 0,5$; найти a_6 . | 75. Дано: $r = 8$; найти a_{10} . |
| 76. Дано: $r = 10$; найти a_{12} . | 77. Дано: $r = 1\frac{1}{3}$; найти a_8 . |
| 78. Дано: $r = 1$; найти a_{10} . | 79. Дано: $r = 0,25$; найти a_{20} . |
| 80. Дано: $r = \frac{1}{3}$; найти a_6 . | 81. Дано: $r = 1,5$; найти b_6 . |
| 82. Дано: $r = 0,5$; найти b_3 . | 83. Дано: $r = \frac{2}{7}$; найти b_4 . |
| 84. Дано: $r = 3$; найти b_{10} . | 85. Дано: $r = 0,45$; найти b_{12} . |
| 86. Дано: $r = 0,5$; найти b_6 . | 87. Дано: $r = 7\frac{5}{9}$; найти a_3 . |
| 88. Дано: $r = 0,8$; найти a_4 . | 89. Дано: $r = 1\frac{5}{6}$; найти a_6 . |
| 90. Дано: $r = 2$; найти a_8 . | 91. Дано: $r = 4$; найти a_{10} . |
| 92. Дано: $r = 0,4$; найти a_5 . | 93. Дано: $a_6 = 15$; найти r . |
| 94. Дано: $a_3 = 1,8$; найти r . | 95. Дано: $a_4 = \frac{8}{15}$; найти r . |
| 96. Дано: $a_{10} = 2$; найти r . | 97. Дано: $a_8 = 1,2$; найти r . |

98. Дано: $a_5 = 0,2$; найти r . 99. Дано: $b_3 = 3,6$; найти r .
 100. Дано: $b_6 = 20$; найти r . 101. Дано: $b_{10} = 5$; найти r .
 102. Дано: $b_8 = 1,4$; найти r . 103. Дано: $b_5 = 2$; найти r .
 104. Дано: $a_3 = 5,5$; найти r . 105. Дано: $a_4 = \frac{5}{6}$; найти r .
 106. Дано: $a_6 = 1,8$; найти r . 107. Дано: $a_8 = 5$; найти r .
 108. Дано: $a_{10} = 1$; найти r . 109. Дано: $a_4 = 3$; найти a_6 .
 110. Дано: $a_4 = 1\frac{1}{3}$; найти a_3 . 111. Дано: $a_4 = 0,2$; найти b_3 .
 112. Дано: $a_4 = 2$; найти a_8 . 113. Дано: $a_3 = 1\frac{1}{3}$; найти a_{10} .
 114. Дано: $b_4 = 2,5$; найти a_8 . 115. Дано: $a_4 = 0,5$; найти b_8 .
 116. Дано: $a_8 = 4$; найти a_4 . 117. Дано: $a_8 = 4$; найти a_3 .
 118. Дано: $a_{12} = 3$; найти a_6 . 119. Дано: $b_3 = 0,12$; найти b_6 .
 120. Дано: $b_4 = 0,5$; найти b_8 . 121. Дано: $b_6 = 2\frac{2}{3}$; найти b_3 .
 122. Дано: $b_8 = 3$; найти b_4 . 123. Дано: $a_5 = 0,2$; найти a_{10} .
 124. Дано: $a_{10} = 2$; найти a_5 . 125. Дано: $b_5 = 2$; найти b_{10} .
 126. Дано: $a_5 = 0,5$; найти b_{10} . 127. Дано: $a_{10} = 2$; найти b_{20} .
 128. Найти бока правильного пятнадцатигульника, вписанного в кругъ радіуса $r = 4$ саж.
 129. Найти діагональ правильного пятиугольника, вписанного в кругъ радіуса $r = 0,2$ фута.
 130. Даны радіусы r и R круговъ, вписанного и описанного около правильного многоугольника о n сторонахъ. Найти радіусы r' и R' круговъ, вписанного и описанного около правильного многоугольника того же периметра, но о $2n$ сторонахъ.
 131. Даны периметры p и p' двухъ вписанныхъ в кругъ правильныхъ многоугольниковъ о n и $2n$ сторонахъ. Найти периметръ вписанного в томъ же кругъ правильного многоугольника о $4n$ сторонахъ.
 132. Даны радіусы R и R' двухъ круговъ, описанныхъ около изопериметрическихъ правильныхъ многоугольниковъ о n и $2n$ сторонахъ. Найти радіусъ описанного круга около правильного многоугольника о $4n$ сторонахъ и изопериметрическаго съ данными.
 133. На діаметрѣ AB даннаго круга O построимъ равносторонній треугольникъ CAB ; раздѣлимъ AB на n равныхъ частей и чрезъ точку D , конецъ второго дѣленія, и точку C проведемъ прямую до пересѣченія съ окружностью в точкѣ F . Найти длину хорды AF . Разсмотримъ частные случаи, когда $n=3$, $n=4$ и $n=6$.
 134. Найти длину окружности, когда радіусъ равенъ: 1) $0,8$ саж., а $\pi = 3,14$; 2) 1 арш. 12 вершк., а $\pi = \frac{22}{7}$; 3) $1,33$ метра, а $\pi = \frac{22}{7}$; и 4) $9,4$ арш. съ точн. до $0,001$.

135. Найти радіусъ окружности, кот. длина равна: 1) 3,3 арш., а $\pi = \frac{22}{7}$; 2) 10 футамъ, а $\pi = 3,14$; 3) 0,4 метра, а $\pi = 3,14$; 4) $11\frac{5}{12}$ саж., а $\pi = \frac{355}{113}$.

136. Градусъ окружности равенъ a . Найти радіусъ этой окружности. 1) $a = 44$ саж., а $\pi = \frac{22}{7}$; 2) $a = 0,08$ фута, а $\pi = 3,14$.

137. Найти длину дуги: 1) въ 60° при $r = 1,8$ арш. и $\pi = 3,14159$; 2) въ 72° при $r = 3\frac{1}{2}$ фута и $\pi = \frac{355}{113}$; 3) въ $172^\circ 30'$ при $r = 0,24$ саж. и $\pi = 3,14$; 4) въ $324^\circ 22' 30''$ при $r = 19,2$ метра и $\pi = 3,14$.

138. Найти число градусовъ, минутъ и секундъ въ дугѣ, кот. 1) длина $= 41\frac{13}{12}$ арш., радіусъ $= 80$ саж. и $\pi = 3,14$; 2) длина $= 7\frac{1}{16}$ метра, радіусъ $= 36$ дециметр. и $\pi = \frac{22}{7}$; 3) длина $= 3\frac{2}{3}$ фута, радіусъ $= 4\frac{1}{12}$ фута и $\pi = \frac{22}{7}$.

139. Найти радіусъ дуги: 1) въ 105° , если ея длина $= 15,4$ фута и $\pi = \frac{22}{7}$; 2) въ $22^\circ 30'$, когда ея длина $= 4,71$ метра и $\pi = 3,14$ и 3) въ $5^\circ 37' 30''$, когда ея длина $= 6\frac{3}{2}$ саж. и $\pi = \frac{22}{7}$.

140. Найти число градусовъ, минутъ и секундъ въ дугѣ, кот. отношеніе къ радіусу равно: 1) 0,44 и $\pi = \frac{22}{7}$; 2) $\frac{157}{61}$ и $\pi = 3,14$; 3) 6 и $\pi = \frac{22}{7}$.

141. Найти число градусовъ, минутъ и секундъ въ дугѣ, равной радіусу.

142. Найти круговую мѣру угла съ точн. до 0,0001: 1) въ 30° ; 2) въ $143^\circ 28'$; 3) въ $36''$.

143. Въ кругѣ радіуса r вписанъ уголь α . Найти длину дуги, на кот. онъ опирается: 1) $r = 12$ фут., $\alpha = 70^\circ$ и $\pi = 3,14159$; 2) $r = 4\frac{5}{11}$ саж., $\alpha = 120^\circ 30'$ и $\pi = \frac{22}{7}$; 3) $r = 1000$ метрамъ, $\alpha = 20^\circ 10''$ и $\pi = 3,14159$.

144. Въ окружности радіуса $r = 1\frac{5}{9}$ арш. вписанъ уголь, опирающійся на дугу $s = 1,4$ арш. Найти уголь. $\pi = \frac{22}{7}$.

145. Найти радіусъ окружности, которая въ $m = 4$ разъ болѣе окружности радіуса $r = 2,75$ сажени. $\pi = 3,14$.

146. Окружность болѣе діаметра на $a = 12,1$ фута. Найти длину окружности. $\pi = \frac{355}{113}$.

147. Найти радіусъ окружности, равной суммѣ окружностей радіусовъ: $r = 1,25$ фута, $r_1 = 3\frac{2}{12}$ фута и $r_2 = 0,5$ сажени.

148. Если радіусъ $r = 2$ арш. данной окружности увеличимъ на $a = 12$ вершкамъ, то на сколько увеличится окружность? $\pi = \frac{22}{7}$.

149. Если уменьшимъ радіусъ $r = 3,6$ окружности въ $m = 3$ раза, то на сколько уменьшится эта окружность? $\pi = 3,14$.

150. Минутная стрѣлка башенныхъ часовъ имѣетъ въ длину $3\frac{1}{2}$ фута. Какой путь пройдетъ конецъ ея въ сутки? $\pi = \frac{22}{7}$.

151. Описаны двѣ концентрическія окружности: одна длиною въ 1 арш. 9 вершк., а другая имѣетъ діаметръ въ 4 вершка. Найти разстояніе между окружностями.

152. Въ кругломъ бассейнѣ наружная стѣна длиною 6 саж. 1 арш., а внутренняя — 5 саж. 2 арш. Найти толщину стѣнки. $\pi = \frac{22}{7}$.

153. Данную прямую раздѣлить на такія три части, чтобы окружности, описанныя на нихъ, какъ діаметрахъ, были въ отношеніи $m : n : p$. $m=1$, $n=3$ и $p=5$.

154. Сумма двухъ окружностей равна $a=8,8$ саж., а разность ихъ радіусовъ равна $b=2$ арш. Найти радіусы окружностей. $\pi = \frac{22}{7}$.

155. Окружности, у которыхъ сумма радіусовъ равна $b=4\frac{1}{6}$ фута, относятся какъ $m=7$ къ $n=3$. Найти радіусы окружностей.

156. Разность двухъ окружностей равна $a=2\frac{1}{12}$ вершка, а отношеніе радіусовъ равно отношенію $m=42$ къ $n=17$. Найти длины окружностей.

157. Прямую $a=3\frac{7}{15}$ метра раздѣлить на такія двѣ части, чтобы разность полуокружностей, описанныхъ на этихъ частяхъ, какъ діаметрахъ, была равна окружности радіуса $r=1,3$ метра.

158. На катетахъ a и b прямоугольнаго треугольника, какъ діаметрахъ, начерчены окружности. Найти длину окружности, описанной на гипотенузѣ. $a=2,4$ метра, $b=3,2$ метра и $\pi=3,14$.

159. Разность между дугою въ 90° и соответствующей хордою равна $a=3,2$ фута. Найти радіусъ дуги. $\pi=3,14$.

160. Найти длину окружности, кот. радіусъ равенъ боку квадрата, вписаннаго въ окружность радіуса $r=1\frac{3}{11}$ фута. $\pi = \frac{22}{7}$.

161. Найти длину окружности, кот. радіусъ равенъ боку правильнаго треугольника, описаннаго около круга радіуса $r=0,25$ саж. $\pi=3,14$.

162. Найти длину окружности, которой радіусъ равенъ периметру правильнаго шестиугольника, описаннаго около круга радіуса $r = \frac{7}{40}$ метра. $\pi = \frac{22}{7}$.

163. Найти длину окружности, описанной около правильнаго десятиугольника, котораго периметръ $p=5$ арш.; $\pi=3,14$.

164. Найти радіусъ окружности, равной периметру правильнаго восьмиугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса $r=3\frac{3}{5}$ дюйма. $\pi = \frac{22}{7}$.

165. Дуга, стягиваемая стороною правильного шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ, равна $s=2\frac{5}{16}$ саж. Найти периметръ шестиугольника.

166. Найти длину окружности, вписанной въ прямоугольный треугольникъ, у котораго катеты: $a=2\frac{1}{2}$ арш. и $b=3\frac{1}{6}$ арш. $\pi=3\frac{22}{7}$.

167. Въ углѣ, равномъ 60° , описана окружность длиною въ $a=8,2$ саж., касающаяся боковъ угла. Найти разстояніе отъ центра круга до вершины угла. $\pi=3,14$.

168. На равнодѣлящей угла въ 120° дана точка O , отстоящая на $a=2,1$ фута отъ вершины угла. Найти длину окружности, описанной изъ точки O и касающейся боковъ угла. $\pi=3\frac{22}{7}$.

169. Четыре равныхъ круга радіуса $r=0,14$ саж. касаются попарно между собою. Найти радіусъ окружности, касающейся извнѣ этихъ круговъ. $\pi=3\frac{22}{7}$.

170. Три равныхъ круга радіуса r касаются попарно другъ друга. Найти длину окружности, касающейся ихъ извнѣ.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

Теоремы и задачи на площади прямолинейныхъ фигуръ, площади круга и его частей.

А. Теоремы.

1. Доказать чертежомъ, что прямоугольникъ, имѣющій съ даннымъ треугольникомъ общее основаніе и высоту, равномѣренъ параллелограмму, имѣющему съ тѣмъ же треугольникомъ двѣ общія стороны и уголъ между ними.

2. Доказать чертежомъ, что прямоугольникъ, имѣющій основаніемъ гипотенузу, а высотой — высоту прямоугольнаго треугольника, равномѣренъ прямоугольнику, имѣющему основаніемъ и высотой катеты этого треугольника.

3. Доказать чертежомъ, что два равнобедренныя треугольника равномѣрны, если имѣютъ по равной сторонѣ и если высота одного равна половинѣ основанія другого.

4. Площадь всякаго четырехугольника равна произведенію одной изъ діагоналей на полусумму перпендикуляровъ, опущенныхъ на эту діагональ изъ вершинъ, чрезъ которыя діагональ не проходитъ

5. Если въ четырехугольникѣ $ABCD$ соединимъ E середину стороны AB съ вершиною D , а F середину стороны CD съ вершиною B , то площадь четырехугольника $EBFD$ равна половинѣ площади четырехугольника $ABCD$.

6. Всякій четырехугольникъ дѣлится на двѣ равномѣрныя части прямыми, проведенными изъ середины одной его діагонали къ вершинамъ противоположныхъ угловъ.

7. Если четырехугольникъ раздѣлимъ на четыре четырехугольника прямыми, соединяющими середины его противоположныхъ сторонъ, то сумма площадей двухъ противоположныхъ четырехугольниковъ равна суммѣ площадей двухъ другихъ четырехугольниковъ.

8. Сумма двухъ противоположныхъ треугольниковъ, составленныхъ чрезъ соединеніе вершинъ параллелограмма съ точкою, взятою внутри его, равномѣрна половинѣ этого параллелограмма.

9. Если произвольную точку прямой, соединяющей середины параллельныхъ сторонъ трапеціи, соединить съ вершинами трапеціи, то треугольники, имѣющіе вершину въ этой точкѣ, а основаніями — непараллельныя стороны трапеціи, будутъ равновелики.

10. Площадь ромба равна половинѣ произведенія его діагоналей.

11. Если въ прямоугольникѣ $ABCD$ проведемъ изъ вершины B прямую BE до пересѣченія въ точкѣ E съ бокомъ CD и опустимъ перпендикуляръ AF на BE , то прямоугольникъ, имѣющій измѣреніями AF и BE , будетъ равномѣренъ данному прямоугольнику.

12. Два треугольника равновелики, если имѣютъ по двѣ равныхъ стороны, а углы, заключенные между ними, служатъ дополненіями другъ другу до 180° .

13. Два треугольника, расположенные по разнымъ сторонамъ ихъ общаго основанія, равномѣрны, если прямая, соединяющая ихъ вершины, дѣлится основаніемъ пополамъ.

14. Два треугольника будутъ равны, когда имѣютъ, при равныхъ площадяхъ, по равной сторонѣ и по равному углу, прилежащему къ этой сторонѣ.

15. Два треугольника будутъ равны, когда имѣютъ по два соответственно равныхъ угла и одинаковыя площади.

16. Два треугольника будутъ равны, когда имѣютъ равныя площади, по двѣ соответственно равныхъ сторонъ и если углы, заключенные между ними, будутъ оба или острые или оба тупые.

17. Два треугольника будутъ подобны, когда площади ихъ пропорціональны квадратамъ основаній и когда имѣютъ по равному углу при основаніи.

18. Если на сторонахъ AB , BC и CA треугольника ABC построимъ квадраты: $ABEF$, $BCGH$ и $CAKL$ и соединимъ E съ H , C съ L и K съ F , то треугольники ABC , BEH , CGL и KAF равномѣрны.

19. Площади треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе или равныя основанія, относятся между собою какъ прямыя, выходящія изъ вершинъ противоположныхъ основаніямъ и составляющихъ съ нимъ равные углы.

20. Данъ треугольникъ ABC и точка O внутри его; изъ точекъ A и O проведемъ параллельныя прямыя до пересѣченія съ BC въ точкахъ N и M . Показать, что отношеніе площадей треугольниковъ BOC и ABC равно отношенію OM къ AN .

21. Если чрезъ вершины двухъ неравныхъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе, провести прямую до пересѣченія съ продолженнымъ основаніемъ, то площади данныхъ треугольниковъ относятся какъ разстоянія вершинъ до полученной точки пересѣченія.

22. Если AD равнодѣлящая угла BAC пересѣкаетъ сторону BC въ D , а DE и DF равнодѣлящія углы ADC и ADB пересѣкаютъ стороны AC и AB въ E и F , то площади треугольниковъ BEF и CEF относятся какъ AB къ AC .

23. Если два равномѣрныхъ треугольника имѣютъ общій уголъ, то прямыя, соединяющія концы сторонъ, противоположныхъ этому углу, будутъ параллельны.

24. D и E середины сторонъ AB и AC въ треугольникѣ ABC . Показать, что площадь треугольника BFC равна площади четырехугольника $ADFE$.

25. Треугольникъ, составленный чрезъ соединеніе середины одного изъ непараллельныхъ боковъ трапеціи съ концами противоположнаго бока, равномѣренъ половинѣ трапеціи.

26. D и E середины сторонъ CA и CB въ треугольникѣ ABC . Соединимъ D съ E и проведемъ прямыя AE и BD , пересѣкающіяся въ O . Показать, что площади треугольниковъ DOE , EOB и BOA составляютъ непрерывную геометрическую пропорцію.

27. Если въ трапеціи продолжимъ непараллельныя стороны до ихъ встрѣчи, то площадь треугольника, ограниченного этими сто-

ропами и діагоналлю трапеціи, будетъ среднею пропорціональною между площадями треугольниковъ, у которыхъ основаніями будутъ основанія трапеціи, а другіе бока — продолженныя стороны трапеціи.

28. Если въ трапеціи проведемъ діагонали, то раздѣлимъ трапецію на четыре треугольника, изъ которыхъ площадь каждаго прилежащаго къ непараллельнымъ сторонамъ будетъ среднею пропорціональною между площадями треугольниковъ, прилежающихъ къ основаніямъ трапеціи.

29. $ABCD$ паралелограммъ, въ которомъ стороны BC , CD , DA и AB раздѣлены пополамъ въ точкахъ A' , B' , C' и D' . Показать, что прямыя AA' , BB' , CC' и DD' въ пересѣченіи составляютъ параллелограммъ, котораго площадь равна $\frac{1}{6}$ площади даннаго параллелограмма.

30. Въ трапеціи, у которой одна изъ параллельныхъ сторонъ вдвое болѣе другой, каждая изъ діагоналей отсѣкаетъ на другой діагонали третью часть ея.

31. Каждую изъ сторонъ BC , CA и AB треугольника ABC раздѣлимъ на три равныя части въ точкахъ D и d , E и e , F и f , соответственно. Показать, что площадь шестигульника $IdEeFf$ равна $\frac{2}{9}$ площади треугольника ABC .

32. Въ треугольникѣ ABC проведена медіана AD ; черезъ E середину AD и точку B проведена прямая BE . Показать, что прямая BE раздѣляетъ сторону AC въ отношеніи 2 къ 1.

33. Возьмемъ точку O внутри треугольника ABC и проведемъ прямыя AO , BO и CO ; продолжимъ AO до пересѣченія съ BC въ D . Показать, что площади треугольниковъ AOB и AOC будутъ въ отношеніи BD къ DC .

34. ABC данный треугольникъ; AD и CF перпендикулярны къ равнодѣляющимъ внутренняго и внѣшняго угла B , пересѣкающимися въ точкѣ F . Показать, что площадь прямоугольника $BDFE$ равна площади треугольника ABC .

35. BE и CF перпендикулярны на равнодѣляющую угла A въ треугольникѣ ABC . Показать, что площадь треугольника равна $AE \cdot CF$ или $AF \cdot BE$.

36. Показать, что площадь четырехугольника, ограниченаго діаметромъ круга, касательными въ концахъ діаметра и касательной, проведенной произвольно къ кругу, равна половинѣ площади прямо-

угольника, имѣющаго измѣреніями діаметръ круга и противоположную сторону четырехугольника.

37. Въ треугольникѣ ABC проведена прямая, параллельно BC , пересѣкающая стороны AB и AC въ D и E . Если F пересѣченіе прямыхъ BE и CD , то треугольники ADF и AEF равномѣрны.

38. Если діагонали четырехугольника, вписаннаго въ кругѣ, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, то сумма произведеній противоположныхъ сторонъ выражаетъ удвоенную площадь даннаго четырехугольника.

39. Въ кругѣ вписанъ четырехугольникъ. Изъ центра круга опустимъ перпендикуляры на стороны и составимъ четырехугольникъ, соединяя основанія перпендикуляровъ. Показать, что площадь даннаго четырехугольника вдвое болѣе площади построеннаго четырехугольника.

40. Показать, что данный прямоугольникъ равномѣренъ половинѣ прямоугольника; имѣющаго измѣреніями діагонали квадратовъ, построенныхъ на его двухъ смежныхъ сторонахъ.

41. Показать, что площадь правильнаго описаннаго треугольника около круга въ четыре раза болѣе площади правильнаго треугольника, вписаннаго въ этотъ кругъ.

42. Площадь правильнаго вписаннаго въ кругѣ шестигульника равна $\frac{3}{4}$ площади правильнаго описаннаго шестигульника около того же круга.

43. Площадь правильнаго вписаннаго въ кругѣ шестигульника есть средняя пропорціональная величина между площадями правильныхъ треугольниковъ, вписаннаго и описаннаго около того же круга.

44. Показать, что площадь правильнаго вписаннаго въ кругъ восьмиугольника равна площади прямоугольника, у котораго основаніе и высота равны бокамъ квадратовъ, вписаннаго и описаннаго около того же круга.

45. Въ правильномъ шестигульникѣ $ABCDEF$ проведемъ прямыя: AC , BD , CE , DF , EA и FB ; тогда въ пересѣченіи ихъ получимъ правильный шестигульникъ, площадь котораго равна $\frac{1}{3}$ площади даннаго.

46. Сумма разстояній какой-либо точки, взятой внутри правильнаго многоугольника, до его сторонъ, равна апосемѣ, взятой столько разъ, сколько сторонъ въ данномъ многоугольникѣ.

47. Если из точки, взятой на сторонѣ треугольника, проведемъ прямая, параллельно двумъ другимъ сторонамъ, то площадь полученнаго параллелограмма будетъ среднею пропорціональною между удвоенными площадями двухъ отсѣченныхъ треугольниковъ.

48. Если чрезъ точку, взятую внутри треугольника, проведемъ прямая, параллельно сторонамъ его, то получимъ три треугольника и три параллелограмма. Если треугольники равномѣрны, то каждый изъ нихъ равенъ $\frac{1}{9}$ площади даннаго треугольника.

49. Около остроугольнаго треугольника ABC описатьъ кругъ, котораго центръ O ; продолжимъ радіусы: AO , BO и CO до встрѣчи съ окружностью въ точкахъ: A' , B' и C' . Показать, что площадь шестиугольника $AB'SA'BC'$ равна удвоенной площади треугольника ABC . Разсмотрѣть случай, когда треугольникъ ABC тупоугольный.

50. Въ данный квадратъ впишемъ квадратъ, у котораго вершины лежали бы въ серединахъ его сторонъ; въ полученный квадратъ впишемъ квадратъ, котораго вершины лежали бы въ серединахъ сторонъ этого квадрата и т. д. Показать, что сумма площадей вписанныхъ квадратовъ равна площади даннаго квадрата.

51. Проведемъ медіаны въ данномъ треугольникѣ и построимъ треугольникъ, у котораго стороны были бы равны медіанамъ. Потомъ построимъ третій треугольникъ изъ медіанъ втораго треугольника и т. д. до безконечности. Показать, что сумма площадей всѣхъ треугольниковъ равна учетверенной площади даннаго треугольника.

52. Площадь трапеціи равна произведенію одного изъ непараллельныхъ боковъ на длину перпендикуляра, опущеннаго изъ середины другаго непараллельнаго бока на первый.

53. Вывести выраженіе для площади трапеціи, разсматривая ее какъ разность площадей треугольниковъ, полученныхъ чрезъ продолженіе непараллельныхъ сторонъ трапеціи.

54. Данъ равнобедренный треугольникъ ABC , въ которомъ точки D и E середины боковъ AB и AC ; означимъ буквою F точку пересѣченія прямыхъ BE и CD . Показать, что площадь треугольника ADE втрое болѣе площади треугольника DEF .

55. Если треугольникъ DEF вписанъ въ треугольникъ ABC такъ, что стороны DE и DF параллельны сторонамъ BA и CA , то отношеніе площадей треугольниковъ DEF и ABC равно отношенію $BD \cdot DC$ къ BC^2 .

56. Черезъ середину каждой изъ діагоналей даннаго четырехугольника проведемъ прямую, параллельную другой діагонали и точку пересѣченія проведенныхъ прямыхъ соединимъ съ серединами боковъ четырехугольника. Показать, что данный четырехугольникъ раздѣлится этими прямыми на четыре равномѣрныхъ части.

57. Черезъ E середину діагонали BD четырехугольника $ABCD$ проведемъ хорду FEG , параллельно діагонали AC . Показать, что прямая AG раздѣляетъ четырехугольникъ на двѣ равномѣрныхъ части.

58. По одну сторону BC основанія треугольника ABC возставимъ перпендикуляры изъ точекъ B и C , на которыхъ отложимъ части BD и CE , равныя удвоенной высотѣ треугольника, соответствующей сторонѣ BC ; пусть F середина AB и G середина AC . Доказать, что треугольникъ ABC равномѣренъ суммѣ или разности треугольниковъ BDF и CEG , смотря по тому, оба ли угла B и C острые или только одинъ изъ нихъ.

59. Въ треугольникѣ ABC сторона AC вдвое болѣе стороны BC ; проведемъ равнодѣлящія внутренняго и внѣшняго угла C до пересѣченія съ AB и продолженіемъ AB въ D и E . Доказать, что площади треугольниковъ: BCD , ACD , ABC и CDE находятся въ отношеніи $1:2:3:4$.

60. На сторонахъ BC и CA треугольника ABC возьмемъ точки D и E такъ, чтобы $BD=2DC$ и $CE=2EA$; проведемъ прямыя AD и BE , пересѣкающіяся въ O . Показать, что площади треугольниковъ EOA , AOB , BOD и ABC будутъ въ отношеніи $1:6:8:21$.

61. Изъ свойства площадей треугольниковъ вывести, что если въ треугольникѣ ABC проведемъ хорду DE , параллельно BC , то точка пересѣченія прямыхъ BE и CD лежитъ на прямой, соединяющей вершину A съ серединою противоположной стороны.

62. Возьмемъ точку O внутри треугольника ABC и изъ нея проведемъ прямыя OM , ON и OP до пересѣченія съ боками BC , AC и AB въ точкахъ M , N и P ; потомъ изъ вершинъ проведемъ прямыя AM' , BN' и CP' , параллельныя, соответственно, прямымъ OM и ON и OP , до пересѣченія съ тѣми же боками въ точкахъ M' , N' и P' .

Доказать, что $\frac{OM}{AM'} + \frac{ON}{BN'} + \frac{OP}{CP'} = 1$.

63. Если AA' , BB' и CC' будутъ прямыя, проведенныя изъ вершинъ треугольника ABC чрезъ точку O , и пересѣкающія стороны BC , CA и AB въ точкахъ A' , B' и C' то $AB' \cdot BC' \cdot CA' =$

$= AC' \cdot BA' \cdot CB'$, и обратно, если это условие выполнено, то прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке.

64. A' , B' и C' середины сторон BC . CA и AB треугольника ABC . Через A , B и C проведем параллельные прямые, которые пересекут $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$, соответственно, в a , b и c . Показать, что площадь треугольника abc равна половине площади треугольника ABC и прямая bc проходит через A ; прямая ca проходит через B и прямая ab проходит через C .

65. На сторонах данного треугольника, как основаниях, построить наружно подобные равнобедренные треугольники. Показать, что прямые, соединяющие вершины данного треугольника с противоположными вершинами построенных треугольников, пересекаются в одной точке.

66. В прямоугольнике $ABCD$ возьмем какую-нибудь точку E на BC и точку F на CD . Показать, что прямоугольник $ABCD$ равнобедрен удвоенному треугольнику AEF , увеличенному на прямоугольник, имеющий измерения BE и DF .

67. Если квадрат и прямоугольник имеют одинаковые периметры, то площадь квадрата больше площади прямоугольника на площадь квадрата, построенного на полуразности сторон прямоугольника.

68. O центр круга, вписанного в треугольник ABC ; прямые BO и CO пересекают противоположные стороны в D и E . Показать, что площади треугольников BOE и COD пропорциональны произведениям: $AE \cdot BE$ и $AD \cdot AC$.

69. В круге O проведены два взаимно-перпендикулярных радиуса OA и OB ; через точку P , взятую на дуге AB , проведем касательную к кругу до встречи с продолжением OA в S и OB в T ; опустим перпендикуляр PM на OA . Доказать, что площадь треугольника AOB есть средняя пропорциональная величина между площадями треугольников SOT и MOP .

70. В прямоугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC и в треугольнике ABC вписан круг O , который касается стороны AB в E и стороны BC в F ; через E проведем прямую, параллельно AD , до встречи с CD в H , а через F проведем прямую, параллельно CD , до встречи с AD в K . Доказать, что прямоугольник HK равнобедрен половине данного прямоугольника.

71. Чрезъ точки P и P' , взятыя на сторонѣ BC треугольника ABC , проведемъ хорды PE и $P'E'$, параллельно AC , и хорды PF и $P'F'$, параллельно BA ; точки E, E', F и F' соединимъ съ какою-нибудь точкою M , взятою на BC . Доказать, что сумма треугольниковъ EME' и FMF' равномѣрна треугольнику PAP' .

72. Возьмемъ точку P внутри параллелограмма $ABCD$. Показать, что треугольникъ BPD равномѣренъ разности треугольниковъ APB и BPC . Что будетъ, если точку P возьмемъ внѣ параллелограмма?

73. Прямая, проходящая черезъ середины діагоналей четырехугольника $ABCD$, пересѣкаетъ AD и BC въ E и F . Показать, что площади каждаго изъ треугольниковъ EBC и FAD равна половинѣ площади четырехугольника $ABCD$.

74. Два многоугольника четнаго числа сторонъ будутъ равномѣрны, если совпадаютъ середины ихъ боковъ.

75. Площадь многоугольника четнаго числа сторонъ не измѣнится, когда всѣ четныя (по порядку) вершины или же всѣ нечетныя описываютъ прямыя, равныя, параллельныя и направленныя въ одну сторону.

76. Въ треугольникѣ ABC отложимъ на сторонѣ AB часть $AF=2BF$; на BC — часть $BD=2CD$ и на AC — часть $CE=2AE$. Показать, что площадь треугольника $A'B'C'$, полученнаго въ пересѣченіи прямыхъ AD, BE и CF , равна $\frac{1}{7}$ площади треугольника ABC .

77. На бокахъ AB и AC даннаго треугольника ABC возьмемъ двѣ точки M и N , а на прямой MN еще третью точку P такъ, чтобы $BM:AM=AN:CN=PM:PN$. Показать, что площадь треугольника BPC равна удвоенной площади треугольника AMN .

78. Если бока треугольника ABC раздѣлимъ въ отношеніи n къ 1, слѣдуя въ обыкновенномъ порядкѣ, то площадь треугольника, полученнаго чрезъ соединеніе точекъ дѣлений, будетъ относиться къ площади даннаго треугольника, какъ n^2-n+1 къ $(n+1)^2$.

79. Въ четырехугольникѣ $ABCD$ точка E пересѣченіе діагоналей; опустимъ перпендикуляры BF, CG и EH на сторону AD . Показать, что площадь четырехугольника равна $\frac{AD}{2} \cdot \frac{BF \cdot CG}{EH}$.

80. Сторону многоугольника раздѣлимъ на n частей и на каждой изъ нихъ построимъ многоугольникъ, подобный данному и одинаково

съ нимъ расположенный. Показать, что сумма периметровъ этихъ многоугольниковъ равна периметру даннаго многоугольника и что когда дѣленія будутъ равны, то сумма площадей построенныхъ многоугольниковъ равна $\frac{1}{n}$ площади даннаго многоугольника.

81. Доказать, что площадь треугольника равна произведенію радіуса, описаннаго около него круга, на полупериметръ треугольника, полученнаго отъ соединенія прямыми основаній высотъ даннаго треугольника.

82. Даны три концентрическія окружности, которыхъ центръ O . Проведемъ прямую XY , пересѣкающую окружности. Пусть A будетъ одна изъ точекъ пересѣченія съ внутреннею окружностью, B съ среднею окружностью и C съ вѣншею окружностью. Показать, что площадь треугольника, ограниченнаго касательными, проведенными въ точкахъ A , B и C къ окружностямъ, равна $\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{2OQ}$, гдѣ OQ длина перпендикуляра, опущеннаго изъ O на сѣкущую.

83. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ впишемъ кругъ, то площадь даннаго треугольника будетъ равна площади прямоугольника, имѣющаго измѣреніями отрезки гипотенузы, опредѣленные точкою касанія вписаннаго круга.

84. Въ прямоугольномъ треугольникѣ вписать полукругъ O , касающійся катетовъ и котораго центръ на гипотенузѣ. Если b и c катеты треугольника, то радіусъ полукруга равенъ $\frac{bc}{b+c}$.

85. Изъ O центра вписаннаго круга въ треугольникъ ABC опустимъ перпендикуляры OD , OE и OF на AB , BC и CA . Въ четырехугольники $AFOE$, $BFOD$ и $CODE$ впишемъ круги и означимъ ихъ радіусы, соответственно, чрезъ r_1 , r_2 и r_3 , а радіусъ вписаннаго круга въ треугольникъ ABC чрезъ r . Показать, что

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}.$$

86. Если означимъ буквами r и R радіусы вписаннаго и описаннаго круговъ для треугольника, у котораго стороны a , b и c , то площадь треугольника равна $\frac{(a+b+c)r}{2} = pr$ и $\frac{abc}{4R}$.

87. Пусть r_a будетъ радіусъ вѣнписаннаго круга въ треугольникъ, у котораго стороны a , b и c , касающагося стороны a . Показать, что площадь треугольника равна $\frac{1}{2}(b+c-a)r_a = (p-a)r_a$.

88. Если діаметръ круга будетъ четвертая пропорціональная къ сторонамъ вписаннаго въ него треугольника, то площади треугольника равна половинѣ квадрата, построеннаго на меньшей изъ сторонъ треугольника.

89. Если стороны треугольника составляютъ арифметическую прогрессию, въ которой a большая и c меньшая изъ сторонъ, а R и r — радіусы описаннаго и вписаннаго круговъ, то $6Rr = ac$.

90. Въ треугольникъ ABC впишемъ кругъ O , касающійся сторонъ BC , CA и AB въ точкахъ D , E и F и составимъ треугольникъ такой, въ которомъ стороны равны AF , BD и CE ; означимъ буквою r радіусъ круга, вписаннаго въ данный треугольникъ, а буквами ρ и ρ' радіусы вписаннаго и описаннаго круговъ для построеннаго треугольника. Показать, что $r^2 = 2\rho\rho'$.

91. Если a , b и c радіусы круговъ, которые касаются наружно другъ друга, и r радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, составленный чрезъ соединеніе центровъ, то $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}$.

92. Точка P внутри треугольника ABC , въ которомъ стороны равны a , b и c . Означимъ буквами α , β и γ длины PA , PB и PC ; буквою r радіусъ круга вписаннаго въ данный треугольникъ ABC , а буквами r_1 , r_2 и r_3 радіусы вписанныхъ круговъ въ треугольники PBC , PCA и PAB . Показать, что

$$(r_2 + r_3)\alpha + (r_3 + r_1)\beta + (r_1 + r_2)\gamma = (r - r_1)a + (r - r_2)b + (r - r_3)c.$$

Въ задачахъ 93 до 107, h_a , h_b и h_c означаютъ высоты треугольника; r , r_a , r_b и r_c — радіусы вписаннаго и выѣвписанныхъ круговъ, касающихся сторонъ a , b и c треугольника; R радіусъ описаннаго круга; $2p$ периметръ и q площадь треугольника. Показать:

$$93. a = (r_b + r_c) \sqrt{\frac{rr_a}{r_b r_c}}. \quad 94. \frac{ab - r_a r_b}{r_c} = \frac{bc - r_b r_c}{r_a} = \frac{ca - r_c r_a}{r_b}.$$

$$95. rr_a + r_b r_c = bc; rr_b + r_a r_c = ac; rr_c + r_a r_b = ab.$$

$$96. rr_a + rr_b + rr_c + r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = ab + bc + ca.$$

$$97. r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2. \quad 98. r_a r_b r_c = pq. \quad 99. rr_a r_b r_c = q^2.$$

$$100. \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}. \quad 101. a^2 - b^2 = (r_a - r_b)(r + r_c).$$

$$102. a^2 + b^2 - c^2 = 2(r_a r_b - rr_c).$$

$$103. \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}, \quad \frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right).$$

$$104. \frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}. \quad 105. h_a h_b h_c = \frac{(a+b+c)^3}{abc} \cdot r^3.$$

$$106. \frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c} = \frac{r}{2R}. \quad 107. \frac{p^2}{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a} = \frac{r}{2R}.$$

108. Если O центр вписаннаго круга, касающагося стороны BC треугольника ABC , то $a \cdot OA^2 - b \cdot OB^2 - c \cdot OC^2 = abc$.

109. На сторонах a , b и c треугольника, какъ діаметрахъ, описаны окружности. Показать, что діаметръ d кругъ, касающагося паружно этихъ круговъ, опредѣляется изъ уравненія:

$$\sqrt{\frac{d}{p-a}-1} + \sqrt{\frac{d}{p-b}-1} + \sqrt{\frac{d}{p-c}-1} = \sqrt{\frac{p}{d-p}}.$$

110. Четыреугольникъ $ABCD$ вписанъ въ кругъ. Изъ свойства площадей вывести слѣдующее отношеніе: $\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + AD \cdot DC}$.

111. A' , B' и C' — середины сторонъ BC , CA и AB въ треугольникѣ ABC ; O — точка пересѣченія прямыхъ AA' , BB' и CC' . Означивъ радіусы круговъ, вписанныхъ въ треугольники BOA' , COA' , COB' , AOB' , AOC' и BOC' , чрезъ a_β , a_γ , b_γ , b_α , c_α и c_β , показать, что

$$\frac{1}{a_\beta} - \frac{1}{a_\gamma} + \frac{1}{b_\gamma} - \frac{1}{b_\alpha} + \frac{1}{c_\alpha} - \frac{1}{c_\beta} = 0.$$

112. Пусть q и Q означаютъ площади правильнаго вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ около круга, съ тѣмъ же числомъ сторонъ. Показать, что разность $Q - q$ равна или площади правильнаго многоугольника съ тѣмъ же числомъ сторонъ, вписаннаго въ кругъ діаметра, равнаго боку многоугольника Q , или площади правильнаго многоугольника, съ тѣмъ же числомъ сторонъ, описаннаго около круга, котораго діаметръ равенъ боку многоугольника q .

113. Означимъ буквами q и Q площади двухъ правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ, вписаннаго и описаннаго около того же круга, а буквами q' и Q' — площади двухъ правильныхъ многоугольниковъ, вписаннаго и описаннаго около того же круга, но съ двойнымъ числомъ сторонъ. Показать, что

$$q' = \sqrt{Qq}, \quad Q' = \frac{2Qq}{q+q'}, \quad \text{и} \quad Q' - q' < \frac{1}{4}(Q - q).$$

114. Если q , q' и q'' площади правильныхъ вписанныхъ въ кругъ многоугольниковъ о n , $2n$ и $4n$ сторонахъ, то $q''^2 = \frac{2q'^3}{q+q'}$.

115. Если чрезъ q_0 , q_1 , ..., q_m означимъ площади правильныхъ

вписанныхъ многоугольниковъ въ данномъ кругѣ, у которыхъ, начиная со второго, число сторонъ вдвое болѣе предыдущаго, то

$$\left(\frac{q_{m-1}}{q_m}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q_{m-2}}{q_{m-1}} + 1\right).$$

116. Показать, что середины діагоналей описаннаго четырехугольника около круга и центръ этого круга лежатъ на одной прямой.

117. Показать, что площадь четырехугольника, вписаннаго въ кругъ и внутри котораго можно вписать кругъ, равна квадратному корню изъ произведенія четырехъ его сторонъ.

118. B и D — двѣ точки на дугѣ AC квадранта AOC , равно удаленныя отъ концовъ дуги AC ; BG и DH — перпендикуляры на OC . Показать, что фигура $BGHD$ равновелика сектору BOD .

119. AB — дуга окружности, которой центръ O , и AD — перпендикуляръ на OB ; отложивъ на дугѣ AB часть $AC=AD$, доказать, что секторъ BOC равновеликъ сегменту ACB .

120. На радіусахъ OA и OB квадранта $OBCA$ опишемъ полуокруги $OEDA$ и $OFDB$. Показать, 1) что точки A , D и B лежатъ на прямой; 2) что площади $ACBD$ и $OEDF$ равны, и 3) что площади $OFDA$ и $OEDB$ также равны и составляютъ четверть площади квадранта $OACB$.

121. Если полуокружность AB раздѣлимъ въ точкахъ C и D на три равныя части, то площадь фигуры CAD равна трети площади полуокруга.

122. Данъ квадратъ AOB . Если на хордѣ AB опишемъ полуокругъ ACB такъ, чтобы полуокружность была внѣ квадранта, то площадь образовавшейся лунообразной фигуры ACB равна площади треугольника AOB .

123. Если діаметръ полуокруга раздѣлимъ на произвольныя двѣ части и на каждой изъ нихъ, внутри даннаго полуокруга, опишемъ по полуокругу, то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, будетъ равна площади круга, котораго діаметръ равенъ перпендикулярѣ, возстановленному изъ точки дѣленія.

124. AD — перпендикуляръ къ гипотенузѣ BC въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC . Показать, что площади круговъ, вписанныхъ въ треугольники ABD и ACD , пропорціональны площадямъ этихъ треугольниковъ.

125. Начерченъ рядъ круговъ, касающихся послѣдовательно каждаго изъ нихъ и двухъ прямыхъ, пересекающихся въ точкѣ A .

Если AO есть расстояние точки пересѣченія прямых до O центра большаго изъ круговъ (крайняго), котораго радіусъ равенъ OB , то сумма площадей всѣхъ круговъ относится къ площади большаго круга, какъ $(OA + OB)^2$ относится къ $4OA \cdot OB$.

126. Разность двухъ подобныхъ секторовъ AOB и $A'OB'$ равна площади треугольника, у котораго основаніе равно разности радіусовъ дугъ AB и $A'B'$, а высота равна средней дугѣ, concentрической съ данными и подобной имъ.

127. Раздѣлимъ діаметръ AB данной окружности на n равныхъ частей въ точкахъ P_1, P_2, P_3, \dots и опишемъ полукруги, съ одной стороны AB , на AP_1, AP_2, AP_3, \dots и, съ другой стороны AB , на BP_1, BP_2, BP_3, \dots . Показать что периметръ каждой изъ фигуръ $AP_{m-1}BP_mA$ равенъ окружности данного круга, а площадь ея составляетъ n -ую часть площади данного круга.

128. Если q и Q будутъ площади правильнаго вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ около круга, съ тѣмъ же числомъ сторонъ, то площадь круга заключается между q и $q + \frac{2}{3}(Q - q)$.

129. Между всѣми треугольниками, имѣющими двѣ данныя стороны, наибольшую площадь имѣетъ тотъ, у котораго эти стороны перпендикулярны.

130. Между всѣми треугольниками, имѣющими то же основаніе и тотъ же уголъ при вершинѣ, равнобедренный имѣетъ наибольшую площадь.

131. Между всѣми треугольниками, имѣющими то же основаніе и ту же площадь, равнобедренный треугольникъ имѣетъ наибольшій уголъ при вершинѣ.

132. Изъ всѣхъ четырехугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ, квадратъ имѣетъ наибольшую площадь.

133. Изъ всѣхъ треугольниковъ, имѣющихъ ту же высоту и тотъ же уголъ при вершинѣ, наименьшую площадь имѣетъ равнобедренный.

134. Между всѣми треугольниками, имѣющими тотъ же периметръ и то же основаніе, равнобедренный имѣетъ наибольшую площадь.

135. Периметръ равнобедреннаго треугольника менѣе периметра другихъ треугольниковъ, имѣющихъ то же основаніе и ту же площадь.

136. Изъ всѣхъ равновеликихъ прямоугольниковъ квадратъ имѣетъ наименьшій периметръ.

137. Если площади треугольника и квадрата равны, то периметръ треугольника болѣе периметра квадрата.

138. Между всѣми изопериметрическими многоугольниками наибольшую площадь имѣетъ правильный.

139. Между всѣми равновеликими многоугольниками одинаковаго числа сторонъ правильный имѣетъ наименьшій периметръ.

В. Задачи на построение.

140. Раздѣлить площадь параллелограмма $ABCD$ пополамъ прямою, проходящею чрезъ точку M , данную на одной изъ сторонъ его.

141. Раздѣлить площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ на двѣ равныя части прямою, проходящею чрезъ точку M , данную на сторонѣ или внутри его.

142. Данный квадратъ $ABCD$ превратить въ равномѣрный ему прямоугольный треугольникъ.

143. Превратить данный параллелограммъ $ABCD$ въ равномѣрный ему треугольникъ.

144. Превратить трапецію $ABCD$ (или параллелограммъ) въ равномѣрный ей прямоугольникъ.

145. Данный треугольникъ ABC превратить въ равномѣрный ему прямоугольникъ.

146. Данный треугольникъ ABC превратить въ равномѣрный ему параллелограммъ.

147. Построить параллелограммъ, котораго площадь была бы вдвое меньше площади даннаго треугольника ABC .

148. Превратить квадратъ $ABCD$ въ равнобедренный треугольникъ, равномѣрный ему.

149. Раздѣлить площадь параллелограмма $ABCD$ на n равныхъ частей прямыми, параллельными одной изъ его сторонъ.

150. Раздѣлить площадь параллелограмма $ABCD$ прямою, параллельною одной изъ сторонъ, на двѣ части, находящіяся въ отношеніи m къ n .

151. Трапецію $ABCD$ раздѣлить на n равномѣрныхъ частей прямыми, пересекающими параллельныя стороны.

152. Не измѣняя основанія параллелограмма, превратить его въ равномѣрный ему параллелограммъ, который имѣлъ бы при основаніи данный уголъ.

153. Не измѣняя основанія параллелограмма $ABCD$, превратить его въ равномѣрный ему параллелограммъ, который имѣлъ бы другую сторону данною a .

154. Данный параллелограмм $ABCD$ превратить въ равномѣрный ему параллелограммъ, который имѣлъ бы сторону и уголъ данной величины.

155. Данный параллелограммъ $ABCD$ превратить въ равномѣрный ему параллелограммъ, не измѣняя величины угловъ, и у котораго одна изъ сторонъ была бы длиною a .

156. Данный треугольникъ превратить въ равномѣрный ему параллелограммъ, у котораго сторона и уголъ данной величины.

157. Превратить квадратъ $ABCD$ въ равномѣрный ему параллелограммъ, у котораго даны двѣ смежныя стороны a и b .

158. Данный квадратъ $ABCD$ превратить въ равномѣрный ему ромбъ съ данной стороной a .

159. Раздѣлить треугольникъ на двѣ равномѣрныя части прямою, проходящею чрезъ одну изъ вершинъ его.

160. Раздѣлить треугольникъ на n равновеликихъ частей прямыми, проведенными изъ какой-либо вершины треугольника.

161. Раздѣлить треугольникъ ABC на три части, находящіяся въ отношеніи $m:n:p$, прямыми, проведенными изъ вершины A треугольника.

162. Трапецію $ABCD$ раздѣлить на n равномѣрныхъ частей прямыми, проведенными изъ точки E пересѣченія непараллельныхъ боковъ ея.

163. Раздѣлить параллелограммъ на n равновеликихъ частей прямыми, проведенными изъ какой-либо вершины его.

164. Раздѣлить треугольникъ ABC на четыре равномѣрныя части прямыми, параллельными сторонамъ его.

165. Построить параллелограммъ, равномѣрный половинѣ данного четырехугольника $ABCD$.

166. Построить параллелограммъ, площадь котораго была бы вдвое болѣе площади данного четырехугольника.

167. Найти геометрическое мѣсто вершинъ треугольниковъ, имѣющихъ то же основаніе и ту же площадь.

168. Построить треугольникъ, равномѣрный суммѣ n треугольниковъ, имѣющихъ одинаковую высоту h .

169. Построить треугольникъ, площадь котораго была бы въ n разъ болѣе площади треугольника ABC .

170. Построить треугольникъ, площадь котораго была бы въ n разъ менѣе площади треугольника ABC .

171. Построить треугольникъ, равновеликій разности площадей треугольниковъ ABC и DEF , имѣющихъ одинаковую высоту.

172. Данный треугольникъ ABC превратить въ равносторонній ему треугольникъ, имѣющій одинъ изъ угловъ, равный углу φ .

173. Треугольникъ ABC превратить въ равносторонній ему треугольникъ, у котораго одна изъ сторонъ проходила бы чрезъ данную точку M .

174. Треугольникъ ABC превратить въ равновеликій ему равнобедренный треугольникъ.

175. По данной сторонѣ a и углу A построить треугольникъ, который имѣлъ бы наибольшую площадь.

176. Чрезъ вершину A треугольника ABC проведена прямая XU . Найти на прямой XU такую точку M , чтобы площадь треугольника MBC была въ n разъ болѣе площади треугольника ABC .

177. Параллелограммъ $ABCD$ превратить въ равносторонній ему параллелограммъ, не измѣняя одной изъ діагоналей, и у котораго одна изъ сторонъ была бы длиною a .

178. Превратить параллелограммъ въ равносторонній ему ромбъ.

179. Построить параллелограммъ, равносторонній суммѣ (или разности) данныхъ параллелограммовъ: $ABCD$ и $EFGH$.

180. Данный треугольникъ ABC превратить въ равносторонній ему треугольникъ, у котораго высота была бы данной величины и основаніе лежало на основаніи BC данного треугольника.

181. Данный треугольникъ ABC превратить въ равносторонній ему треугольникъ, у котораго основаніе лежало бы на основаніи BC данного треугольника, а вершина была бы въ точкѣ M .

182. Данный треугольникъ ABC превратить въ равносторонній ему треугольникъ, у котораго основаніе лежало бы на основаніи BC данного треугольника и было бы данной длины k .

183. Превратить треугольникъ въ другой, равносторонній ему и у котораго сторона и одинъ изъ угловъ были бы данной величины.

184. Построить треугольникъ, равносторонній суммѣ (или разности) данныхъ треугольниковъ ABC и DEF .

185. Превратить треугольникъ въ равновеликій ему равнобедренный треугольникъ, имѣющій данную высоту.

186. Превратить треугольникъ въ равновеликій ему равнобедренный треугольникъ, имѣющій данное основаніе.

187. Черезъ вершину A треугольника ABC проведена прямая XU и на сторонѣ BC дана точка D . Найти на прямой XU такую точку M , чтобы площадь треугольника MBD была въ n разъ меньше (или болѣе) площади треугольника ABC .

188. Превратить прямоугольный треугольникъ въ равносторонній ему прямоугольный же треугольникъ, у котораго катетъ былъ бы данной длины.

189. Превратить прямоугольный треугольникъ въ равносторонній ему прямоугольный и имѣющій гипотенузу данной длины k .

190. Данный квадратъ превратить въ равносторонній ему прямоугольный треугольникъ, имѣющій данную гипотенузу.

191. Превратить прямоугольникъ $ABCD$ въ равносторонній ему прямоугольникъ, имѣющій одну изъ сторонъ, равную a .

192. Квадратъ $ABCD$ превратить въ равносторонній ему прямоугольникъ, имѣющій діагональ данной длины k .

193. Превратить квадратъ $ABCD$ въ равносторонній ему параллелограммъ, у котораго діагонали k и l .

194. Превратить прямоугольникъ въ равносторонній ему параллелограммъ, у котораго дана сторона и діагональ.

195. Даны двѣ прямыя: MN и XU , изъ которыхъ первая данной длины. Построить треугольникъ, равносторонній данному треугольнику ABC такъ, чтобы основаніемъ была прямая MN , а вершина лежала на прямой XU .

196. Данный многоугольникъ $ABCDE$ превратить въ равносторонній ему многоугольникъ, имѣющій сторонъ одною меньше.

197. Данный многоугольникъ превратить въ равносторонній ему треугольникъ.

198. Данный многоугольникъ $ABCDE$ превратить въ равносторонній ему треугольникъ, у котораго вершина была бы въ точкѣ M , данной на AB , а основаніе лежало бы на прямой AE .

199. Построить квадратъ, равновеликій суммѣ нѣсколькихъ данныхъ квадратовъ.

200. Построить квадратъ вдвое меньшій квадрата $ABCD$.

201. Построить квадратъ въ n разъ большій даннаго квадрата $ABCD$.

202. Построить квадратъ, равновеликій разности двухъ данныхъ квадратовъ $ABCD$ и $EFGH$.

203. Превратить данный прямоугольникъ $ABCD$ въ равносторонній ему квадратъ.

204. Построить квадратъ, равновеликій $\frac{2}{3}$ даннаго квадрата $ABCD$.

205. Построить квадратъ, равновеликій: 1) $5a^2 + 3b^2$; 2) $a^2 + 4b^2 - c^2$ и 3) $3a^2 + 4ab - \frac{1}{2}b^2$, гдѣ a , b и c данныя длины.

206. Раздѣлить данную прямую a на такія двѣ части, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на этихъ частяхъ, была равномѣрна данному квадрату k^2 .

207. Раздѣлить данную прямую a на такія двѣ части, чтобы разность квадратовъ, построенныхъ на этихъ частяхъ, была равномѣрна данному квадрату k^2 .

208. Раздѣлить прямую на двѣ части такъ, чтобы квадратъ на одной изъ нихъ былъ равномѣренъ удвоенному квадрату на другой.

209. Даны два подобные между собою многоугольники. Построить третій, подобный имъ и равномѣрный ихъ суммѣ.

210. Построить равносторонній треугольникъ, равномѣрный суммѣ двухъ данныхъ равностороннихъ треугольниковъ.

211. Построить треугольникъ, подобный данному и котораго площадь въ n разъ болѣе (или менѣе) площади даннаго треугольника.

212. Построить многоугольникъ, подобный данному и равномѣрный другому данному многоугольнику.

213. Построить многоугольникъ, подобный данному многоугольнику, и площади которыхъ были бы въ отношеніи m къ n .

214. Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ a и b и площади k^2 .

215. Построить треугольникъ по данной его площади k^2 , сторонѣ a и углу A .

216. Провести между боками угла XAY прямую данной длины a такъ, чтобы она съ боками угла составила треугольникъ, равновеликій данному квадрату k^2 .

217. Построить треугольникъ по основанію b , площади его q и d^2 разности квадратовъ двухъ другихъ сторонъ.

218. Построить треугольникъ по двумъ медианамъ m_a и m_b и площади его k^2 .

219. Построить треугольникъ по сторонѣ a , площади его k^2 и отношенію $m : n$ двухъ другихъ сторонъ.

220. Построить прямоугольникъ по разности неравныхъ его сторонъ и площади.

221. Въ данномъ кругѣ O вписать прямоугольникъ, котораго площадь равнялась бы k^2 .

222. Построить прямоугольникъ по данной его площади и периметру.

223. Изъ вершинъ данного треугольника провести по двѣ прямыхъ такъ, чтобы онѣ составили равносторонній шестиугольникъ и котораго площадь была бы вдвое болѣе площади данного треугольника.

224. По данному основанію и противоположному углу построить такой треугольникъ, котораго площадь была бы наибольшая.

225. Въ данный кругъ вписать треугольникъ наибольшей площади.

226. Дана окружность O . Построить треугольникъ, у котораго одна вершина была бы въ центрѣ круга, а двѣ другія на окружности, и чтобы площадь его была наибольшая.

227. Черезъ данную точку A , внѣ круга O , провести прямую, пересѣкающую окружность круга въ точкахъ B и C такъ, чтобы площадь треугольника BOC была наибольшая.

228. Черезъ точку, данную внутри угла, провести сѣкущую такъ, чтобы она съ боками угла составила треугольникъ наибольшей площади.

229. PAQ и PBC двѣ полуокружности, касающіяся внутренно въ P , и у которыхъ PQC общій діаметръ. Провести сѣкущую PAB полуокружностей такъ, чтобы треугольникъ ABC имѣлъ наибольшую площадь.

230. Раздѣлить многоугольникъ $ABCDE$ на двѣ равномѣрныя части прямою, проведенной изъ какой-либо его вершины, напр. B .

231. Раздѣлить четырехугольникъ $ABCD$ на n равновеликихъ частей прямыми, проведенными изъ какой-либо его вершины.

232. Раздѣлить площадь трапеціи $ABCD$ въ отношеніи m къ n прямою, проведенною изъ какой-либо вершины ея.

233. Трапецію (или параллелограммъ) $ABCD$ раздѣлить на четыре равномѣрныя части прямыми, проведенными изъ точки M , данной на одной изъ параллельныхъ сторонъ.

234. Раздѣлить площадь параллелограмма (или трапеціи) въ отношеніи $m:n:p$ прямыми, исходящими изъ точки, данной на одной изъ его сторонъ.

235. Отъ многоугольника $ABCDE$ отдѣлить часть, равновеликую данному треугольнику MNP .

236. Треугольникъ ABC раздѣлить на три равновеликія части, которыя имѣли бы общую вершину внутри треугольника.

237. Раздѣлить треугольникъ ABC на двѣ равномѣрныя части прямою, исходящею изъ точки M , данной на одной изъ его сторонъ.

238. Раздѣлить треугольникъ ABC на три равномѣрныя части прямыми, исходящими изъ точекъ M и N , данныхъ на одной изъ его сторонъ.

239. Раздѣлить площадь треугольника ABC въ отношеніи m къ n прямою, исходящею изъ точки M , данной на одной изъ его сторонъ.

240. Раздѣлить площадь треугольника ABC на три части въ отношеніи $m : n : p$ прямыми, исходящими изъ точки, данной на одной изъ его сторонъ.

241. Раздѣлить многоугольникъ $ABCDE$ на три равновеликія части прямыми, проведенными изъ точки M , данной на одной изъ его сторонъ.

242. Раздѣлить площадь многоугольника въ отношеніи m къ n прямою, исходящею изъ точки, данной на одной изъ его сторонъ.

243. Раздѣлить треугольникъ ABC на три равномѣрныя части прямыми, исходящими изъ точекъ M и N , данныхъ на двухъ его сторонахъ.

244. Раздѣлить трапецію на четыре равновеликія части прямыми, исходящими изъ точки, данной на одной изъ ея сторонъ.

245. Треугольникъ ABC раздѣлить на три равномѣрныя части прямыми, исходящими изъ точки D , данной внутри его; при чемъ одна изъ прямыхъ должна пройти чрезъ вершину A .

246. Треугольникъ ABC раздѣлить на три равномѣрныя части прямыми, исходящими изъ точки D , данной внутри его; при чемъ одна изъ нихъ должна пройти чрезъ данную точку M .

247. Треугольникъ ABC раздѣлить на три равномѣрныя части прямыми, исходящими изъ точки D , данной внутри его; при чемъ одна изъ нихъ должна быть параллельна данной прямой KL .

248. Треугольникъ ABC раздѣлить на четыре равномѣрныя части прямыми, исходящими изъ точки, данной внутри его; при чемъ одна изъ прямыхъ должна или пройти чрезъ одну изъ вершинъ треугольника или чрезъ какую-либо данную точку.

249. Площадь треугольника ABC раздѣлить на три части въ отношеніи $m : n : p$ прямыми, проведенными изъ точки, данной внутри его; при чемъ одна изъ прямыхъ должна пройти или чрезъ вершину его, или чрезъ данную точку, или параллельно данной прямой.

250. Треугольникъ ABC превратить въ трапецію, которая имѣла бы съ нимъ общее основаніе BC и общій уголъ C , а при точкѣ B уголъ, равный φ .

251. Треугольникъ ABC превратить въ такой равномѣрный ему треугольникъ, который имѣлъ бы съ нимъ общій уголъ A , а противоположную сторону, параллельною данной прямой KL .

252. Прямоугольный треугольникъ ABC превратить въ равномѣрный ему прямоугольный же треугольникъ, у котораго острый уголъ былъ бы данной величины.

253. Превратить треугольникъ ABC въ равномѣрный ему равнобедренный треугольникъ, который имѣлъ бы съ нимъ общій уголъ A .

254. Треугольникъ ABC превратить въ равномѣрный ему равносторонній треугольникъ.

255. Въ треугольникѣ ABC на сторонѣ AB дана точка M . Найти на сторонѣ AC такую точку N , чтобы площади треугольниковъ AMN и CBN были въ отношеніи m къ n .

256. Площадь трапеціи $ABCD$ (или параллелограмма) раздѣлить въ отношеніи m къ n прямою, параллельною данной прямой KL .

257. Раздѣлить площадь треугольника ABC пополамъ прямою, параллельною сторонѣ BC .

258. Раздѣлить треугольникъ ABC на n равномѣрныхъ частей прямыми, параллельными сторонѣ BC .

259. Раздѣлить площадь треугольника ABC въ отношеніи m къ n прямою, параллельною сторонѣ BC .

260. Раздѣлить площадь треугольника ABC въ отношеніи $m : n : p$ прямыми, параллельными сторонѣ BC .

261. Раздѣлить трапецію $ABCD$ на три равномѣрныя части прямыми, параллельными основаніямъ.

262. Раздѣлить площадь трапеціи $ABCD$ въ отношеніи m къ n прямою, параллельною основаніямъ.

263. Въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC найти такую точку, чтобы перпендикуляры, опущенныя изъ нея на стороны треугольника, раздѣлили его на три равномѣрныя части.

264. Раздѣлить треугольникъ ABC на двѣ равномѣрныя части прямою, перпендикулярною къ сторонѣ BC .

265. Раздѣлить треугольникъ ABC на три равномѣрныя части двумя прямыми, изъ которыхъ одна параллельна BC , а другая перпендикулярна къ BC .

266. Раздѣлить треугольникъ ABC на двѣ равномѣрныя части прямою, параллельною прямою KL .

267. Раздѣлить площадь треугольника ABC въ отношеніи m къ n прямою, параллельною прямою KL .

268. Даны двѣ прямыя AB и CD по величинѣ и положенію. Найти геометрическое мѣсто точекъ M , для которыхъ треугольники MAV и MCD равновелики.

269. Даны двѣ прямыя AB и CD по величинѣ и положенію. Найти геометрическое мѣсто точекъ M , для которыхъ сумма площадей треугольниковъ AMB и CMD постоянная.

270. Даны двѣ прямыя AB и CD по величинѣ и положенію. Найти геометрическое мѣсто точекъ M , для которыхъ площади треугольниковъ MAV и MCD были бы въ отношеніи m къ n .

271. Даны двѣ прямыя AB и CD по величинѣ и положенію. Найти на прямой XU такую точку M , для которой площади треугольниковъ MAV и MCD были бы въ отношеніи m къ n .

272. Даны три прямыя: AB , CD и EF по величинѣ и положенію. Найти такую точку M , для которой площади треугольниковъ MAV , MCD и MEF были бы въ отношеніи $m : n : p$.

273. Въ треугольникѣ ABC найти такую точку, чтобы прямая, проведенная отъ нея къ вершинамъ, раздѣлила площадь треугольника въ отношеніи $m : n : p$.

274. Данъ треугольникъ ABC . Найти геометрическое мѣсто точекъ M , для которыхъ сумма площадей треугольниковъ MAV , MBC и MCA постоянна и болѣе площади треугольника ABC .

275. Даны два круга O и O' , касающіеся извнѣ другъ друга въ точкѣ A ; чрезъ точку A проведемъ въ каждомъ изъ нихъ по хордѣ, которыя были бы въ отношеніи $m : n$. Найти геометрическое мѣсто точекъ встрѣчи перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центровъ на хорды.

276. Провести чрезъ вершину A треугольника ABC прямую такъ, чтобы перпендикуляры BD и CE , опущенные на эту прямую, составили равновеликіе треугольники ABD и ACE .

277. Данную прямую раздѣлить на такія три части, чтобы площадь прямоугольника, имѣющаго измѣреніями двѣ изъ этихъ частей, равнялась площади даннаго квадрата и чтобы сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на этихъ частяхъ, равнялась площади квадрата, построеннаго на третьей части.

278. Даны на прямой последовательно точки: A , B , C и D . Найти геометрическое место точек M , для которых $\angle AMB = \angle CMD$.

Построить треугольник (279—284), когда дано:

279. r , h_a и h_b . 280. r , r_a и h_a . 281. h_a , r_b и r_c .

282. r_a , r_b и r_c . 283. r , r_a и r_b . 284. A , $2p$ и $\Delta = k^2$.

285. Въ треугольникъ ABC вписать прямоугольникъ данной площади k^2 .

286. Въ кругъ O вписать трапецію, у которой высота была h и площадь k^2 .

287. Черезъ точку M , данную на равнодѣлящей прямого угла $ХАУ$, провести прямую такъ, чтобы она отсѣкла треугольникъ, данной площади k^2 .

288. Черезъ точку M , данную внутри прямого угла $ХАУ$, провести такъ сѣкущую, чтобы полученный треугольникъ былъ равномѣренъ данному квадрату k^2 .

289. Черезъ точку M , данную внутри угла $ХАУ$, провести сѣкущую такъ, чтобы полученный треугольникъ былъ равномѣренъ данному квадрату k^2 .

290. Черезъ точку M , лежащую внутри даннаго угла $ХАУ$, провести сѣкущую такъ, чтобы прямоугольникъ, имѣющій измѣреніями отрѣзки, полученные на бокахъ угла, былъ равномѣренъ данному квадрату k^2 .

291. Черезъ точку, данную внутри угла, провести сѣкущую такъ, чтобы прямоугольникъ, имѣющій измѣреніями отрѣзки ея, ограниченныя данною точкою и боками угла, былъ равновеликъ данному квадрату.

292. Около даннаго треугольника ABC описать равносторонній треугольникъ, который имѣлъ бы наибольшую площадь.

293. Въ данный треугольникъ вписать треугольникъ наибольшей площади и у котораго одна изъ сторонъ была бы параллельна сторонѣ даннаго треугольника, а другая была бы параллельна данной прямой.

294. Данную прямую раздѣлить на такія двѣ части, чтобы, проведи внѣшнюю касательную къ кругамъ, начерченнымъ на этихъ частяхъ, какъ діаметрахъ, и соединивъ точки касанія съ точкою дѣленія, получился бы треугольникъ наибольшей площади.

295. Начертить кругъ, равномѣрный суммѣ двухъ круговъ.

296. Начертить кругъ, равномѣрный суммѣ нѣсколькихъ круговъ.

297. Начертить кругъ, равномѣрный разности данныхъ круговъ.
 298. Превратить кругъ въ равномѣрный съ нимъ полукругъ.
 299. Данный полукругъ превратить въ равномѣрный ему кругъ.
 300. Данный квадрантъ превратить въ равномѣрный съ нимъ полукругъ.
 301. Данный квадрантъ превратить въ равномѣрный ему кругъ.
 302. Начертить кругъ, котораго площадь была бы въ n разъ болѣе площади даннаго круга.
 303. Начертить кругъ, составляющій $\frac{m}{n}$ часть площади даннаго круга радіуса R .
 304. Раздѣлить кругъ радіуса R концентрическими окружностями на n равномѣрныхъ частей.
 305. Раздѣлить кругъ радіуса R концентрическими окружностями на четыре части въ отношеніи $m : n : p : q$.
 306. Раздѣлить кругъ O на n равномѣрныхъ частей окружностями, касающимися его окружности въ данной на ней точкѣ A .
 307. Изъ центра круга O описать такую окружность, чтобы площадь, заключенная между его окружностью и начерченною, была равномѣрна площади другого круга O' .
 308. Даны двѣ концентрическія окружности. Начертить кругъ, котораго площадь равнялась бы площади, заключенной между окружностями круговъ.

С. Задачи на вычисленіе.

309. Найти площадь треугольника по основанію b и высотѣ h .
 1) $b = 2$ арш. + 7 верш., а $h = 3$ саж.; 2) $b = 0,8$ саж., а $h = 1,5$ фута.
 310. Площадь треугольника q , при основаніи $b = 1,5$ арш., равна $3 \square$ арш. Найти высоту этого треугольника.
 311. Площадь треугольника q , при высотѣ $h = \frac{5}{21}$ саж., равна $2,5 \square$ фута. Найти основаніе этого треугольника.
 312. Найти площадь прямоугольнаго треугольника по катетамъ a и b . 1) $a = 0,8$ фута и $b = 4,35$ фута; 2) $a = 1,2$ вершка и $b = 1\frac{2}{3}$ вершка.
 313. Площадь q прямоугольнаго треугольника равна $4\frac{2}{3} \square$ арш., а одинъ изъ катетовъ $a = 1,6$ арш. Найти другой катетъ.
 314. Найти площадь прямоугольника по двумъ неравнымъ его

сторонамъ a и b . 1) $a=3$ фут. + 7 дюйм. и $b=5$ фут. + 3 дюйма; 2) $a=1\frac{3}{4}$ саж. и $b=0,14$ саж.

315. Площадь q прямоугольника равна $23 \square$ саж. + $25 \square$ дюйм. Найти его основаніе, если высота $h=5$ саж. + 1 футъ.

316. Площадь прямоугольника $q=2\frac{4}{9} \square$ арш. Найти высоту этого прямоугольника, когда его основаніе $b=1,1$ арш.

317. Прямоугольникъ, у котораго неравныя стороны: $a=7\frac{1}{9}$ дюйма и $b=4,5$ дюйма, равновеликъ прямоугольнику, у котораго одна изъ неравныхъ сторонъ $c=5,5$ дюйма. Найти другую сторону этого прямоугольника.

318. Найти площадь квадрата, у котораго сторона a равна 1) $0,42$ метра и 2) 5 саж. + 2 арш.

319. Найти сторону квадрата, если его площадь q равна: 1) $0,0144 \square$ фута; 2) $2 \square$ арш. + $113 \square$ верш.; 3) $110\frac{69}{196} \square$ саж. и 4) $5,735 \square$ метра.

320. Найти сторону квадрата, котораго площадь содержитъ столько квадратныхъ единицъ, сколько его периметръ содержитъ соответственныхъ линейныхъ единицъ.

321. Квадратъ, у котораго сторона $a=1\frac{1}{8}$ арш., равномѣренъ треугольнику, у котораго основаніе $b=2\frac{4}{9}$ арш. Найти высоту треугольника.

322. Квадратъ, у котораго сторона $a=0,6$ метра, равномѣренъ треугольнику, у котораго высота $h=0,08$ метра. Найти основаніе этого треугольника.

323. Квадратъ, у котораго сторона $a=1,3$ фута, равномѣренъ треугольнику, у котораго основаніе и высота равны между собою. Найти эти линіи съ точн. до $0,01$.

324. Найти сторону квадрата, равномѣрнаго треугольнику, у котораго основаніе $b=3\frac{1}{8}$ арш., а высота $h=9,6$ арш.

325. Найти сторону квадрата, равномѣрнаго прямоугольнику, имѣющему измѣреніями: $a=4$ метр. и $b=7$ дециметр.

326. Найти сторону квадрата, котораго площадь въ $n=361$ разъ большаго площади другого квадрата, имѣющаго сторона $a=1\frac{1}{8}$ арш.

327. Найти сторону квадрата, равномѣрнаго суммѣ квадратовъ, у которыхъ стороны: $a=3$ саж., $b=2,5$ саж. и $c=0,8$ саж.

328. Найти сторону квадрата, равномѣрнаго разности квадратовъ, у которыхъ стороны: $a=1\frac{3}{8}$ саж. и $b=1$ арш. + 10 верш.

329. Площадь прямоугольника $q=7\frac{1}{9} \square$ дюйма. Найти его высоту, когда извѣстно, что основаніе вчетверо больше высоты.

330. Найти площадь параллелограмма, у котораго основаніе $b=0,6$ саж. и высота $h=1\frac{1}{8}$ арш.

331. Внутри параллелограмма возьмемъ точку и соединимъ ее съ вершинами его. Найти отношеніе между суммою площадей двухъ противоположныхъ треугольниковъ и площадью параллелограмма.

332. Площади двухъ параллелограммовъ, имѣющихъ одинакія основанія, относятся какъ $m=24$ къ $n=7$. Найти высоту большаго изъ нихъ, если высота h меньшаго равна 0,28 метра.

333. Площади параллелограммовъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся какъ $m=31$ къ $n=19$. Найти основаніе каждаго изъ нихъ, если основаніе одного на $d=5\frac{1}{7}$ фута болѣе основанія другого.

334. Найти площадь квадрата по его діагонали $d=2\frac{2}{3}$ фута.

335. Найти діагональ квадрата, котораго площадь $q=80,645$ □ аршинъ.

336. Найти площадь ромба по діагоналямъ: $d=0,4$ арш. и $d'=0,7$ арш.

337. Одна изъ діагоналей ромба, площадь котораго $q=15,3$ □ фута, равна $d=1\frac{8}{9}$ фута. Найти другую его діагональ.

338. Найти площадь трапеціи, у которой основанія: $a=3\frac{3}{4}$ дюйма и $b=4,5$ дюйма, а высота $h=\frac{5}{4}$ фута.

339. Основанія трапеціи, которой площадь $q=21,7$ □ саж., будутъ: $a=2,4$ саж. и $b=4\frac{5}{8}$ саж. Найти разстояніе между основаніями трапеціи.

340. Площадь трапеціи равна q , а высота ея равна h . Найти основанія трапеціи, если большее изъ нихъ на k болѣе меньшаго.

341. Найти основанія трапеціи, у которой площадь q , высота h , и основанія пропорціональны числамъ m и n .

342. Найти площадь трапеціи, у которой одинъ изъ непараллельныхъ боковъ $a=0,27$ фута, а перпендикуляръ h , опущенный изъ середины другого непараллельнаго бока на данный, равенъ $2\frac{2}{3}$ фута.

343. Найти площадь треугольника по тремъ его сторонамъ a , b и c . 1) $a=2$, $b=3$ и $c=4$; 2) $a=10$ метр.; $b=13$ метр. и $c=15$ метр.; 3) $a=1,5$ арш., $b=\frac{8}{5}$ саж. и $c=2,1$ фута; 4) $a=1$ саж., $b=\frac{5}{8}$ саж. и $c=1$ арш.

344. Найти площадь треуг. по сторонамъ a и b и прямой m_a .

345. Найти площадь параллелограмма по діагонали k и неравнымъ сторонамъ a и b .

346. Найти площадь параллелограмма по диагоналям k и l и стороне a .

347. Найти площадь четырехугольника по его сторонам: $a=8$, $b=7$, $c=3$ и $d=4$ и диагонали $l=6$, проведенной из вершины угла между сторонами a и b .

348. В пятиугольнике $ABCDE$ проведена прямая XY ; на нее опущены перпендикуляры: AM , BN , CP , DQ и ER . Найти площадь этого пятиугольника, когда $AM=8$, $BN=10$, $CP=9$, $DQ=7$, $ER=4$, $MR=4$, $RN=1$, $NP=4$ и $PQ=3$.

349. Семьюугольник $ABCDEFG$ пересечем прямой XY так, что вершины A , G , F и E лежат по одну сторону прямой XY , а вершины B , C и D по другую сторону ее; на эту прямую опустим перпендикуляры: Aa , Bb , Cc , Dd , Ee , Ff и Gg . Вычислить площадь этого семьюугольника, когда $Aa=1$, $Bb=3$, $Cc=4$, $Dd=2$, $Ee=3$, $Ff=9$ и $Gg=7$; $ab=5$, $bg=2$, $gc=3$, $cf=4$, $fd=2$ и $de=5$.

350. Что сдѣлается съ площадью треугольника, если высоту его увеличимъ въ m разъ, а основаніе въ n разъ? Высоту увеличимъ въ m разъ, а основаніе уменьшимъ въ n разъ?

351. Высота h треугольника, у котораго основаніе b , уменьшена на a . На сколько надо увеличить основаніе треугольника, чтобы площадь его не измѣнилась? $h=3\frac{1}{2}$, $a=1,5$ и $b=5,6$.

352. Какъ измѣнится площадь треугольника, если его основаніе b увеличимъ на k , а высоту h на l . $b=\frac{1}{8}$ фута, $h=\frac{1}{2}$ фута, $k=0,4$ фута и $l=0,6$ фута.

353. Въ прямоугольника, у котораго стороны a и b , проведены прямыя, параллельныя его бокамъ, на разстояніи h . На сколько площадь прямоугольника, образуемаго этими прямыми, будетъ больше площади даннаго прямоугольника.

354. Данъ прямоугольникъ, у котораго стороны a и b . Въ прямоугольника проведены двѣ прямыя, параллельныя сторонамъ a , на разстояніи k отъ нихъ, и еще, внутри прямоугольника, двѣ прямыя, параллельныя сторонамъ b , тоже на разстояніи k отъ нихъ. Найти площадь прямоугольника, образуемаго проведенными прямыми. При какой величинѣ k полученный прямоугольникъ будетъ равновеликъ данному?

355. Данъ прямоугольникъ, у котораго стороны a и b . На какомъ разстояніи провести внутри прямоугольника прямая, параллельно

его бокамъ и на одинаковомъ разстояніи отъ нихъ, чтобы площадь прямоугольника, образуемаго проведенными прямыми, была на k^2 менѣе площади даннаго прямоугольника?

356. Высота треугольника на $k = 0,8$ арш. болѣе основанія. Если основаніе и высоту увеличимъ на $l = 5$ арш., то площадь треугольника увеличится на $m^2 = 36$ □ арш. Найти основаніе.

357. Данъ прямоугольный треугольникъ, у котораго катеты: $a = 1$ метру и $b = 3$ дециметр.; на бокахъ этого треугольника построимъ квадраты и соединимъ ихъ смежныя вершины. Найти площадь полученной фигуры.

358. Въ параллелограммѣ $ABCD$ дано основаніе $AD = a$ и высота $BK = h$; на AD отложимъ часть $AE = k$, гдѣ $k < a$. Найти на сторонѣ BC такую точку F , чтобы прямая EF образовала трапецію $ABEF$, равную $\frac{1}{n}$ площади параллелограмма. $a = 4,6$ фута, $h = 10$ фут., $k = 1\frac{7}{12}$ фута и $n = 4$.

359. Въ параллелограммѣ $ABCD$ на сторонѣ AD дана точка E въ разстояніи $AE = c$, гдѣ $c < a$. Изъ точки E проведена прямая EF , пересѣкающая сторону BC въ точкѣ F и дѣлящая параллелограммъ въ отношеніи $m : n$. Найти длину BF . 1) $a = 4,5$, $c = 1\frac{7}{15}$, $m = 11$ и $n = 4$; 2) $a = 3\frac{3}{5}$, $c = 2,7$, $m = 3$ и $n = 2$.

360. Въ параллелограммѣ $ABCD$ проведена прямая AE (точка E на сторонѣ BC), дѣлящая параллелограммъ въ отношеніи $m : n$. Найти BE , если $AB = a = 10$, $AD = b = 9,1$, $m = 18$ и $n = 17$.

361. Въ параллелограммѣ $ABCD$ проведены прямая AE и AF , дѣлящая параллелограммъ въ отношеніи $m : n : p$. Найти отрѣзки BE и DF (точка E на сторонѣ BC , а F на сторонѣ CD), если $AB = a = 4,5$, $AD = b = 3$, $m = 7$, $n = 5$ и $p = 3$.

362. Въ трапеціи $ABCD$ даны основанія: $AD = a$ и $BC = b$ и точка E на основаніи BC въ разстояніи k отъ точки B . Найти разстояніе отъ A до точки F пересѣченія основанія AD съ прямою EF , раздѣляющею трапецію на двѣ равномѣрныя части. $a = 6$ метр., $b = 4\frac{1}{2}$ метр. и $c = 1,3$ метра.

363. Въ трапеціи $ABCD$ даны основанія: $AD = a$ и $BC = b$, высота h и точка E на AD въ разстояніи k отъ A , гдѣ $k < a$. Найти на сторонѣ BC такую точку F , чтобы прямая EF отдѣляла отъ данной трапеціи часть $ABFE$, которой площадь равнялась бы $\frac{m}{n}$ площади данной трапеціи. $a = 4,7$ фута, $b = 0,9$ арш., $k = 1$ футу, $m = 3$ и $n = 5$.

364. Трапеція $ABCD$, гдѣ $BC \parallel AD$, раздѣлена прямою EF , параллельною AB , на части $ABFE$ и $EFCD$ въ отношеніи $m:n$. Найти BE , когда $AD=a=2\frac{4}{15}$ арш., $BC=b=1,2$ арш., $m=7$ и $n=6$.

365. Въ трапеціи $ABCD$, гдѣ $BC \parallel AD$, дано основаніе $AD=a$ и углы при немъ. Какъ велико должно быть основаніе BC этой трапеціи, чтобы, проведя прямую CE , параллельно AB , получили параллелограммъ $ABCE$, котораго площадь относилась бы къ площади трапеціи, какъ m къ n . Всегда ли возможна эта задача? $a=4,08$ арш., $n=13$ и $m=9$.

366. Два треугольника имѣютъ по равному углу; стороны заключающія эти углы, въ одномъ треугольникѣ: $a=16$ саж. и $b=4,5$ саж., а въ другомъ: $a'=3,2$ метра и $b'=9$ метр. Найти площадь второго изъ нихъ, когда площадь первого $q=3\frac{1}{2}$ □ саж.

367. Въ треугольникѣ ABC даны стороны: $AB=c$ и $AC=b$ и на сторонѣ AB точка D на разстояніи $AD=k$. Найти на сторонѣ AC такую точку E , чтобы площадь треугольника ADE относилась къ площади даннаго треугольника какъ m къ n . $b=2\frac{2}{15}$ саж., $c=4,5$ саж., $k=1,75$ саж., $m=7$ и $n=5$.

368. Въ двухъ подобныхъ треугольникахъ сходственные стороны суть: $a=7$ дюйм. и $a'=4$ дюйм. Найти площадь меньшаго изъ треугольниковъ, если площадь большаго равна $4,9$ □ дюйма.

369. Площади двухъ подобныхъ треугольниковъ суть: $q=11\frac{2}{11}$ □ фута и $q'=2\frac{2}{9}$ □ арш.; въ первомъ изъ нихъ одна изъ сторонъ равна $a=4,8$ фута. Найти въ другомъ треугольникѣ сторону, сходственную съ a .

370. Отношеніе площадей двухъ подобныхъ треугольниковъ равно отношенію $m=49$ къ $n=25$. Найти стороны первого изъ нихъ, когда стороны второго: $a=10$ фут., $b=12,4$ фута и $c=15$ футамъ.

371. Разность площадей двухъ квадратовъ равна $q=1\frac{1}{9}$ □ арш. Найти площади и стороны этихъ квадратовъ, если периметры ихъ пропорціональны числамъ: $m=5$ и $n=3$.

372. Площади двухъ квадратовъ относятся какъ $m=25$ къ $n=16$. Найти площадь и сторону каждаго изъ квадратовъ, если сумма ихъ периметровъ $s=1,8$ вершка.

373. Найти площадь равнобедреннаго треугольника по одной изъ равныхъ сторонъ $a=5$ дюйм. и высотѣ $h=3$ дюйм.

374. Найти площадь равнобедреннаго треугольника по одной изъ равныхъ сторонъ $a=0,5$ саж. и основанію $b=0,6$ саж.

376. Площадь равнобедреннаго треугольника, у котораго основаніе $= 0,4$ фута, равна $q = 2$ □ фут. Найти высоту и равную сторону.

376. Площадь равнобедреннаго треугольника $q = 4,2$ □ саж. и высота его $h = 2\frac{1}{2}$ саж. Найти стороны треугольника.

377. Найти сторону ромба, у котораго діагональ $d = 1\frac{1}{2}$ метра и площадь $q = 3,2$ □ метра.

378. Найти площадь прямоугольнаго треугольника по перпендикулярю $h = 1\frac{3}{4}$ саж., опущенному изъ вершины прямого угла на гипотенузу, и одному изъ отрѣзковъ $k = 5$ арш. гипотенузы.

379. Найти площадь прямоугольнаго треугольника по перпендикулярю $h = 8$ футамъ, опущенному изъ вершины на гипотенузу, и одному изъ катетовъ $a = 10$ футамъ.

380. Найти площадь правоуг. треугольника по катету $a = \frac{2}{3}$ арш. и прилежащему отрѣзку $k = 8$ верш. гипотенузы.

381. Найти площадь равнобедреннаго треугольника по основанію $b = 1$ арш. и перпендикулярю $h = 0,6$ арш., опущенному изъ конца основанія на противоположную сторону.

382. Изъ вершины прямого угла въ треугольникѣ, у котораго катеты: $a = 5$ метр. и $b = 8$ метр., опущенъ перпендикуляръ на гипотенузу, раздѣляющій данный треугольникъ на двѣ части. Найти площадь каждой части.

383. Въ треугольникѣ, у котораго стороны: $a = 2$ арш., $b = 1,6$ арш. и $c = 2,4$ арш., проведена равнодѣлящая угла, лежащаго противъ стороны a , которая раздѣлила данный треугольникъ на двѣ части. Найти площади этихъ частей.

384. Найти площадь равносторонняго треугольника по высотѣ $h = 2,25$ метра.

385. Сумма двухъ сторонъ треугольника равна $s = 120$ футамъ, а высоты, опущенныя на эти стороны, равны: $h = 17$ фут. и $h' = 13$ фут. Найти площадь треугольника.

386. Площадь треугольника $q = 1,56$ □ саж., а основаніе его на $a = 1,4$ саж. болѣе высоты. Найти основаніе треугольника.

387. Найти площадь треугольника по двумъ сторонамъ: $a = 1\frac{1}{2}$ фута и $b = 0,8$ фута и углу между ними въ 45° .

388. Найти площадь треугольника по двумъ сторонамъ: $a = 1\frac{1}{2}$ саж. и $b = 0,63$ саж. и углу между ними въ 30° .

389. Найти площадь треугольника по двумъ сторонамъ: $a = 1$ арш. и $b = 0,8$ арш. и углу между ними въ 60° .

390. Найти площадь треугольника по двумъ сторонамъ: $a=2$ и $b=4\sqrt{3}$ и углу между ними въ 120° .

391. Найти площадь ромба по сторонамъ $a=0,8$ саж. и углу въ 45° .

392. Найти площадь ромба по діагонали $d=\sqrt{2}$ и углу въ 60° , противолежащему ей.

393. По площади $q=0,12$ арш. ромба и углу его въ 120° , найти сторону ромба съ точностью до 0,01.

394. Найти площадь параллелограмма по двумъ сторонамъ: $a=2\frac{2}{11}$ фута и $b=1\frac{5}{6}$ фута и углу между ними въ 45° .

395. Площадь q параллелограмма равна $2,7$ □ саж.; одна изъ сторонъ его $a=1\frac{2}{7}$ саж. и одинъ изъ угловъ равенъ 60° . Найти другую сторону параллелограмма.

396. Въ треугольникѣ, у котораго основаніе $b=1,8$ арш. и высота $h=\frac{9}{25}$ арш., вписанъ квадратъ. Найти площадь квадрата.

397. Въ треугольникѣ ABC сторону AB раздѣлимъ въ точкѣ D въ отношеніи m къ n и чрезъ точку D проведемъ хорду DE , параллельно BC ; опустимъ перпендикуляры DF и EG на BC . Найти отношеніе площади прямоугольника $FDEG$ къ площади треугольника ABC .

398. Въ треугольникѣ ABC изъ точки D , взятой на сторонѣ AB , проведемъ хорду DE , параллельно BC , и хорду DF , параллельно AC . Въ какомъ отношеніи къ площади треугольника ABC находятся части, на которые раздѣлился данный треугольникъ прямыми DE и DF , если точка D дѣлитъ сторону AB въ отношеніи m къ n ?

399. Проведены прямыя, параллельно сторонамъ треугольника ABC , такъ, что каждая изъ нихъ дѣлитъ двѣ остальные стороны въ отношеніи m къ n , считая отъ вершины. Найти отношеніе площади треугольника, полученнаго въ пересѣченіи этихъ прямыхъ, къ площади даннаго.

400. Въ треугольникѣ ABC , въ которомъ сторона $AB=c$, проведена хорда DE , параллельно BC , такъ, что площадь треугольника ADE относится къ площади даннаго треугольника какъ m къ n . Найти AD , когда $c=3,12$ вершка, $m=16$ и $n=9$.

401. Въ треугольникѣ ABC , въ которомъ основаніе $BC=a$ и высота $AM=h$, проведена хорда DE , параллельно основанію, такъ, что площадь треугольника ADE равна q . Найти разстояніе отъ A до хорды DE , когда $a=2,2$ фута, $h=1\frac{5}{6}$ фута и $q=48,6$ □ фута.

402. Треугольникъ ABC , въ которомъ сторона $BC=a$, раздѣленъ

хордами DE и FG , параллельными BC , на три части въ отношеніи $m:n:p$. Найти AD и AF , когда $a=1\frac{1}{2}$ метра, $m=9$, $n=5$ и $p=2$.

403. Даны основанія трапеціи: $a=12$ фут. и $b=7$ фут. и высота $h=5$ футамъ. Найти положеніе прямой, параллельной основанію и дѣлящей трапецію на двѣ равномѣрныя части.

404. Трапеція $ABCD$, у которой основанія AD и BC , раздѣлена прямою EF на двѣ части: $AEFD$ и $EBCF$ въ отношеніи m къ n . Найти длину EF , когда $AD=a=4,5$ арш., $BC=b=1$ арш., $m=9$ и $n=16$.

405. Въ трапеціи $ABCD$, у которой основанія AD и BC , проведены хорды EF и GH , параллельно основаніямъ, такъ, что площади: $EBCF$, $GEFH$ и $AGHD$ находятся въ отношеніи $m:n:p$. Вычислить длины прямыхъ EF и GH , если $AD=a=5$ футамъ, $BC=b=4$ футамъ, $m=2$, $n=3$ и $p=5$.

406. Пятиугольникъ $ABCDE$ состоитъ изъ равносторонняго треугольника ABC и квадрата $ACDE$. Найти сторону AB , когда площадь q пятиугольника равна $3,25 \square$ арш.

407. Найти площадь прямоугольнаго треугольника по катету a и суммѣ s гипотенузы съ другимъ катетомъ.

408. Найти площадь треугольника по катету $a=1\frac{2}{3}$ фута и разности $d=0,5$ фута между гипотенузою и другимъ катетомъ.

409. Найти площадь равнобедреннаго треугольника по основанію b и суммѣ s одной изъ равныхъ сторонъ съ высотой.

410. Найти площадь равнобедреннаго треугольника по основанію b и разности d между одной изъ равныхъ сторонъ и высотой.

411. Найти площадь равнобедреннаго треугольника по периметру $2p=2,4$ саж. и высотѣ $h=\frac{4}{3}$ саж.

412. Найти площадь равнобедреннаго треугольника по тремъ его высотамъ: $h=2$ арш., $h=2$ арш. и $h'=3$ арш.

413. Найти площадь равносторонняго треугольника по разности $d=2$ фут. между стороною и высотой.

414. Найти площадь равносторонняго треугольника по суммѣ $2s$ его стороны съ высотой.

415. Найти площадь прямоугольнаго треугольника по гипотенузѣ c и суммѣ s его катетовъ.

416. Найти площадь прямоугольнаго треугольника по гипотенузѣ $c=9$ саж. и разности $d=5$ саж. между его катетами.

417. Найти площадь прямоугольника по сторонам a и суммѣ s діагонали съ другою изъ сторонъ.

418. Найти площадь прямоугольника по сторонам a и разности d между діагональю и другою стороною.

419. Найти площадь прямоугольника по діагонали $d=5,6$ верш. и периметру $2p=1\frac{1}{4}$ арш.

420. Найти площадь квадрата по суммѣ s его стороны съ діагональю. 1) $s=2$ дюйм.; 2) $s=1+\sqrt{2}$.

421. Найти площадь квадрата по суммѣ s его діагоналей съ периметромъ.

422. Найти площадь квадрата по разности d футъ между его діагональю и одною изъ сторонъ. 1) $d=0,25$; 2) $d=5\sqrt{2}-5$.

423. Найти площадь прямоугольнаго треугольника по гипотенузѣ $c=5$ саж. и отношенію $m=4$ къ $n=3$ его катетовъ.

424. Найти площадь прямоугольнаго треугольника по отношенію $m:n$ катетовъ и перпендикуляру h , опущенному изъ вершины прямого угла на гипотенузу. $m=5$, $n=4$ и $h=1,6$ фута.

425. Найти площадь равнобедреннаго треугольника по высотѣ $h=0,8$ арш. и отношенію $m=2$ къ $n=3$ его основанія къ одному изъ равныхъ боковъ.

426. Найти гипотенузу прямоугольнаго треугольника, котораго площадь $q=13,5$ □ саж. и разность между площадями квадратовъ, построенныхъ на катетахъ, равна $s=2$ □ саж.

427. Площадь ромба $q=2,53$ □ арш. и сторона его на $a=1,2$ арш. болѣе высоты. Найти сторону и высоту ромба.

428. Найти катеты прямоугольнаго треугольника по гипотенузѣ $a=1,3$ метра и площади $q=0,3$ □ метра.

429. Найти діагонали ромба по сторонамъ $a=3\frac{1}{2}$ дюйма и площади $q=2,1111\dots$ □ дюйма.

430. Найти стороны прямоугольника по діагонали $d=1,6$ фута и площади $q=0,72$ □ фута.

431. Найти стороны прямоугольнаго треугольника, котораго периметръ $2p$ и площадь q . 1) $2p=10$ метр. и $q=2$ □ метр; 2) $2p=12$ арш. и $q=6$ □ арш.

432. Зная одну изъ сторонъ a треугольника, его периметръ $2p$ и площадь q , найти другія стороны.

433. Въ прямоугольномъ треугольникѣ сумма катетовъ равна

$a=28$ футамъ, а сумма гипотенузы съ меньшимъ изъ катетовъ равна $b=32$ футамъ. Найти его площадь и периметръ.

434. Въ прямоугольномъ треугольникѣ периметръ болѣе гипотенузы на $a=28$ саж., а гипотенуза болѣе одного изъ катетовъ на $b=8$ саж. Найти площадь треугольника.

435. Найти площадь треугольника по периметру $2p=40$ метр., сторонѣ $a=10$ метрамъ и высотѣ $h=6$ метрамъ, соотвѣтствующей одной изъ остальныхъ сторонъ.

436. Найти площадь треугольника по двумъ сторонамъ a и b и длинѣ прямой l , раздѣляющей пополамъ уголъ между ними и ограниченной противолежащею стороною. $a=6$, $b=9$ и $l=4\sqrt{3}$.

437. Найти площадь треугольника по основанію a , суммѣ s и отношенію $m:n$ двухъ другихъ его сторонъ.

Найти площадь треугольника (438—442), когда дано:

438. a , b и m_c . 439. a , m_a и m_b .

440. a , m_b и m_c . 441. m_a , m_b и m_c . 442. h_a , h_b и h_c .

443. На сторонахъ AB , BC и CA въ треугольникѣ ABC отложимъ части: $AC'=BA'=CB'=d$. Найти отношеніе площадей треугольниковъ $A'B'C'$ и ABC .

444. На сторонахъ треугольника ABC , въ которомъ $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$, даны точки D , E и F , дѣлящія ихъ соотвѣственно на отрѣзки: a_1 и a_2 , b_1 и b_2 , c_1 и c_2 . Найти отношеніе площадей треугольниковъ DEF и ABC .

445. Рѣшить предыдущую задачу, когда D и E лежатъ на сторонахъ BC и AC , а F на продолженіи стороны AB за точку B ? Когда D лежитъ на сторонѣ BC , а E и F на продолженіяхъ другихъ сторонъ? Когда D , E и F лежатъ на продолженіяхъ сторонъ?

446. Данъ треугольникъ ABC , въ которомъ $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$. Продолжимъ сторону BC на $CD=a$; сторону CA на $AE=b$ и сторону AB на $BF=c$. Найти отношеніе площадей треугольниковъ DEF и ABC .

447. О точка пересѣченія медианъ въ треугольникѣ ABC ; AO , BO и CO продолжимъ такъ, чтобы $AD=l$, AO , $BE=m$, BO и $CF=n$, CO . Найти такія величины для l , m и n , чтобы стороны треугольника DEF проходили чрезъ точки A , B и C .

448. Найти площадь четырехугольника, когда даны диагональ k и l и две прямые m и n , соединяющія середины противоположныхъ боковъ.

449. Найти площадь вписаннаго въ кругъ четырехугольника, у котораго даны стороны: $a=3$ футамъ, $b=4$ футамъ, $c=5$ футамъ и $d=6$ футамъ.

450. Найти площадь трапеціи, у которой бока равны a , b , c и d , гдѣ b и d ея основанія.

451. Найти радіусъ вписаннаго круга въ треугольникъ, у котораго стороны: $a=2$ саж., $b=5$ саж. и $c=3$ саж.

452. По сторонамъ треугольника: $a=4$ метр., $b=3$ метр. и $c=2$ метр., найти радіусъ круга, описаннаго около него.

453. По сторонамъ треугольника: $a=0,4$ арш., $b=0,6$ арш. и $c=0,8$ арш., найти радіусы вѣвписанныхъ круговъ.

454. Найти высоту h_a треугольника по r радіусу вписаннаго круга и r_a радіусу вѣвписаннаго круга, касающагося стороны a .

455. Найти высоту h_a треугольника по радіусамъ r_b и r_c вѣвписанныхъ круговъ, касающихся сторонъ b и c .

456. Найти площадь треугольника по радіусамъ вписаннаго и вѣвписаннаго круговъ. $r=1,8$ саж., $r_a=3\frac{1}{9}$ саж., $r_b=1\frac{3}{7}$ саж. и $r_c=3,125$ саж.

457. Въ треугольникъ вписаны три круга, касающіеся между собою и сторонъ треугольника. Найти площадь треугольника, когда разстоянія между точками касанія на каждой изъ сторонъ треугольника равны, соотвѣтственно, a , b и c .

Найти площади правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ радіуса r (458—463):

458. Треугольника; 459. Квadrата;

460. Пятиугольника; 461. Шестиугольника при $r=2$ арш.;

462. Восьмугульника; 463. Десятиугольника при $r=0,8$ фута.

Найти площади правильныхъ многоугольниковъ, описанныхъ около круга радіуса r (464—469):

464. Треугольника при $r=3$ футамъ; 465. Квadrата;

466. Пятиугольника; 467. Шестиугольника;

468. Восьмугульника; 469. Десятиугольника.

Найти площади правильныхъ многоуг. по сторонѣ a (470—475):

470. Треугольника; 471. Пятиугольника;

472. Шестиугольника; 473. Восьмугульника;

474. Десятиугольника; 475. Двѣнадцатиугольника при $a=1\frac{1}{2}$ арш.

По данной площади q правильнаго многоугольника, найти сторону:

476. Треугольника; 477. Шестиугольника;
478. Восьмиугольника; 479. Двѣнадцатиугольника.

По данной площади q правильнаго многоугольника, найти радіусъ описаннаго круга около:

480. Пятиугольника; 481. Восьмиугольника; 482. Десятиугольника.

483. Найти отношеніе между площадями правильныхъ треугольниковъ, вписаннаго и описаннаго около круга радіуса r .

484. Зная площади s и s_1 правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ о n и $2n$ сторонахъ, найти площадь s_2 правильнаго вписаннаго многоугольника о $4n$ сторонахъ.

485. Если въ правильномъ шестиугольникѣ проведемъ послѣдовательно діагонали, стягивающія по двѣ смежныхъ стороны, то, въ пересѣченіи діагоналей, получимъ правильный шестиугольникъ. Вычислить площадь этого шестиугольника въ зависимости отъ площади s даннаго.

486. Въ правильномъ многоугольникѣ проведемъ послѣдовательно діагонали, стягивающія по двѣ смежныхъ стороны, которыя въ пересѣченіи дадутъ правильный многоугольникъ того же числа сторонъ, какъ данный. Найти площадь полученнаго многоугольника.

487. Раздѣлимъ окружность радіуса r на 10 равныхъ частей, и, идя по одному направленію, соединимъ первую точку съ четвертой, четвертую съ седьмой, седьмую съ десятой, десятую съ третьей и т. д.; тогда получимъ правильный двадцатиугольникъ съ десятью входящими и десятью выходящими углами. Найти площадь этого двадцатиугольника.

488. Найти площадь круга по радіусу r . 1) $r=1\frac{1}{2}$ метра, $\pi=\frac{22}{7}$;
2) $r=1$ саж. + 2 вершка, $\pi=3,14159$; 3) $r=2,5$ арш. и $\pi=3,14$.

489. По площади q круга, найти радіусъ этого круга. 1) $q=2\frac{19}{22}$ □ саж., $\pi=\frac{22}{7}$; 2) $q=4$ □ футъ, $\pi=3,14$; 3) $q=1$ □ арш., съ точн. до 0,001.

490. Найти радіусъ круга, котораго площадь въ $m=6$ разъ больше площади круга радіуса $r=1,5$ метра.

491. Найти радіусъ круга, котораго площадь въ $m=324$ разъ больше площади круга радіуса $r=2\frac{1}{2}$ фута.

492. Найти площадь круга, кот. окружность $c=4$ арш., а $\pi=\frac{22}{7}$.

493. Найти съ точностью до 0,001 окружность круга, котораго площадь $q=0,5$ □ футъ.

494. Если радіусъ $r=1\frac{1}{8}$ сажени даннаго круга уменьшимъ на $a=1\frac{1}{8}$ арш., то на сколько уменьшится площадь даннаго круга?

495. Если увеличимъ радіусъ r даннаго круга въ m разъ, то на сколько увеличится площадь даннаго круга?

496. Площадь круга $q=0,785 \square$ арш. должна быть увеличена въ $m=4$ разъ. На сколько должно удлинитъ радіусъ этого круга? $\pi=3,14$.

497. Найти радіусъ круга, равновеликаго суммѣ круговъ, у которыхъ радіусы: $r=1$ саж., $r_1=\frac{4}{5}$ арш., $r_2=1$ арш. и $r_3=2,5$ арш.

498. Найти радіусъ круга, равновеликаго разности круговъ радіусовъ: $R=3,4$ метра и $r=1,44$ метра.

499. Найти отношеніе площадей круговъ, которыхъ окружности: $C=4\frac{4}{15}$ метра и $c=3,2$ метра.

500. Найти отношеніе радіусовъ круговъ, которыхъ площади: $Q=148,12 \square$ саж. и $q=102\frac{21}{36} \square$ саж.

501. Найти радіусъ круга, равновеликаго квадрату, имѣющему бокъ $a=4$ вершкамъ. $\pi=3,14$.

502. Найти сторону квадрата съ точн. до 0,01, равновеликаго кругу, котораго радіусъ $r=10$ футамъ. $\pi=3,141593$.

503. Сумма окружности и діаметра ея равна a . Найти площадь этого круга.

✓ 504. Дана окружность, у которой радіусъ $r=2\sqrt{7}$, и на одномъ ея радіусѣ, какъ діаметрѣ, описана окружность. Найти площадь, ограниченную этими окружностями. $\pi=\frac{22}{7}$.

505. Найти площадь кольца между двумя окружностями, у которыхъ радіусы: $R=1$ саж. + 2 арш. и $r=2$ арш. + 8 вершк. $\pi=\frac{22}{7}$.

506. Сумма радіусовъ двухъ круговъ равна s , а отношеніе окружностей этихъ круговъ равно отношенію $m:n$. Найти площади круговъ.

✓ 507. Разность радіусовъ двухъ круговъ равна d , а отношеніе площадей этихъ круговъ равно $m:n$. Найти окружности круговъ.

508. Разность окружностей двухъ круговъ равна окружности радіуса $r=4\frac{2}{3}$ саж., а отношеніе радіусовъ этихъ круговъ равно отношенію $m=7$ къ $n=2$. Найти площади круговъ.

509. Площади двухъ круговъ относятся какъ $m=9$ къ $n=4$, а разность радіусовъ этихъ круговъ равна $a=4,5$ фута. Найти окружности круговъ. $\pi=3,14$.

510. Найти радіусы трехъ круговъ, которыхъ сумма равномѣрна кругу радіуса r , и радіусы которыхъ относятся какъ $m:n:p$.

511. Окружность одного изъ трехъ данныхъ круговъ равна суммѣ

окружностей двухъ другихъ. На сколько площадь одного круга болѣе суммы площадей двухъ другихъ круговъ.

512. По площади кругового кольца $s=12069,66$ □ фута, найти радіусъ меньшаго круга, когда извѣстно, что радіусъ большаго круга равенъ длинѣ окружности меньшаго круга.

513. Найти площадь сектора, котораго уголъ содержитъ $n^0=75^0$, а радіусъ $r=5$ арш. $\pi=\frac{22}{7}$.

514. Площадь сектора $q=220$ □ метрамъ, а уголъ сектора $n^0=28^0$. Найти радіусъ дуги сектора. $\pi=\frac{22}{7}$.

515. Площадь сектора равна q , а радіусъ равенъ r . Найти число градусовъ въ дугѣ, соответствующей этому сектору.

516. Секторъ, котораго дуга содержитъ 60^0 , равновеликъ кругу радіуса $r=2,3$ фута. Найти радіусъ сектора.

517. Изъ вершины O угла $XOY=150^0$ опишемъ дуги радіусами: $R=5$ арш. и $r=4$ арш., которыя пересѣкутъ бока угла въ точкахъ A и B , A' и B' . Найти площадь фигуры $ABB'A'$, если $\pi=3,14$.

518. Дуга сектора содержитъ 90^0 и болѣе $\frac{m}{n}=\frac{4}{7}$ части радіуса этой дуги на $b=3$ футамъ. Найти площадь сектора. $\pi=\frac{22}{7}$.

519. Окружность раздѣлена хордою въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Найти площадь сектора, соответствующаго меньшей изъ этихъ дугъ окружности.

520. Найти площадь сегмента между дугою въ a^0 , описанною радіусомъ r и хордою, соответствующей этой дугѣ. 1) $a=90^0$, $r=2$, $\pi=3,14$; 2) $a=120^0$, $r=1$, $\pi=3,14159$; 3) $a=60$, $r=6$, $\pi=3,14$.

521. Уголъ AOB сектора $AMBO$ равенъ 30^0 , а площадь треугольника AOB болѣе площади сегмента AMB на 2 □ арш. Вычислить радіусъ дуги AMB съ точн. до 0,001.

522. Изъ точки A , отстоящей отъ центра O круга на разстояніи діаметра этого круга, проведены къ нему касательныя AB и AC . Найти площадь, ограниченную AB , AC и дугою BC .

523. Изъ какой-либо точки C полуокружности ACB опустимъ перпендикуляръ CD на діаметръ AB и на частяхъ AD и DB этого діаметра опишемъ, внутри полукруга, полуокружности AED и DFB . Найти величину площади $ACBFDEA$.

524. Діаметръ AB даннаго круга раздѣлимъ въ точкѣ C въ крайнемъ и среднемъ отношеніи; на AC и BC опишемъ полуокружности ADC и BEC по разнымъ сторонамъ діаметра AB . Кривая $ADCEB$ раздѣлитъ площадь круга на двѣ части, которыхъ площади надо вычислить.

СТЕРЕОМЕТРІЯ.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

Теоремы и задачи на прямыя и плоскости въ пространствѣ. — Углы, образуемые прямыми и плоскостями.

А. Теоремы.

1. Доказать, что прямая, соединяющія середины смежныхъ сторонъ косога четырехугольника, т.-е. такого, стороны котораго не лежатъ въ одной плоскости, составляютъ параллелограммъ.

2. Во всякомъ косога четырехугольникѣ точка встрѣчи прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ боковъ, лежитъ на серединѣ прямой, соединяющей середины его діагоналей.

3. Дано нѣсколько прямыхъ по величинѣ, положенію и направленію; если ихъ перенести параллельно имъ самимъ и такъ, чтобы конецъ каждой изъ нихъ совпадалъ съ началомъ слѣдующей, то прямая, соединяющая начало первой съ концомъ послѣдней, называется *слагающей* данныхъ прямыхъ, которыя въ этомъ случаѣ называются *слагаемыми*; *сложить*, въ этомъ случаѣ, нѣсколько прямыхъ значитъ найти ихъ слагающую; *разложить прямую* — значитъ найти тѣ прямыя, изъ которыхъ она можетъ быть сложена. Принявъ эти опредѣленія, требуется доказать слѣдующія предложенія:

I) Слагающая нѣсколькихъ прямыхъ останется та же, въ какомъ бы порядкѣ не производили сложеніе.

II) Слагающая прямыхъ не измѣнится, если нѣкоторыя изъ нихъ будутъ замѣнены ихъ слагающими.

III) Если, не измѣняя положенія и направленія данныхъ прямыхъ, измѣнимъ ихъ величины въ одномъ и томъ же отношеніи, то слагающая, не измѣняя положенія и направленія, измѣнитъ величину въ томъ же отношеніи.

IV) Если, не измѣняя величины и положенія слагаемыхъ, измѣнимъ ихъ направленіе, то ихъ слагающая, сохраняя величину и положеніе, измѣнитъ направленіе.

V) Чтобы разложить прямую на двѣ слагаемыя, изъ которыхъ одна дана, достаточно первую сложить со второю, взятою въ направленіи, обратномъ данному.

4. Доказать, что перпендикуляры, опущенные изъ концовъ діагонали параллелограмма на плоскость, проходящую чрезъ другую его діагональ, равны между собою.

5. Перпендикуляры, опущенные изъ разныхъ точекъ прямой на одну и ту же плоскость, лежатъ въ одной плоскости.

6. Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ разныхъ точекъ прямой на плоскость, лежатъ на одной прямой.

7. Острые углы, составляемые параллельными прямыми съ одною и тою же плоскостью, равны между собою.

8. Двѣ точки будутъ равно удалены отъ плоскости, если наклонныя, проведенныя отъ каждой изъ нихъ подъ равными углами къ этой плоскости, равны между собою.

9. Если отъ равно удаленныхъ отъ плоскости точекъ проведены наклонныя подъ равными углами къ этой плоскости, то эти наклонныя равны между собою.

10. Если наклонныя, проведенныя отъ равно удаленныхъ точекъ отъ плоскости, будутъ равны, то онѣ съ этою плоскостью составляютъ равные углы.

11. Плоскость, проведенная параллельно двумъ прямымъ въ пространствѣ, чрезъ середину кратчайшаго разстоянія между ними, проходитъ чрезъ середины всѣхъ прямыхъ, соединяющихъ точки первой прямой съ точками второй.

12. Если стороны двухъ треугольниковъ, лежащихъ въ разныхъ плоскостяхъ, параллельны, то треугольники подобны, и прямыя, соединяющія соотвѣтственные вершины этихъ треугольниковъ, встрѣчаются въ одной точкѣ или параллельны. Распространить эту теорему на какіе бы то ни было многоугольники.

13. На плоскости M данъ прямоугольный въ A треугольникъ ABC и точка P внѣ плоскости M такъ, что прямая PA перпендикулярна къ AB и прямая PC перпендикулярна къ AC . Показать, что прямая PC перпендикулярна къ плоскости M .

14. На плоскости M лежатъ двѣ пересѣкающіяся пополамъ въ

точкѣ B прямая CD и EF , т.-е. $BE=BF$ и $BC=BD$; въ плоскости M дана точка A такъ, что $AE=AF$ и $AC=AD$. Показать, что прямая AB перпендикулярна къ плоскости M .

15. Повернемъ въ пространствѣ уголь AOB около прямой XY , параллельной равнодѣлящей этого угла. Доказать, что при всякомъ положеніи $A'O'B'$ вращающагося угла: 1) прямая OA и $O'A'$ не лежатъ въ одной плоскости, точно такъ же, какъ и прямая OB и $O'B'$; 2) прямая AO и $O'B'$ лежатъ въ одной плоскости, точно такъ же, какъ и прямая $O'A'$ и OB и 3) три какія-либо изъ прямыхъ: OA , OB , $O'A'$ и $O'B'$ не будутъ параллельны одной плоскости.

16. Дана прямая AB и плоскость P . Если AB раздѣлимъ въ точкѣ O въ отношеніи m къ n и изъ точекъ A , B и C опустимъ на плоскость P перпендикуляры AA' , BB' и CC' , то

$$(m+n) \cdot CC' = n \cdot AA' + m \cdot BB'.$$

17. Дана система точекъ: A , B , C ,.... и плоскость P . Можно всегда найти такую точку O , разстояніе отъ которой до плоскости P будетъ равно среднему арифметическому разстояній данныхъ точекъ до той же плоскости.

18. Плоскость, параллельная двумъ противоположнымъ сторонамъ косога четырехугольника, раздѣляетъ два другіе бока на части пропорціональныя.

19. Если сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки A на двѣ данныя плоскости, равна суммѣ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ другой точки B на тѣ же плоскости, то сумма останется та же и для всякой другой точки C , взятой на прямой AB . Распространить эту теорему на большее число плоскостей.

20. Даны три точки: A , B , C и двѣ плоскости P и Q . Если сумма двухъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ каждой точки на двѣ данныя плоскости, будетъ одна и та же для всѣхъ трехъ точекъ, то эта сумма останется та же и для всякой точки, взятой на плоскости ABC . Распространить эту теорему на большее число плоскостей.

21. Всякая точка, лежащая на равнодѣлящей плоскости двуграннаго угла, находится въ равныхъ разстояніяхъ отъ граней этого угла.

22. Уголь, образуемый перпендикулярами, опущенными изъ какой-либо точки на грани двуграннаго угла, будетъ или равенъ линей-

ному углу для этого двуграннаго угла или же служить ему дополненіемъ до двухъ прямыхъ.

23. Черезъ прямую, не перпендикулярную къ плоскости, можно провести только одну плоскость, перпендикулярную къ данной плоскости.

24. Три плоскости, проведенныя черезъ середины сторонъ треугольника, перпендикулярно къ соответствующимъ сторонамъ, пересекаются по одной прямой, кот. перпендикулярна къ плоскости и проходить черезъ центръ окружности, описанной около треугольника.

25. Если прямая параллельна плоскости, то кратчайшее разстояніе отъ нея до всякой не параллельной ей прямой, проведенной на плоскости, равно разстоянію данной прямой до плоскости.

26. Перпендикуляры, опущенные изъ точки на данныя плоскости, пересекающіяся по параллельнымъ прямымъ, лежатъ въ одной плоскости.

27. Во всякомъ трехгранномъ углѣ, равнодѣлящія плоскости его двугранныхъ угловъ пересекаются по одной прямой.

28. Во всякомъ трехгранномъ углѣ плоскости, перпендикулярныя къ гранямъ и проходящія черезъ равнодѣлящія плоскихъ угловъ граней, встрѣчаются по одной и той же прямой.

29. Во всякомъ трехгранномъ углѣ плоскости, перпендикулярныя къ гранямъ и проходящія черезъ ребра трехграннаго угла, пересекаются по одной прямой.

30. Во всякомъ трехгранномъ углѣ плоскости, проведенныя черезъ ребра и равнодѣлящія противоположныхъ граней, пересекаются по одной прямой.

31. Если въ плоскости каждой грани трехграннаго угла проведемъ черезъ вершины прямыя, перпендикулярныя противоположнымъ ребрамъ, то полученныя прямыя лежатъ въ одной плоскости.

32. Во всякомъ трехгранномъ углѣ сумма угловъ, образуемыхъ ребрами съ равнодѣлящими противоположныхъ угловъ, менѣе суммы плоскихъ угловъ.

33. Сумма угловъ, составленныхъ ребрами трехграннаго угла съ противоположными гранями, заключается между суммою плоскихъ угловъ и половиною этой суммы.

34. Если изъ точки, взятой внутри многограннаго угла, опустимъ перпендикуляры на всѣ его грани, то многогранный уголъ, составленный плоскостями, проведенными черезъ смежныя перпендикуляры, будетъ дополнительный данному.

35. Во всякомъ выпукломъ многогранникѣ о n граняхъ сумма двугранныхъ угловъ заключается между $2n$ и $2n - 4$ прямыми углами.

36. Пусть A, B и C точки, взятые произвольно на ребрахъ трехграннаго прямоугольнаго угла, и O проекція вершины S трехграннаго угла на плоскость ABC . Доказать, что площадь треугольника ASB есть средняя пропорціональная величина между площадями треугольниковъ ABC и OAB .

В. Задачи на построение.

37. Черезъ данную точку P провести прямую, которая встрѣчала бы двѣ данныя прямыя AB и CD , не лежащія въ одной плоскости.

38. Изъ данной или произвольной точки C прямой AB возставить къ ней перпендикуляръ.

39. Изъ точки P , лежащей внѣ прямой AB , опустить на нее перпендикуляръ.

40. Найти разстояніе отъ точки P , взятой внѣ прямой AB , до этой прямой.

41. Черезъ точку C , взятую на прямой AB , провести къ ней перпендикулярную плоскость.

42. Черезъ точку P , лежащую внѣ прямой AB , провести къ ней перпендикулярную плоскость.

43. Изъ точки A , лежащей на плоскости M , возставить къ ней перпендикуляръ.

44. Изъ точки P , лежащей внѣ плоскости M , опустить на нее перпендикуляръ.

45. Черезъ точку P , данную въ плоскости M , провести прямую, перпендикулярно къ прямой AB , лежащей внѣ плоскости.

46. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ A и B .

47. Дана въ пространствѣ прямая AB и двѣ точки C и D . Найти на данной прямой точку, равно отстоящую отъ данныхъ точекъ.

48. Начертить въ плоскости M прямую, которой каждая точка равно отстояла бы отъ двухъ данныхъ точекъ A и B , лежащихъ внѣ плоскости.

49. Найти геометрическое мѣсто точекъ равно отстоящихъ отъ трехъ данныхъ точекъ A, B и C , не лежащихъ на одной прямой.

50. Найти въ данной плоскости точку, равно отстоящую отъ трехъ данныхъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой.

51. Найти точку, отстоящую на a отъ трехъ данныхъ точекъ A , B и C , не лежащихъ на одной прямой.

52. Найти точку, равно отстоящую отъ четырехъ данныхъ точекъ A , B , C и D , не лежащихъ въ одной плоскости.

53. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ двухъ пересекающихся прямыхъ AB и AC , лежащихъ въ пространствѣ.

54. Даны двѣ прямыя AB и CD въ плоскости M и прямая EF , внѣ плоскости. Найти на прямой EF точку, равно отстоящую отъ прямыхъ AB и CD .

55. Найти на данной плоскости M прямую, которой каждая точка была бы равно удалена отъ двухъ пересекающихся прямыхъ AB и AC , лежащихъ въ пространствѣ.

56. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ трехъ пересекающихся прямыхъ: AB , BC и AC .

57. Начертить прямую, которая равно удалена отъ трехъ параллельныхъ прямыхъ: AB , CD и EF , не лежащихъ въ одной плоскости.

58. Начертить прямую, составляющую съ данною плоскостью M уголъ α .

59. Изъ данной точки P провести къ плоскости M прямую подъ даннымъ къ ней угломъ α .

60. Черезъ данную точку P провести прямую, параллельно данной прямой AB .

61. Черезъ точку P , взятую внѣ плоскости M , провести прямую, параллельно этой плоскости.

62. Черезъ данную точку P провести плоскость, параллельно данной прямой AB .

63. Черезъ данную точку P провести плоскость, перпендикулярную къ данной плоскости M .

64. Черезъ данную прямую AB провести плоскость, параллельную другой данной прямой CD .

65. Черезъ данную прямую AB провести плоскость, перпендикулярную къ данной плоскости M .

66. Черезъ данную точку P провести плоскость, параллельную двумъ даннымъ непересекающимся прямымъ AB и CD .

67. Черезъ данную точку P провести плоскость, параллельно данной плоскости M .

68. Найти геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ на разстояніи a отъ данной плоскости M .

69. Провести прямую, находящуюся на разстояніи a отъ плоскости M и на разстояніи b отъ плоскости N .

70. Провести прямую, параллельную данной прямой AB и встрѣчающую двѣ другія данныя прямыя CD и EF , не лежація въ одной плоскости.

71. Между двумя данными прямыми AB и CD провести прямую, параллельную данной плоскости M и которая имѣла бы данную длину a .

72. Найти кратчайшее разстояніе между двумя параллельными плоскостями.

73. Определить кратчайшее разстояніе между двумя данными прямыми AB и CD , не лежащими въ одной плоскости.

74. Провести прямую, перпендикулярную къ двумъ прямымъ AB и CD , не лежащимъ въ одной плоскости.

75. Найти на плоскости M геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ на l отъ данной точки P , находящейся внѣ этой плоскости.

76. Найти геометрическое мѣсто точекъ, разность квадратовъ разстояній отъ которыхъ до двухъ данныхъ точекъ A и B была бы величина постоянная.

77. Найти въ данной плоскости M геометрическое мѣсто точекъ, разность квадратовъ разстояній отъ которыхъ до точекъ A и B , лежащихъ внѣ плоскости, была бы величина постоянная.

78. Найти въ данной плоскости M геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ данная прямая AB , лежащая внѣ плоскости, была бы видна подъ прямымъ угломъ.

79. Найти на плоскости M геометрическое мѣсто такихъ точекъ, сумма квадратовъ разстояній отъ которыхъ до точекъ A и B , данныхъ внѣ плоскости, равнялась бы l^2 .

80. Даны точки A и B , лежація по одну сторону плоскости M . Найти на данной плоскости такую точку, чтобы прямыя, проведенныя отъ нея къ двумъ даннымъ точкамъ, составляли равные углы съ данною плоскостью.

81. Двугранный уголъ раздѣлить пополамъ.

82. Двугранный уголъ раздѣлить на 4, 8, 16 и т.д. равныхъ частей.

83. Черезъ точку P провести плоскость такъ, чтобы она составляла равные углы съ гранями двуграннаго угла.

84. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ двухъ пересекающихся плоскостей.

85. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ трехъ пересекающихся плоскостей M , N и P .

86. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ двухъ данныхъ плоскостей M и N и двухъ данныхъ точекъ A и B .

87. Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ двухъ данныхъ плоскостей M и N и двухъ прямыхъ AB и CD , лежащихъ въ плоскости Q .

88. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, отношеніе разстояній отъ которыхъ до двухъ данныхъ плоскостей M и N была величина постоянная.

89. Найти геометрическое мѣсто точекъ, сумма (или разность) разстояній отъ которыхъ до двухъ пересекающихся плоскостей M и N равна данной длинѣ l .

90. Пересѣчь плоскостью четырехгранный уголъ $SABCD$ такъ, чтобы въ сѣченіи съ гранями получились параллелограммъ.

91. Пересѣчь плоскостью прямой трехгранный уголъ такъ, чтобы въ сѣченіи съ гранями получились треугольникъ, равный данному.

92. Дана плоскость P и двѣ точки A и B по одну сторону ея. Найти на плоскости P такую точку M , чтобы сумма разстояній отъ M до точекъ A и B была наименьшая.

93. Дана плоскость P и двѣ точки A и B по разнымъ сторонамъ плоскости. Найти на этой плоскости такую точку M , чтобы разность разстояній отъ M до точекъ A и B была наименьшая.

94. Найти на прямой AB такую точку, сумма разстояній отъ которой до данныхъ плоскостей M и N была бы наименьшею.

95. Можно ли составить такой трехгранный уголъ, въ которомъ плоскіе углы были бы равны: 75° , 100° и 130° ?

96. Можно ли составить такой четырехгранный уголъ, въ которомъ плоскіе углы были бы равны: 96° , 108° , 100° и 120° ?

97. Можно ли составить такой пятигранный уголъ, въ которомъ плоскіе углы были бы равны: 5° , 6° , 7° , 8° и 9° ?

98. Проведены изъ одной точки прямыя, составляющія углы въ 160° , 113° и 137° . Лежатъ ли эти прямыя въ одной плоскости?

С. Задачи на вычисленіе.

99. Точки A и B находятся въ разстояніи a и b отъ плоскости M . Найти разстояніе до плоскости M точки C , дѣлящей прямую AB въ отношеніи m къ n .

100. Прямая, длиною $a=1,6$ фута, наклонена къ плоскости M подъ угломъ въ 45° . Найти проекцію этой длинны на плоскость M .

101. Изъ точки, отстоящей отъ плоскости M на $h=2\frac{1}{2}$ арш., проведена наклонная къ этой плоскости подъ угломъ въ 30° . Найти длину наклонной и ея проекцію на плоскость M .

102. Изъ точки, отстоящей отъ плоскости M на $h=16$, проведены двѣ наклонныя, которыхъ длины относятся какъ $m=18$ къ $n=30$. Вычислить длины этихъ наклонныхъ, если извѣстно, что первая изъ нихъ составляетъ съ плоскостью M уголъ, вдвое большій угла, составляемаго другою наклонною съ тою же плоскостью.

103. Даны двѣ параллельныя прямыя AB и CD , разстояніе между которыми a , и еще точка O , отстоящая отъ AB на b и отъ CD на c . Найти разстояніе отъ точки O до плоскости $ABCD$, когда $a=15$, $b=13$, $c=14$.

104. Даны двѣ параллельныя плоскости M и N и въ плоскости M треугольникъ ABC , котораго площадь q . Возьмемъ точку O внѣ этихъ плоскостей и проведемъ прямыя OA , OB и OC , которыя пересѣкутъ плоскость N въ точкахъ A' , B' и C' . Найти площадь треугольника $A'B'C'$, когда $OA:OA'=m:n$.

105. Плоскости M и N , пересѣкающіяся по прямой XY , составляютъ уголъ въ 45° . Возьмемъ на прямой XY двѣ точки A и B и еще третью точку C въ плоскости M ; изъ точки C опустимъ перпендикуляръ CD на плоскость N . Найти отношеніе площадей треугольниковъ ABC и ABD .

ОТДѢЛЪ СЕДЬМОЙ.

Задачи на многогранники.

А. Теоремы.

1. Во всякомъ параллелепипедѣ сумма квадратовъ всѣхъ его реберъ равна суммѣ квадратовъ всѣхъ его діагоналей.

2. Если изъ діагональныхъ плоскостей параллелепипеда двѣ перпендикулярны къ его основанію, то параллелепипедъ будетъ прямой.

3. Если двѣ діагональныя плоскости параллелепипеда, проведенныя чрезъ двѣ діагонали одной и той же грани, будутъ прямоугольниками, то параллелепипедъ будетъ прямоугольный.

4. Во всякой n -гранной призмѣ сумма двугранныхъ угловъ при боковыхъ ребрахъ равна $2d(n - 2)$.

5. Середины двухъ паръ противоположныхъ реберъ тетраэдра будутъ вершинами параллелограмма, котораго стороны соответственно равны половинамъ оставшихся реберъ.

6. Если въ тетрадрѣ каждая два противоположныхъ ребра равны между собою, то и всѣ грани будутъ также равны между собою.

7. Если двѣ пирамиды имѣютъ общее основаніе, а вершины лежатъ по разнымъ сторонамъ этого основанія, то прямая, соединяющая ихъ вершины, дѣлится плоскостью основанія въ отношеніи объемовъ пирамидъ.

8. Объемъ треугольной призмы измѣряется половиною произведенія площади боковой грани на разстояніе этой грани отъ противоположнаго ребра.

9. Если на трехъ параллельныхъ прямыхъ, не лежащихъ въ одной плоскости, отложимъ равныя части, то объемъ треугольной призмы, имѣющей эти отрезки боковыми ребрами, будетъ одинаковъ, гдѣ бы не откладывали части на данныхъ прямыхъ.

10. Доказать геометрически формулу относительно куба суммы или куба разности двухъ чиселъ.

11. Во всякой четырехугольной призмѣ сумма квадратовъ реберъ болѣе суммы квадратовъ діагоналей на восемь разъ взятый квадратъ прямой, соединяющей общія точки пересѣченія этихъ діагоналей, взятыхъ по двѣ. Приложить эту теорему къ параллелепипеду.

12. Во всякомъ шестигранникѣ сумма квадратовъ реберъ болѣе суммы квадратовъ діагоналей на учетверенную сумму квадратовъ четырехъ прямыхъ, соединяющихъ середины діагоналей многогранника съ серединами діагоналей двухъ противоположныхъ граней. Приложить эту теорему къ параллелепипеду.

13. Въ каждомъ тетрадрѣ сумма квадратовъ шести реберъ равна учетверенной суммѣ квадратовъ прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ реберъ.

14. Если въ тетрадрѣ двѣ высоты пересѣкаются, то и другія двѣ высоты также пересѣкаются.

15. Если проведемъ равнодѣлящія плоскихъ угловъ при вершинѣ

тетраэдра до пересѣченія съ ребрами основанія, то прямая, соединяющая эти точки съ противоположными вершинами основанія, пересѣкается въ одной точкѣ.

16. Плоскости, проведенныя перпендикулярно къ ребрамъ тетраэдра и черезъ середину ихъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

17. Равнодѣлящая плоскости двугранныхъ угловъ тетраэдра пересѣкается въ одной точкѣ.

18. Перпендикуляры, возставленные къ каждой грани тетраэдра изъ центровъ описанныхъ круговъ около граней, встрѣчаются въ одной точкѣ.

19. Если соединимъ вершины тетраэдра съ точками, пересѣченія медианъ на противоположныхъ граняхъ, то полученныя прямая пересѣкаются въ одной точкѣ; эта точка лежитъ на одной четверти каждой прямой отъ соответствующей грани.

20. Три прямая, соединяющія середины противоположныхъ реберъ тетраэдра, пересѣкаются въ одной точкѣ и взаимно дѣлятся пополамъ.

21. Разстояніе точки пересѣченія діагоналей параллелепипеда до какой-либо плоскости равно $\frac{1}{8}$ суммы разстояній ея восьми вершинъ до той же плоскости.

22. Если призма или пирамида пересѣчена плоскостью, не параллельною основанію, и стороны полученнаго сѣченія продолжены до встрѣчи съ соответствующими сторонами основанія, то эти точки пересѣченій лежатъ на одной прямой.

23. Равнодѣлящая плоскость двуграннаго угла въ тетраэдрѣ раздѣляетъ противоположное ребро на части пропорціональныя площадямъ граней, содержащихъ взятый двугранный уголъ. Разсмотримъ случай, когда возьмемъ равнодѣлящую плоскость внѣшняго двуграннаго угла.

24. Если черезъ прямую DE , соединяющую середины противоположныхъ реберъ SA и BC тетраэдра $SABC$, проведемъ какую-либо плоскость, которая пересѣчетъ ребро SB въ точкѣ F , а ребро AC въ точкѣ Q , то прямая FQ раздѣлится пополамъ прямою DE .

25. Если возьмемъ точку O внутри тетраэдра $SABC$ и прямая SO , AO , BO и CO продолжимъ до встрѣчи съ противоположными гранями въ точкахъ s , a , b и c , то $\frac{Os}{Ss} + \frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1$.

26. Плоскость, проходящая черезъ одно изъ реберъ тетраэдра

и середину противоположащаго ребра, дѣлить его на два равномѣрные тетраэдра.

27. Плоскость, проходящая черезъ середины двухъ противоположныхъ реберъ тетраэдра, дѣлить его на равномѣрные части.

28. Сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ на грани правильного тетраэдра изъ точки, взятой внутри его, равна высотѣ тетраэдра. Рассмотрѣть случай, когда взятая точка лежитъ внѣ тетраэдра.

29. Даны три параллельныя прямыя, не лежащія въ одной плоскости; на одной изъ нихъ отложимъ данную длину AB , а на другихъ возьмемъ произвольныя точки C и D . Доказать: 1) что объемъ треугольной пирамиды $ABCD$ постояненъ, какъ бы ни были взяты точки C и D и на какой бы изъ параллельныхъ прямыхъ не была отложена длина AB и 2) что этотъ объемъ пропорціоналенъ AB .

30. Въ тетраэдрѣ, имѣющемъ при вершинѣ прямыя двугранные углы, квадратъ площади основанія равенъ суммѣ квадратовъ площадей его боковыхъ граней.

31. Если усѣченную пирамиду съ параллельными основаніями пересѣчь плоскостью, параллельною основаніямъ и въ равномъ разстояніи отъ нихъ, то площадь сѣченія равна полусуммѣ среднего арифметическаго и средняго геометрическаго площадей обоихъ основаній.

32. Объемы двухъ тетраэдровъ, имѣющихъ общій трехгранный уголъ, относятся между собою, какъ произведенія реберъ, сходящихся въ вершинѣ этого трехграннаго угла.

33. Объемы двухъ тетраэдровъ, имѣющихъ по равному ребру и равному двугранному углу при этомъ ребрѣ, относятся какъ произведенія граней, содержащихъ эти двугранные углы.

34. Данъ тетраэдръ $SABC$. Возьмемъ точку O на грани ABC и черезъ нее проведемъ прямыя OD , OE и OF , параллельныя, соответственно, ребрамъ SA , SB и SC до граней ABC , SAC и SAB . Доказать, что $\frac{OD}{SA} + \frac{OE}{SB} + \frac{OF}{SC} = 1$.

35. Тетраэдръ $SABC$ пересѣчемъ плоскостью, которая дастъ въ сѣченіи треугольникъ DEF ; проведемъ діагонали четырехугольниковъ: $ABDE$, $BCFE$ и $ACFD$; эти діагонали пересѣкутся въ точкахъ G , H и K , а прямыя SG , SH и SK пересѣкутъ стороны основанія ABC въ точкахъ L , M и N . Доказать: 1) что прямыя AM , BN и CL пересѣкаются въ одной точкѣ O ,

лежащей на основаніи ABC , и 2) что прямыя SO , AH , BK и CG пересекаются въ одной точкѣ P . Разсмотрѣть случай, когда сѣченіе DEF будетъ параллельно основанію ABC .

36. Если пересѣчемъ уголъ S въ правильномъ октаэдрѣ плоскостью, дающей въ сѣченіи четырехугольникъ $ABCD$, то

$$\frac{1}{AS} + \frac{1}{CS} = \frac{1}{BS} + \frac{1}{DS}.$$

37. Изъ произвольной точки основанія пирамиды возставимъ перпендикуляръ, который встрѣтитъ грани пирамиды или ихъ продолженія. Доказать, что сумма разстояній этихъ точекъ встрѣчи до основанія пирамиды будетъ величина постоянная. Разсмотрѣть эту теорему въ томъ случаѣ, когда точка взята внѣ основанія пирамиды.

38. Прямая, заключенная между гранями даннаго многогранника, раздѣлена на нѣсколько частей; на каждой части, разсматриваемой какъ сходственной съ данною прямою, построимъ многогранникъ, подобный данному. Доказать, что поверхность даннаго многогранника равна квадрату суммы квадратныхъ корней изъ поверхностей построенныхъ многогранниковъ и что объемъ даннаго многогранника равенъ кубу суммы кубическихъ корней изъ объемовъ построенныхъ многогранниковъ.

В. Задачи на построение.

39. Найти геометрическое мѣсто вершинъ равномѣрныхъ пирамидъ, имѣющихъ одно и то же основаніе.

40. Данную пирамиду обратить въ другую, равномѣрную ей, но у которой одно изъ реберъ было бы перпендикулярно къ основанію.

41. Данный тетраэдръ обратить въ другой, равномѣрный ему, котораго боковыя ребра были бы равны.

42. Данную пирамиду обратить въ равномѣрную пирамиду, имѣющую боковыхъ граней одною менѣе.

43. Данную призму обратить въ равномѣрную ей призму, имѣющую боковыхъ граней одною менѣе.

44. Раздѣлить данный тетраэдръ пополамъ плоскостью, проходящею черезъ одно изъ реберъ.

45. Раздѣлить данный тетраэдръ въ отношеніи m къ n плоскостью, проходящею черезъ одно изъ реберъ.

46. Даны три прямыя, не лежащія по двѣ въ одной плоскости. Построить на нихъ параллелепипедъ.

47. Данный прямоугольный параллелепипедъ обратить въ равно-
великій ему параллелепипедъ, имѣющій данное основаніе.

48. Данный усѣченный параллелепипедъ обратить въ равномѣр-
ный ему параллелепипедъ.

49. Провести плоскость черезъ данную прямую, которая раздѣ-
лила бы данный параллелепипедъ на двѣ равновеликія части.

50. Раздѣлить данный параллелепипедъ въ отношеніи m къ n
плоскостью, параллельною одной изъ его граней.

51. Черезъ данную точку провести такъ сѣкущую плоскость
къ прямоугольному параллелепипеду, параллельно одному изъ его
реберъ, чтобы въ сѣченіи получились прямоугольникъ данной площади.

52. Пересѣчь кубъ $ABCDEFGH$ плоскостью такъ, чтобы въ сѣ-
ченіи получились правильный шестиугольникъ.

53. Пересѣчь кубъ плоскостью такъ, чтобы въ сѣченіи получились
квадратъ.

54. Пересѣчь кубъ плоскостью такъ, чтобы въ сѣченіи получились
правильный треугольникъ.²

55. Пересѣчь кубъ плоскостью такъ, чтобы въ сѣченіи получились
правильный треугольникъ, котораго площадь равна k^2 .

56. Найти въ тетраэдрѣ $SABC$ такую точку, чтобы плоскости,
проведенныя чрезъ нея и ребра тетраэдра, раздѣлили его на четыре
равновеликія части.

57. Пересѣчь тетраэдръ $SABC$ плоскостью такъ, чтобы въ сѣченіи
получились параллелограммъ, у котораго одна изъ сторонъ равна a .

58. Данную пирамиду пересѣчь плоскостью, параллельною основа-
нію, такъ чтобы въ сѣченіи получились многоугольникъ данной площади.

59. Данную пирамиду $SABCDE$ такъ пересѣчь плоскостью, па-
раллельною основанію, чтобы боковыя поверхности полученной и
данной пирамидъ были въ отношеніи m къ n .

60. Въ тетраэдрѣ $SABC$, въ которомъ даны только ребра, опре-
дѣлить, помощію циркуля, высоту тетраэдра и мѣсто точки пере-
сѣченія этой высоты съ основаніемъ его.

61. Пересѣчь тетраэдръ $SABC$ плоскостью, параллельною двумъ
противоположнымъ ребрамъ AC и SB такъ, чтобы площадь сѣченія
была наибольшая.

62. Въ тетраэдрѣ $SABC$ чрезъ середины двухъ противополож-
ныхъ реберъ SA и BC провести плоскость такъ, чтобы полученный
въ сѣченіи четырехугольникъ имѣлъ наибольшую площадь.

63. Раздѣлить правильную четырехугольную пирамиду на двѣ равномѣрныя части плоскостью, проходящею черезъ сторону основанія.
64. Построить правильный тетраэдръ по данному ребру.
65. Построить кубъ по данному ребру.
66. Построить правильный октаэдръ по данному ребру.
67. Построить правильный додекаэдръ по данному ребру.
68. Построить правильный икосаэдръ по данному ребру.

С. Задачи на вычисленіе.

Въ задачахъ отъ 69 до 73, a означаетъ ребро куба, d — его диагональ, D — мѣру диагональной плоскости, S' — полную поверхность и V — его объемъ.

69. Дано: $a = 1\frac{1}{3}$; найти: d , D , S' и V .

70. Дано: $d = 0,6$; найти: a , D , S' и V .

71. Дано: $D = 4\sqrt{2}$; найти: a , d , S' и V .

72. Дано: $S' = 1,5$; найти: a , d , D и V .

73. Дано: $V = 64$; найти: a , d , D и S' .

Въ задачахъ отъ 74 до 92, h означаетъ высоту прямоугольнаго параллелепипеда, B — площадь его основанія, S — боковую поверхность, S' — полную поверхность и V — его объемъ.

Въ девяти задачахъ, отъ 74 до 82, основаніе прямоугольнаго параллелепипеда будетъ квадратъ, у котораго сторона равна a .

74. Дано: $a = \frac{1}{3}$ и $h = \frac{1}{6}$; найти: d , S' и V .

75. Дано: $a = 0,8$ и $S' = 2$; найти: h , S и V .

76. Дано: $a = 3$ и $V = 3,6$; найти: h и S' .

77. Дано: $B = 3,24$ и $V = 9$; найти: a , h и S .

78. Дано: $d = 7,5$ и $h = 2,5$; найти: a , S' и V .

79. Дано: $h = 3$ и $S = 12$; найти: a , d и V .

80. Дано: $h = \frac{4}{9}$ и $V = 1$; найти: a , d и S .

81. Дано: $S = 8$ и $S' = 40$; найти: a , h и V .

82. Дано: $S = 5$ и $V = 10$; найти: a , h и S' .

Въ задачахъ отъ 83 до 92 основаніе прямоугольнаго параллелепипеда будетъ прямоугольникъ, у котораго стороны равны a и b .

83. Дано: $a = 2$, $b = 4$ и $h = 1,5$; найти: d , S' и V .

84. Дано: $a = 1$, $b = 1\frac{1}{2}$ и $S' = 3,6$; найти: h , D и V .

85. Дано: $a = 0,5$, $h = 4,5$ и $S' = 12$; найти: b , S и V .

86. Дано: $a = 1\frac{2}{3}$, $b = 4$ и $V = 40$; найти: h , S и D .

87. Дано: $a=2,8$, $h=5$ и $V=7$; найти: b и S .

88. Дано: $a=1,4$, $B=2,54$ и $S=1\frac{1}{2}$; найти: h и V .

89. Дано: $h=1\frac{1}{6}$, $B=5,4$ и $S=11,2$; найти: a , b и V .

90. Дано: $h=2$, $S=72$ и $V=34$; найти: a и b .

91. Дано: $a=3$, $S'=52$ и $V=24$; найти: b , h и s .

92. Дано: $S=4$, $S'=28$ и $V=3$; найти: a , b и h .

Въ задачахъ отъ 93 до 126, h означаетъ высоту прямой призмы, B — площадь ея основанія, S , S' и V — боковую поверхность, полную поверхность и объемъ прямой призмы.

Въ задачахъ отъ 93 до 100, основаніе прямой призмы будетъ равносторонній треугольникъ, у котораго сторона равна a .

93. Дано: $a=0,8$ и $h=1\frac{1}{6}$; найти: S , S' и V .

94. Дано: $a=8$ и $S=24$; найти: h , S' и V .

95. Дано: $a=\frac{1}{3}$ и $V=1$; найти: h , S и S' .

96. Дано: $h=1\frac{1}{2}$ и $S=6$; найти: a , S' и V .

97. Дано: $h=\frac{2}{3}$ и $S'=1$; найти: a и V .

98. Дано: $h=4$ и $V=3$; найти: a , B и S .

99. Дано: $S=2$ и $S'=8$; найти: a , h и V .

100. Дано: $S=12$ и $V=2$; найти: a , h и S' .

Въ задачахъ отъ 101 до 107, основаніе прямой призмы будетъ равнобедренный треугольникъ, у котораго основаніе b , а другіе бока c и s .

101. Дано: $b=1$, $c=\frac{5}{6}$ и $h=3$; найти: S' и V .

102. Дано: $b=2,5$, $c=3,25$ и $S'=25,5$; найти: h и V .

103. Дано: $b=30$, $c=17$ и $V=48$; найти: h и S .

104. Дано: $b=2$, $S=3$ и $S'=4,5$; найти: c и V .

105. Дано: $c=5$, $S=30$ и $S'=54$; найти: b и V .

106. Дано: $b=4$, $S=1,5$ и $V=1$; найти: c и h .

107. Дано: $c=\sqrt{2,5}$, $h=4$ и $V=3$; найти: b и S .

Въ задачахъ отъ 108 до 114, основаніе прямой треугольной призмы будетъ треугольникъ, у котораго стороны равны a , b и c .

108. Дано: $a=16$, $b=39$, $c=25$ и $h=0,25$; найти: S' и V .

109. Дано: $a=77$, $b=40$, $c=51$ и $V=1848$; найти: h и S' .

110. Дано: $a=12$, $b=39$, $h=\frac{5}{12}$ и $S=40$; найти: c и V .

111. Дано: $a=13$, $b=12$, $S=60$ и $S'=120$; найти: c , h и V .

112. Дано: $a=13$, $h=3$, $S=132$ и $S'=264$; найти: b , c и V .

113. Дано: $a=20$, $h=1\frac{1}{2}$, $S=48$ и $V=48$; найти: b и c .

114. Дано: $a=4$, $S=64$, $S'=112$ и $V=48$; найти: h , b и c .

Въ задачахъ отъ 115 до 122, основаніе прямого параллелепипеда будетъ ромбъ, у котораго сторона a , меньшая діагональ d и уголъ α , лежащій противъ діагонали d .

115. Дано: $a=15$, $d=24$ и $h=2$; найти: S' и V .

116. Дано: $a=7,5$, $d=9$ и $V=36$; найти: h и S' .

117. Дано: $a=5$, $h=2$ и $S'=88$; найти: d и V .

118. Дано: $a=2,5$, $S=10$ и $V=6$; найти: h и d .

119. Дано: $h=2$, $S=80$ и $V=192$; найти: a и d .

120. Дано: $S=10$, $S'=10\frac{1}{2}$ и $V=1$; найти: a и d .

121. Дано: $a=0,6$, $h=5$ и $\alpha=45^\circ$; найти: S' и V .

122. Дано: $a=1$, $S'=4$ и $\alpha=60^\circ$; найти: h и V .

Въ задачахъ отъ 123 до 126 основаніе прямого параллелепипеда параллелограммъ, у котораго стороны a и b и меньшая діагональ d .

123. Дано: $a=34$, $b=18$, $d=20$ и $h=0,25$; найти: S' и V .

124. Дано: $a=8$, $b=5$, $S=78$ и $V=72$; найти: h и d .

125. Дано: $a=3$, $S=80$, $S'=96$ и $V=32$; найти: h и b .

126. Дано: $a=13$, $d=15$, $h=1$ и $V=48$; найти: b .

127. Найти поверхность и объемъ прямой призмы, у которой высота $h=\frac{5}{12}$ фута, а основаніе — равнобочная трапеція, имѣющая параллельныя стороны: $a=10$ фут. и $b=4$ фут., а другія стороны c и c , равныя 5 футамъ.

128. Найти ребра и объемъ прямоугольнаго параллелепипеда, у котораго площади неравныхъ граней будутъ: $q=36$, $q'=4$ и $q''=9$.

129. Найти объемъ прямоугольнаго параллелепипеда, у которой поверхность $S=16$ кв. саж., одно изъ неравныхъ реберъ $a=0,4$ саж. и сумма двухъ другихъ $k=5$ саж.

130. Найти поверхность и объемъ прямоугольнаго параллелепипеда, у котораго неравныя ребра находятся въ отношеніи $m:n:p=5:4:3$, а діагональ $d=5$ арш.

131. Найти объемъ прямоугольнаго параллелепипеда, котораго поверхность $S=9$ кв. фут., а неравныя ребра пропорціональны числамъ: $m=15$, $n=10$ и $p=12$.

132. Найти поверхность прямоугольнаго параллелепипеда, котораго объемъ $V=64$ куб. вершкамъ, а измѣренія пропорціональны числамъ: $m=1$, $n=8$ и $p=27$.

133. Найти поверхность и діагональ прямоугольнаго параллелепипеда по діагоналямъ: a_1 , b_1 и c_1 его неравныхъ граней.

134. Найти поверхность и объемъ прямой призмы, у которой

высота $h=1,5$ метра, а основаніе — правильный шестиугольникъ, имѣющій сторону $a=\frac{2}{3}$ метра.

135. Объемъ шестиугольной правильной призмы $V=\frac{1}{3}$ куб. саж., а высота $h=1$ арш. Найти сторону основанія и поверхность.

136. Найти поверхность и объемъ правильной шестиугольной призмы, у которой сторона a основанія равна $\frac{2}{3}$ фута, а боковая грань равновелика основанію.

137. Найти поверхность и объемъ прямой призмы, у которой основаніе правильный треугольникъ, вписанный въ кругъ радіуса $r=2$ арш., а высота равна сторонѣ правильного шестиугольника, описаннаго около того же круга.

138. Найти поверхность и объемъ призмы, у которой основаніе правильный шестиугольникъ, вписанный въ кругъ радіуса $r=1$ метру, а высота равна сторонѣ квадрата, вписаннаго въ этотъ же кругъ.

139. Найти поверхность и объемъ прямой призмы, у которой основаніе правильный восьмиугольникъ, вписанный въ кругъ радіуса r , а высота равна сторонѣ квадрата, описаннаго около того же круга.

140. Найти поверхность и объемъ правильной восьмиугольной призмы, у кот. высота $h=6$ арш., а сторона основанія $a=8$ вершкамъ.

141. Найти поверхность и объемъ правильной десятиугольной призмы, у кот. высота $h=0,2$ фута, а сторона основанія $a=1$ футу.

142. Найти поверхность и объемъ прямой призмы, у которой высота $h=3$ саж., а основаніе — правильный пятиугольникъ, имѣющій сторону $a=2$ саж.

143. Найти поверхность и объемъ наклоннаго параллелепипеда. у котораго три смежныя ребра суть: $a=0,75$, $b=1\frac{1}{15}$ и $c=1$ и углы между ними въ 45° .

144. Найти объемъ наклоннаго параллелепипеда, у котораго три смежныя ребра равны: a , b и c и высоты граней относительно этихъ реберъ равны: h_1 , h_2 и h_3 .

145. Высота h пирамиды $=24$ метр., а площадь основанія $Q=48$ □ метр. Раздѣлимъ одно изъ ея боковыхъ реберъ на три части въ отношеніи $m:n:p=1:4:3$, считая отъ вершины, и черезъ точки дѣленій проведемъ плоскости, параллельныя основанію. Найти площади сѣченій и части, на которыя раздѣлится высота.

146. Въ пирамидѣ одно изъ боковыхъ реберъ $l=1\frac{5}{8}$ арш., высота $h=1,5$ саж. и площадь основанія $Q=18$ □ саж. На какомъ разстояніи отъ вершины провести плоскость, параллельную основанію,

чтобы площадь сѣченія равнялась $q=8 \square$ саж.? Найти также части, на которыя ребро l раздѣлится этою плоскостью.

147. Найти поверхность и объемъ пирамиды $ABCD$, у которой стороны основанія ABC будутъ: $AB=6$, $AC=15$ и $BC=11$, а боковое ребро AD перпендикулярно къ основанію и равно 8.

148. Найти объемъ пирамиды, имѣющей высоту, равную 0,05 саж., а основаніемъ трапецію, у которой параллельныя стороны равны 4 арш. и 25 арш., а непараллельныя равны 17 арш. и 10 арш.

149. Найти полную поверхность и объемъ пирамиды, у которой основаніе — прямоугольникъ со сторонами: $a=10$ саж. и $b=4$ саж., а вершина лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ къ этому прямоугольнику изъ пересѣченія его діагоналей, въ разстояніи $h=8$ футамъ отъ основанія.

150. На ребрахъ прямого трехграннаго угла S отложимъ части: $SA=a$, $SB=b$ и $SC=c$ и чрезъ точки A , B и C представимъ плоскость. Найти объемъ пирамиды $SABC$.

Въ слѣдующихъ задачахъ, отъ 151 до 187, a означаетъ сторону основанія правильной пирамиды, l — боковое ребро, g — высоту боковой грани, h — высоту пирамиды, S и S' — боковую и полную поверхность пирамиды и V — ея объемъ.

А. Треугольная правильная пирамида.

151. Дано: $a=6$ и $h=4$; найти: g , S и V .
152. Дано: $a=3$ и $l=2$; найти: h , S' и V .
153. Дано: $a=3$ и $g=1$; найти: l , h , S и V .
154. Дано: $a=\frac{1}{2}$ и $S=0,25$; найти: l , h и V .
155. Дано: $a=2$ и $V=1$; найти: h , g и S .
156. Дано: $g=1,5$ и $l=2,5$; найти: a , S и V .
157. Дано: $g=3$ и $S=36$; найти: h , l и V .
158. Дано: $l=4$ и $h=2$; найти: a , S и V .
159. Дано: $l=10$ и $S=144$; найти: a и g .
160. Дано: $h=1$ и $S=18$; найти: a , g и V .
161. Дано: $h=\sqrt{3}$ и $V=16$; найти: a , g и S .
162. Дано: $S'=2\sqrt{3}$ и $S=\sqrt{3}$; найти: a , g и V .

В. Четырехугольная правильная пирамида.

163. Дано: $a=40$ и $h=21$; найти: g , S и V .
164. Дано: $a=20$ и $g=26$; найти: h , S' и V .

165. Дано: $a=12$ и $l=10$; найти: h , g , S' и V .
 166. Дано: $a=4$ и $S'=72$; найти: g , h , l и V .
 167. Дано: $a=2$ и $V=1$; найти: h , g и S .
 168. Дано: $l=7$ и $h=1$; найти: a , g и V .
 169. Дано: $l=5$ и $g=4$; найти: a , S и V .
 170. Дано: $l=\sqrt{5}$ и $S=8$; найти: a , g и V .
 171. Дано: $h=5$ и $g=13$; найти: a , l , S' и V .
 172. Дано: $h=2$ и $S=6$; найти: a , g и V .
 173. Дано: $h=4$ и $V=48$; найти: a , l , g и S .
 174. Дано: $g=5$ и $S=28$; найти: a , h и V .
 175. Дано: $S=8$ и $S'=18$; найти: a , g , l и V .

С. Пятиугольная правильная пирамида.

176. Дано: $a=2$ и $l=2$; найти: g , h , S и V .
 177. Дано: $a=2$ и $h=3$; найти: S и V .
 178. Дано: $a=12$ и $S=300$; найти: g , l и h .
 179. Дано: $l=\sqrt{10}$ и $S=15$; найти: a , g и h .

D. Шестиугольная правильная пирамида.

180. Дано: $a=3$ и $l=6$; найти: S' и V .
 181. Дано: $a=1$ и $S=3$; найти: l , h и V .
 182. Дано: $a=2$ и $V=3$; найти: h и S .
 183. Дано: $l=1$ и $g=0,9$; найти: a , S и V .
 184. Дано: $g=1$ и $S=3$; найти: a , l и V .

E. Восмиугольная правильная пирамида.

185. Дано: $a=1$ и $h=1$; найти: S и V .

F. Десятиугольная правильная пирамида.

186. Дано: $a=0,2$ и $h=0,5$; найти: S и V .

G. Двѣнадцатиугольная правильная пирамида.

187. Дано: $a=1$ и $h=\frac{1}{2}$; найти: S и V .
 188. Основаніе правильной пирамиды есть шестиугольникъ, котораго сторона $a=3$ метр. Вычислить съ точностью до 0,001 высоту

этой пирамиды, если боковая ее поверхность въ $m=10$ разъ болѣе площади основанія.

189. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, у которой высота $h=2a$, а сторона основанія ABC равна a . На какомъ разстояніи отъ основанія провести плоскость $DEF \parallel ABC$ такъ, чтобы поверхность пирамиды $SDEF$ равнялась боковой поверхности усѣченной пирамиды $DEFABC$.

190. Основаніе правильной пирамиды есть правильный шестиугольникъ, описанный около круга радіуса $r=2$ саж., а высота равна боку правильного вписаннаго треугольника въ тотъ же кругъ. Найти боковую поверхность и объемъ пирамиды.

191. Найти поверхность правильной пирамиды, у которой основаніе — правильный треугольникъ, описанный около круга радіуса $r=0,25$ фута, а объемъ V равенъ тройному объему куба, у котораго ребро равно радіусу этого круга.

192. Въ правильной четырехугольной призмѣ вписана пирамида, у которой основаніе то же, что и у данной призмы, а вершина лежитъ въ центрѣ верхняго основанія. Найти объемъ этой пирамиды, когда извѣстно, что боковыя поверхности этихъ тѣлъ относятся, какъ $m=8$ къ $n=5$, и сторона a основанія равна 3 футамъ.

193. Найти боковую поверхность и объемъ правильной шестиугольной пирамиды, у которой высота $h=1$ метру и составляетъ съ высотой грани уголъ въ 30° .

194. Пирамида, у которой высота $h=2$ арш., раздѣлена плоскостью, параллельною основанію, на двѣ равномѣрныя части. Найти разстояніе этой плоскости до вершины пирамиды.

195. Боковая поверхность пирамиды, у которой высота h , раздѣлена плоскостями, параллельными основанію, на три части въ отношеніи $m:n:p$. Найти разстоянія этихъ плоскостей до вершины пирамиды.

196. Каждый уголъ куба, котораго ребро $a=3$ футамъ, срѣзанъ плоскостью, проходящею черезъ середины реберъ, выходящихъ изъ вершины срѣзываемаго угла. Найти объемъ оставшагося тѣла.

Въ слѣдующихъ задачахъ, отъ 197 до 212, a означаетъ сторону нижняго основанія правильной усѣченной пирамиды, a_1 — сторону верхняго основанія, m — апоному, l — боковое ребро, h — высоту, S , S' и V — боковую поверхность, полную поверхность и объемъ правильной усѣченной пирамиды,

А. Треугольная правильная усѣченная пирамида.

197. Дано: $a=10$, $a_1=4$ и $h=1$; найти: m , l , S и V .
 198. Дано: $a=6$, $a_1=2$ и $m=2$; найти: l , h , S и V .
 199. Дано: $a=8$, $a_1=2$ и $l=5$; найти: m , h , S' и V .
 200. Дано: $a=7$, $a_1=1$ и $S=36$; найти: m , h и V .
 201. Дано: $a=4$, $a_1=2$ и $V=7$; найти: h , l и S .

В. Четырехугольная правильная усѣченная пирамида.

202. Дано: $a=4$, $a_1=1$ и $h=2$; найти: l , m , S и V .
 203. Дано: $a=15$, $a_1=5$ и $m=13$; найти: h , l , S' и V .
 204. Дано: $a=6$, $a_1=2$ и $l=3$; найти: h , m , S и V .
 205. Дано: $a=10$, $a_1=2$ и $S=120$; найти: m , h , l и V .
 206. Дано: $a=9$, $a_1=1$ и $V=91$; найти: h , m , l и S .
 207. Дано: $a=20$, $S=816$ и $S'=1232$; найти: a_1 , m , h , l и V .
 208. Дано: $a=15$, $h=12$ и $V=1300$; найти: a_1 , m , l и S .
 209. Дано: $a=10$, $m=5$ и $S=120$; найти: a_1 , h , l и V .

С. Шестиугольная правильная усѣченная пирамида.

210. Дано: $a=20$, $a_1=4$ и $m=10$; найти: S и V .
 211. Дано: $a=3$, $S=24\sqrt{3}$ и $S'=39\sqrt{3}$; найти: a_1 , h и V .

Д. Восьмиугольная правильная усѣченная пирамида.

212. Дано: $a=2$, $a_1=1$ и $h=0,5$; найти: S и V .
 213. По высотѣ $h=3$ саж. усѣченной пирамиды съ параллельными основаніями, равными $B=1 \square$ арш. и $b=\frac{1}{9} \square$ арш., найти объемъ полной пирамиды и объемъ дополнительной части ея.
 214. Объемъ усѣченной пирамиды съ параллельными основаніями равенъ V , высота ея равна h и площадь большаго основанія равна B . Найти площадь другаго основанія и объемъ дополнительной части пирамиды. $V=19$, $h=3$ и $B=9$.
 215. Дана усѣченная пирамида съ параллельными основаніями $B=3 \square$ саж. и $b=3 \square$ арш.; чрезъ середину ея высоты проведена плоскость, параллельно основанію. Вычислить площадь сѣченія.
 216. Пирамида, у которой основаніе $B=625 \square$ арш. и высота $H=50$ арш., пересѣчена двумя плоскостями, параллельными основанію; часть пирамиды, заключенной между параллельными плоско-

стями, имѣетъ объемъ $V=336$ куб. арш. и высоту $h=4$ саж. Вычислить разстояніе нижняго сѣченія отъ вершины.

217. На какомъ разстояніи отъ основанія данной пирамиды провести плоскость, параллельно основанію, чтобы объемъ верхней части (малая пирамида) равнялся $\frac{1}{m} = \frac{1}{8}$ объема нижней части.

218. Дана усѣченная пирамида съ параллельными основаніями B и b и высотой h . На какомъ разстояніи отъ верхняго основанія пересѣчь пирамиду плоскостью, параллельною основаніямъ, чтобы въ сѣченіи получилась площадь, равная среднему арифметическому площадей основаній? $B=9$, $b=4$ и $h=2$.

219. Данныя тѣ же, что и въ предыдущей задачѣ; только площадь сѣченія должна равняться среднему геометрическому площадей основаній. $B=256$, $b=81$ и $h=14$.

220. Пирамида, у которой параллельныя основанія равны B и b , а высота равна h , раздѣлена плоскостью, параллельною основаніямъ, на двѣ равновеликія части. Найти разстояніе плоскости сѣченія до основанія b .

221. Высота усѣченной пирамиды, у которой параллельныя основанія: $B=12$ фут. и $b=3$ фут., раздѣлена на три равнѣрныя части и чрезъ точки дѣленій проведены плоскости, параллельно основаніямъ. Вычислить площади сѣченій.

222. Объемъ пирамиды, у которой параллельныя основанія равны B и b , а высота равна h , раздѣленъ плоскостью, параллельною основаніямъ, въ отношеніи m къ n . Найти разстояніе отъ плоскости сѣченія до основанія b .

× 223. Найти объемъ треугольной усѣченной призмы съ непараллельными основаніями, когда ея боковыя ребра перпендикулярны къ основанію и равны: $k=2$, $l=3$ и $m=4$, а стороны основанія равны $a=7,5$, $b=7$ и $c=6,5$.

224. Найти объемъ усѣченной призмы, у которой боковыя ребра перпендикулярны къ основанію и равны: $h_1=0,75$ саж., $h_2=2\frac{1}{2}$ арш. и $h_3=\frac{5}{12}$ саж., а въ основаніи правильный треугольникъ, котораго периметръ равенъ $h_1+h_2+h_3$.

225. Найти объемъ и боковую поверхность наклонной призмы, усѣченной непараллельно основанію, когда ея боковыя ребра суть: $k=1$, $l=2$ и $m=4$, а разстояніе между k и l равно $a=10$, между l и m равно $b=17$, а между m и n равно $c=21$.



226. Отношеніе поверхностей двухъ подобныхъ многогранниковъ равно отношенію m къ n , а сумма двухъ сходственныхъ реберъ равна k . Найти величины этихъ реберъ.

227. Отношеніе сходственныхъ реберъ двухъ подобныхъ многогранниковъ равно $m:n$, а разность ихъ поверхностей равна S . Найти поверхности этихъ многогранниковъ.

228. Даны объемы двухъ подобныхъ многогранниковъ: $V = 0,729$ куб. арш. и $V' = 8$ куб. арш. и ребро $a = 0,8$ сажени первого многогранника. Вычислить во второмъ многогранникѣ ребро, сходственное съ ребромъ a .

229. Даны сходственные ребра: $a = 0,5$ метра и $b = 2$ метра въ двухъ подобныхъ многогранникахъ. Найти объемъ второго многогранника, когда объемъ перваго $V = 1,25$ куб. фута.

230. Сумма объемовъ двухъ подобныхъ многогранниковъ равна V , а отношеніе сходственныхъ реберъ равно отношенію m къ n . Найти объемы этихъ многогранниковъ.

231. Отношеніе объемовъ двухъ подобныхъ многогранниковъ равно отношенію m къ n , а разность двухъ сходственныхъ реберъ равна d . Найти эти ребра.

232. Сумма объемовъ трехъ кубовъ, которыхъ ребра въ отношеніи $m:n:p$, равна V . Найти объемы этихъ кубовъ.

Найти поверхность и объемъ каждаго изъ правильныхъ многогранниковъ, у которыхъ ребра равны a :

233. Тетраедра. 234. Октаедра. 235. Икосаедра. 236. Додекаедра.

237. Найти поверхность и объемъ ромбоедра, у котораго диагонали граней суть k и l , гдѣ $k > l$.

238. Въ правильномъ октаедрѣ, у котораго ребра равны a , поставленъ кубъ такъ, что восемь его вершинъ лежатъ на ребрахъ октаедра, выходящихъ изъ двухъ противоположныхъ его вершинъ. Найти ребро куба.

239. Найти поверхность и объемъ правильного октаедра, у котораго вершины лежатъ въ центрахъ граней куба.

240. Данъ прямоугольный параллелепипедъ, у котораго измѣренія a , b и c . Найти объемъ и поверхность октаедра, котораго вершины лежатъ въ точкахъ пересѣченія діагоналей каждой грани.

ОТДѢЛЪ ВОСЬМОЙ..

Теоремы и задачи на круглыя тѣла и сферическіе треугольники*).

А. Теоремы.

1. Объемъ цилиндра равенъ произведенію площади образующаго прямоугольника на длину окружности, описанной точкою пересѣченія діагоналей этого прямоугольника, при вращеніи его около одной изъ сторонъ.

2. Объемъ цилиндра равенъ произведенію его боковой поверхности на половину радіуса.

3. Во всякой четырехгранной призмѣ, вписанной въ цилиндръ, сумма двухъ противоположныхъ двугранныхъ угловъ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ.

4. Двѣ плоскости, касательныя къ цилиндру, будутъ или параллельны другъ другу или пересѣкаться по прямой, параллельной оси.

5. Плоскость, проходящая черезъ ось цилиндра и прямую прикосновенія касательной плоскости къ цилиндру, перпендикулярна къ этой послѣдней.

6. Плоскость, проходящая черезъ прямую прикосновенія касательной плоскости къ цилиндру, перпендикулярно къ этой плоскости, проходитъ черезъ ось цилиндра.

7. Объемъ конуса равенъ произведенію его боковой поверхности на треть разстоянія центра основанія отъ образующей.

8. Объемъ конуса равенъ произведенію площади образующаго треугольника на длину окружности, описанной точкой пересѣченія медианъ треугольника, при вращеніи его около одной изъ сторонъ.

9. Въ конусъ, имѣющій радіусъ основанія R и высоту H , вписанъ цилиндръ, у котораго радіусъ основанія равенъ r и высота равна h . Показать, что $\frac{r}{R} + \frac{h}{H} = 1$.

10. Пересѣченіе двухъ шаровыхъ поверхностей будетъ окружность круга, котораго плоскость перпендикулярна къ прямой, соединяющей центры, и котораго центръ лежитъ также на этой прямой.

11. Если три шара пересѣкаются по два, то плоскости трехъ круговъ сѣченій пересѣкаются по прямой, перпендикулярной къ плоскости, содержащей центры этихъ шаровъ.

*) Въ этомъ задачникѣ разсматриваются только прямые цилиндры и прямые конусы съ круговыми основаніями.

12. Касательныя къ шару, проведенныя изъ точки, взятой внѣ его, равны и лежатъ на конической поверхности вращенія.

13. Если чрезъ точку, взятую внѣ шара, проведемъ къ нему сѣкущую, то произведение разстояній отъ данной точки до точекъ встрѣчи съ поверхностью шара будетъ постоянно для всѣхъ сѣкущихъ, проведенныхъ изъ данной точки.

14. Если полуокружность AB раздѣлимъ на три равныя части и чертежъ обернемъ около діаметра AB этой полуокружности, то поверхность полученнаго пояса равна суммѣ поверхностей сегментовъ.

15. На поверхности шара дана окружность малаго круга и точка; начертимъ окружности большихъ круговъ, проходящія чрезъ точку и касающіяся данной окружности. Показать, что дуги проведенныхъ окружностей, ограниченныхъ данной точкой и точками касанія, будутъ равны.

16. Около всякаго правильнаго многогранника можно описать шаровую поверхность.

17. Во всякій правильный многогранникъ можно вписать шаръ.

18. Если a, b, c и d площади граней тетраэдра, r и r_1 радіусы шаровъ, вписаннаго въ тетраэдръ и внѣвписаннаго въ него, касающагося грани a и V объемъ тетраэдра, то

$$r = \frac{3V}{a+b+c+d} \text{ и } r_1 = \frac{3V}{b+c+d-a}.$$

19. Если изъ точки, взятой на поверхности шара, какъ полюса*) опишемъ на ней окружность радіусомъ, равнымъ хордѣ, соответствующей третьей или шестой части четверти окружности большаго круга, то радіусъ полученнаго круга равенъ половинѣ радіуса шара или большей части радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

20. Сумма квадратовъ хордъ, отсѣченныхъ шаровою поверхностью на трехъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ, исходящихъ изъ одной точки, будетъ величина постоянная.

21. Сумма квадратовъ шести отрѣзковъ хордъ шара, проходящихъ черезъ данную точку и попарно перпендикулярныхъ между собою, будетъ величина постоянная.

*) Полюсомъ круга, полученнаго въ пересѣченіи шара плоскостью, называется конецъ діаметра шара, перпендикулярнаго въ плоскости круга.

22. Сумма квадратовъ проекцій трехъ перпендикулярныхъ радіусовъ шара на данную плоскость, равна удвоенному радіусу шара.

23. Если два круга расположены въ пространствѣ такъ, что ихъ центры будутъ проекціями одной и той же точки, а касательныя, проведенныя къ этимъ кругамъ изъ какой-либо точки пересѣченія плоскостей, въ которыхъ находятся круги, равны, то окружности круговъ лежатъ на одной шаровой поверхности.

24. Объемъ отъ обращенія треугольника около прямой, лежащей въ его плоскости и проходящей черезъ одну изъ вершинъ, измѣряется произведеніемъ площади треугольника на окружность, описанную, при вращеніи, точкою встрѣчи медианъ треугольника.

25. Данъ рядъ концентрическихъ окружностей, въ которыхъ проведены равныя хорды, параллельныя діаметру. Показать, что объемы тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія около діаметра соотвѣствующихъ круговыхъ сегментовъ, будутъ равны.

26. Поверхность равносторонняго цилиндра, описаннаго или вписаннаго въ шаръ, есть средняя пропорціональная величина между поверхностью шара и поверхностью равносторонняго конуса, описаннаго или вписаннаго въ этотъ шаръ.

27. Объемъ равносторонняго цилиндра, описаннаго или вписаннаго въ шаръ, есть средняя пропорціональная величина между объемомъ шара и объемомъ равносторонняго конуса, описаннаго или вписаннаго въ этотъ шаръ.

28. Поверхность шара есть средняя пропорціональная величина между поверхностями, полученными отъ обращенія около діаметра большаго круга, правильныхъ многоугольниковъ четнаго числа сторонъ, описаннаго и вписаннаго въ этотъ кругъ.

29. Если въ сферическомъ четырехугольникѣ противоположные бока равны, то 1) углы попарно равны; 2) діагонали также равны и дѣлятъ другъ друга пополамъ; 3) вершины лежатъ въ одной плоскости и 4) хорды, соотвѣствующія сторонамъ четырехугольника, составляютъ прямоугольникъ.

30. Въ сферическомъ ромбѣ діагонали встрѣчаются подъ прямымъ угломъ.

В. Задачи на построеніе.

31. Пересѣчь конусъ такъ плоскостью, параллельною основанію, чтобы въ сѣченіи получился кругъ, равный данному.

32. Пересѣчь цилиндръ такъ плоскостью, параллельною осн, чтобы площадь сѣченія была равновелика квадрату k^2 .

33. Черезъ точку, взятую на боковой поверхности цилиндра, провести касательную плоскость.

34. Черезъ точку, взятую на боковой поверхности конуса, провести касательную плоскость.

35. Изъ точки, взятой внѣ цилиндра, провести къ нему касательную плоскость.

36. Изъ точки, взятой внѣ конуса, провести къ нему касательную плоскость.

37. Раздѣлить въ отношеніи m къ n боковую поверхность цилиндра плоскостью, параллельною основанію.

38. Раздѣлить въ отношеніи m къ n объемъ цилиндра плоскостью, параллельною основанію.

39. Раздѣлить на n равныхъ частей боковую поверхность конуса плоскостями, параллельными основанію.

40. Раздѣлить въ отношеніи m къ n боковую поверхность конуса плоскостью, параллельною основанію.

41. Раздѣлить въ отношеніи $m=8$ къ $n=19$ объемъ конуса плоскостью, параллельною основанію.

42. Раздѣлить боковую поверхность цилиндра плоскостью, параллельною основанію, на такія двѣ части, чтобы средняя пропорціональная между ними равнялась площади сѣченія.

43. Найти кратчайшее и наибольшее разстоянія отъ точки A до поверхности шара O .

44. Найти кратчайшее и наибольшее разстоянія между прямою AB и поверхностью шара O .

45. Найти кратчайшее и наибольшее разстоянія между плоскостью M и поверхностью шара O .

46. Измѣрить длину прямой, соединяющей двѣ точки A и B , лежащія на поверхности шара O .

47. Изъ данной точки A на шарѣ O , какъ полюса, описать на его поверхности окружность радіусомъ r .

48. Найти построеніемъ радіусъ даннаго шара O , не опредѣляя положенія его центра.

49. Провести въ шарѣ O хорду длиною a , которая проходила бы чрезъ данную точку A и была бы параллельна плоскости M .

50. Найти въ шарѣ O геометрическое мѣсто серединъ хордъ, параллельныхъ данной прямой AB .

51. Найти въ шарѣ O геометрическое мѣсто серединъ хордъ, данной длины a , параллельныхъ данной прямой AB .

52. Найти въ шарѣ геометрическое мѣсто серединъ хордъ, длиною a .

53. Провести сѣкущую плоскость къ данному шару O такъ, чтобы въ сѣченіи получился кругъ данного радіуса r .

54. Найти въ шарѣ O геометрическое мѣсто центровъ круговъ, имѣющихъ одинаковую площадь.

55. Найти на шарѣ геометрическое мѣсто точекъ, равноудаленныхъ отъ данной точки.

56. Найти геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ отъ поверхности данного шара O на l .

57. Найти геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ отъ точки A на k и отъ точки B на l .

58. Найти геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ отъ поверхности одного данного шара на a и отъ поверхности другого данного шара на b .

59. Найти точку, отстоящую отъ поверхности шара O на a , отъ поверхности шара O' на b и отъ поверхности шара O'' на c .

60. Черезъ точку A , данную на поверхности шара O , провести къ нему касательную плоскость.

61. Черезъ точку A , данную на поверхности шара O , провести къ нему касательную прямую.

62. Провести касательную плоскость къ шару O , параллельно данной плоскости M .

63. Провести касательную плоскость къ шару, перпендикулярно къ данной плоскости.

64. Провести касательную плоскость къ шару подъ даннымъ угломъ къ данной плоскости.

65. Провести касательную плоскость къ шару O подъ угломъ α къ данной прямой AB .

66. Провести касательную прямую къ шару, параллельно данной прямой.

67. Провести касательную прямую къ шару O , встрѣчающую данную прямую AB подъ угломъ α .

68. Описать шаровую поверхность, проходящую чрезъ четыре данныя точки: A , B , C и D .

69. Описать даннымъ радіусомъ r шаровую поверхность, проходящую черезъ три данныя точки: A , B и C .

70. Описать шаровую поверхность даннымъ радиусомъ r и касающуюся плоскости M , въ данной на ней точкѣ A .

71. Изъ данной точки A описать шаровую поверхность, касающуюся данной плоскости M .

72. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ данного радиуса r , касающихся данной плоскости M .

73. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, касающихся прямой AB , въ данной на ней точкѣ C .

74. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ данного радиуса r , касающихся прямой AB , въ данной на ней точкѣ C .

75. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ данного радиуса r , касающихся данной прямой AB .

76. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, касающихся двухъ данныхъ прямыхъ.

77. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, касающихся трехъ данныхъ прямыхъ.

78. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, касающихся двухъ данныхъ плоскостей.

79. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ данного радиуса, которые касались бы двухъ пересѣкающихся плоскостей.

80. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, касающихся трехъ данныхъ плоскостей.

81. Изъ данной точки A описать шаровую поверхность, касающуюся данного шара O .

82. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ, касающихся данного шара O , въ данной на немъ точкѣ A .

83. Найти геометрическое мѣсто центровъ шаровъ радиуса r , касающагося данного шара O радиуса R .

84. Изъ точки A , данной внѣ шара O , провести къ нему касательную прямую.

85. Черезъ прямую AB , данную внѣ шара O , провести касательную плоскость къ шару.

86. Черезъ данную прямую провести сѣкущую плоскость къ шару такъ, чтобы она въ сѣченіи дала кругъ данного радиуса.

87. Найти геометрическое мѣсто вершинъ прямыхъ угловъ, опиравшихся на концы данной прямой.

88. Найти въ шарѣ геометрическое мѣсто центровъ круговъ дан-

наго радиуса r , полученныхъ отъ пересѣченія шара O плоскостями, проходящими черезъ данную точку A .

89. Найти въ шарѣ геометрическое мѣсто серединъ хордъ данной длины, проходящихъ черезъ данную точку.

90. Найти въ шарѣ O геометрическое мѣсто центровъ сѣченій, дѣлаемыхъ плоскостями, проходящими черезъ данную прямую AB .

91. Описать шаровую поверхность, касающуюся данного шара O и плоскости M , въ данной на ней точкѣ A .

92. Описать радиусомъ r шаровую поверхность, проходящую черезъ двѣ данныя точки A и B и касающуюся данной плоскости M .

93. Описать даннымъ радиусомъ шаровую поверхность, касающуюся данного шара и проходящую черезъ двѣ данныя точки.

94. Описать радиусомъ r шаровую поверхность, касающуюся двухъ данныхъ плоскостей M и N и проходящую чрезъ данную точку A .

95. Описать даннымъ радиусомъ шаровую поверхность, касающуюся двухъ данныхъ шаровъ и проходящую чрезъ данную точку.

96. Описать радиусомъ r шаровую поверхность, касающуюся трехъ данныхъ плоскостей: M , N и Q .

97. Описать радиусомъ r шаровую поверхность, касающуюся поверхностей трехъ данныхъ шаровъ: O , O' и O'' .

98. Описать радиусомъ r шаровую поверхность, проходящую чрезъ данную точку A и касающуюся данной плоскости M .

99. Описать даннымъ радиусомъ шаровую поверхность, проходящую чрезъ данную точку и касающуюся данного шара.

100. Описать радиусомъ r шаровую поверхность, касающуюся двухъ данныхъ плоскостей M и N и данного шара O .

101. Описать радиусомъ r шаровую поверхность, касающуюся данной плоскости M и двухъ данныхъ шаровъ O и O' .

102. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ данный шаръ видимъ подъ даннымъ угломъ.

103. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ два данныя шара O и O' видны подъ углами α и β .

104. Найти точку, изъ которой три данныя шара: O , O' и O'' видны подъ углами: α , β и γ .

105. Найти геометрическое мѣсто точекъ, сумма квадратовъ расстояній отъ которыхъ до двухъ данныхъ точекъ A и B постоянная и равна k^2 .

106. Даны три точки: A , B и C . Найти геометрическое мѣсто точекъ, сумма квадратовъ разстояній отъ которыхъ до A и B равна k^2 и до B и C равна l^2 .

107. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, сумма квадратовъ разстояній отъ которыхъ до n данныхъ точекъ: A, B, C, \dots постоянна.

108. Найти геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія отъ которыхъ до данныхъ точекъ A и B находятся въ отношеніи m къ n .

109. Найти геометрическое мѣсто точекъ, квадраты разстояній отъ которыхъ до данныхъ точекъ A и B въ отношеніи k къ l .

110. Отдѣлить на поверхности шара O такой шаровой сегментъ, котораго поверхность была бы вдвое болѣе поверхности, произшедшей отъ вращенія около оси сегмента той хорды, которая соотвѣтствуетъ образующей дугѣ сегмента.

111. Раздѣлить въ крайнемъ и среднемъ отношеніи поверхность пояса плоскостью, параллельною его основаніямъ.

112. Пересѣчь шаръ O плоскостью такъ, чтобы площадь сѣченія была равна разности поверхностей полученныхъ сегментовъ.

113. Провести въ шарѣ O сѣкущую плоскость такъ, чтобы поверхность одного изъ полученныхъ сегментовъ была въ m разъ болѣе боковой поверхности конуса, вмѣщающаго основаніе одинаковое съ основаніемъ сегмента, а вершину въ центрѣ шара.

114. Пересѣчь шаръ плоскостью такъ, чтобы боковая поверхность конуса, вписаннаго въ одинъ изъ полученныхъ сегментовъ, равнялась поверхности другого сегмента.

115. Черезъ данную точку A провести въ шарѣ O три хорды, попарно перпендикулярныя и величины которыхъ были бы пропорціональны числамъ: m , n и p .

116. Черезъ данную точку A провести три взаимно перпендикулярныя плоскости, которыя пересѣкали бы шаръ O по кругамъ, площади которыхъ были бы пропорціональны числамъ: m , n и p .

117. Описать около тетраэдра шаровую поверхность.

118. Вписать шаръ въ данный тетраэдръ.

119. Описать шаровую поверхность около правильнаго многогранника.

120. Вписать шаръ въ данный правильный многогранникъ.

121. Найти полюсъ для даннаго сѣченія шара помощью циркуля.

122. Изъ данной точки на шарѣ, какъ полюса, описать на его поверхности окружность даннаго радіуса.

123. Описать даннымъ радиусомъ на поверхности шара окружность, которая была бы параллельна данной окружности, начерченной на томъ же шарѣ.

124. Изъ данной точки на шарѣ, какъ полюса, описать на его поверхности окружность большаго круга.

125. Начертить окружность большаго круга, проходящую черезъ точки *A* и *B*, данныя на поверхности шара.

126. Измѣрить кратчайшее разстояніе на поверхности шара между двумя данными точками.

127. Провести на шарѣ дугу большаго круга, перпендикулярно къ дугѣ даннаго большаго круга.

128. Провести на шарѣ дугу большаго круга подъ даннымъ угломъ къ данной окружности большаго круга.

129. Раздѣлить окружностью большаго круга дугу, проведенную на шарѣ, на двѣ равныя части.

130. Раздѣлить дугу, проведенную на шарѣ, на 4, 8, 16... равныхъ частей окружностями большихъ круговъ.

131. На поверхности шара дана точка и окружность. Начертить окружность большаго круга, проходящую чрезъ точку и касающуюся окружности.

132. Изъ данной точки на шарѣ начертить окружность, касающуюся окружности, данной на поверхности шара.

133. Раздѣлить пополамъ уголъ, составленный двумя дугами большихъ круговъ, описанныхъ на поверхности шара.

134. Даны на шарѣ три пересекающіяся попарно дуги большихъ круговъ. Описать окружность, проходящую черезъ точки ихъ пересѣченія.

135. Даны на шарѣ три пересекающіяся попарно дуги большихъ круговъ. Начертить окружность, касающуюся этихъ дугъ.

136. Начертить на шарѣ окружность, которая касалась бы двухъ дугъ большихъ круговъ и проходила бы чрезъ точку, лежащую на поверхности шара.

137. Начертить на шарѣ окружность большаго круга, касающуюся двухъ окружностей круговъ, данныхъ на поверхности шара.

138. Начертить на шарѣ окружность, проходящую черезъ двѣ точки и касающуюся круга, даннаго на поверхности шара.

139. Описать кругъ около даннаго сферическаго треугольника.

140. Вписать кругъ въ данный сферическій треугольникъ.

141. Построить сферическій треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу между ними.

142. Построить сферическій треугольникъ по двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ.

143. Построить сферическій треугольникъ по тремъ сторонамъ.

144. Построить сферическій треугольникъ по сторонамъ и двумъ прилежащимъ угламъ.

145. Построить сферическій треугольникъ по двумъ угламъ и сторонѣ, противолежащей одному изъ нихъ.

146. Построить сферическій треугольникъ по тремъ угламъ.

147. Построить сферическій треугольникъ по сторонамъ, прилежащему къ ней углу и суммѣ другихъ сторонъ.

148. Построить сферическій треугольникъ по сторонамъ, прилежащему къ ней углу и разности другихъ сторонъ.

149. Построить сферическій треугольникъ по двумъ сторонамъ и высотѣ, относительной одной изъ нихъ.

150. Построить сферическій треугольникъ по углу и двумъ высотамъ, соотвѣствующимъ сторонамъ даннаго угла.

151. Найти геометрическое мѣсто вершинъ сферическихъ треугольниковъ, построенныхъ на данномъ основаніи и въ которыхъ разность между суммою угловъ при основаніи и угломъ при вершинѣ постоянна.

152. Найти геометрическое мѣсто вершинъ сферическихъ треугольниковъ, имѣющихъ то же основаніе и ту же площадь.

153. Обратить сферическій многоугольникъ въ равновеликій ему многоугольникъ, имѣющій сторонъ одною менѣе, чѣмъ въ данномъ.

С. Задачи на вычисленіе.

154. Въ цилиндрѣ, имѣющемъ радіусъ основанія $r=3,25$ саж. и высоту $h=6\frac{1}{2}$ арш., проведена плоскость, параллельно оси цилиндра, на разстояніи $k=1,25$ саж. Найти площадь сѣченія.

155. Въ цилиндрѣ, имѣющемъ радіусъ основанія $r=3\frac{1}{16}$ фута и высоту $h=6$ фут., проведена плоскость, параллельно оси цилиндра, которая дала въ сѣченіи площадь $q=27,5$ кв. фута. Найти разстояніе плоскости сѣченія до оси цилиндра.

Въ слѣдующихъ задачахъ, отъ 156 до 164, буква r означаетъ радіусъ основанія цилиндра; h — высоту; S — боковую поверхность, S' — полную поверхность и V — объемъ цилиндра.

156. Дано: $r=0,7$ и $h=1\frac{2}{3}$; найти: S , S' и V ($\pi=3\frac{1}{2}$).
157. Дано: $r=0,5$ и $S=15,7$; найти: h , S' и V ($\pi=3,14$).
158. Дано: $r=1$ и $S'=7\frac{7}{2}$; найти: h , S и V ($\pi=3\frac{1}{2}$).
159. Дано: $r=3,5$ и $V=154$; найти: h , S и S' ($\pi=3\frac{1}{2}$).
160. Дано: $h=\frac{10}{21}$ и $S=6$; найти: r и V ($\pi=\frac{22}{7}$).
161. Дано: $h=2$ и $S'=33$; найти: r , S и V ($\pi=3\frac{1}{2}$).
162. Дано: $h=4$ и $V=0,36\pi$; найти: r , S и S' .
163. Дано: $S=4$ и $S'=161$; найти: r , h и V ($\pi=3,14$).
164. Дано: $S=11$ и $V=0,875$; найти: r , h и S' ($\pi=3\frac{1}{2}$).
165. Боковая поверхность цилиндра $S=1,72$ □ фута и длина окружности основания равна $l=6,28$ фута. Найти полную поверхность и объем цилиндра. $\pi=3,14$.
166. Объем цилиндра равен V и длина окружности основания равна l . Найти высоту и боковую поверхность цилиндра. $V=10$, $l=2$ и $\pi=3,14159$.
167. Найти съ точностью до 0,001 высоту и боковую поверхность цилиндра, котораго объем $V=9$ куб. аршин. и площадь q образующаго прямоугольника равна 0,6 □ арш.
168. Найти высоту и боковую поверхность цилиндра, котораго объем $V=0,1$, а высота относится къ радіусу основания, какъ $m=1$ къ $n=8$.
169. Литръ, служащій французскою мѣрою жидкостей, есть цилиндръ, у котораго высота вдвое болѣе діаметра основания, а вмѣстимость равна 1 куб. дециметру. Найти высоту и радіусъ основания литра.
170. Что сдѣлается съ объемомъ цилиндра, если въ немъ увеличимъ одно изъ измѣреній въ $m=2$ разъ?
171. Что сдѣлается съ поверхностью и объемомъ цилиндра, если его измѣренія увеличимъ въ $m=3$ разъ?
172. Что сдѣлается съ высотой и объемомъ цилиндра, если увеличимъ его боковую поверхность въ $m=4$ разъ, а радіусъ основанія оставимъ тотъ же?
173. Что сдѣлается съ радіусомъ основания и боковою поверхностью цилиндра, если уменьшимъ его объемъ въ $m=9$ разъ, оставивъ ту же высоту?
174. Найти отношеніе объемовъ двухъ цилиндровъ, имѣющихъ ту же боковую поверхность.
175. Найти отношеніе боковыхъ поверхностей двухъ цилиндровъ, имѣющихъ тотъ же объемъ,

176. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ цилиндровъ, происшедшихъ отъ обращенія прямоугольника около неравныхъ сторонъ.

177. Высоты двухъ подобныхъ цилиндровъ суть: $h=2\frac{1}{2}$ арш. и $h'=\frac{2}{3}$ саж. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ этихъ цилиндровъ.

178. Данъ цилиндръ, котораго радіусъ основанія $r=3$ арш. и высота $h=2$ арш. Найти объемъ и поверхность цилиндра, подобнаго данному и имѣющаго радіусъ основанія $r'=4$ арш.

179. Сумма поверхностей двухъ подобныхъ цилиндровъ равна P , а отношеніе радіусовъ основаній равно отношенію m къ n . Найти поверхности этихъ цилиндровъ.

180. Сумма объемовъ двухъ подобныхъ цилиндровъ равна Q , а отношеніе высотъ равно отношенію m къ n . Найти объемы этихъ цилиндровъ.

181. Отношеніе поверхностей двухъ подобныхъ цилиндровъ равно отношенію m къ n . Найти объемы этихъ цилиндровъ, когда высота перваго изъ нихъ равна h , и сумма радіусовъ основаній равна a .

182. Боковая поверхность цилиндра, развернутая въ плоскость, даетъ прямоугольникъ, у котораго стороны a и b . Найти полную поверхность и объемъ цилиндра.

183. Объемъ стѣнки цилиндрической трубки, которой длина l , радиусъ V , и радіусъ внѣшней поверхности трубки равенъ r . Определить толщину стѣнки трубки.

184. Найти объемъ цилиндра, у котораго боковая поверхность въ $m=3$ разъ болѣе площади основанія, а радіусъ основанія вмѣстѣ съ высотой составляютъ $a=0,5$ арш. ($\pi=3,142$).

185. Данъ цилиндръ, у котораго высота h и поверхность S . Найти объемъ и поверхность цилиндра, подобнаго данному и имѣющаго высоту h' .

186. Объемы цилиндровъ, происшедшихъ отъ вращенія прямоугольника около неравныхъ сторонъ, равны V куб. арш. и V' куб. арш. Найти діагональ этого прямоугольника.

187. Зная боковую поверхность S цилиндра и отношеніе $m:n$ высоты къ діаметру основанія, найти полную поверхность и объемъ цилиндра. $S=7,04$ □ арш., $m=2$, $n=7$ и $\pi=\frac{22}{7}$.

188. Найти стороны прямоугольника, когда извѣстно, что полныя поверхности цилиндровъ, полученныхъ отъ вращенія прямоуголь-

ника около его неравныхъ сторонъ, равны S и S_1 . $S = 27,5 \square$ арш., $S_1 = 49,5 \square$ арш. и $\pi = \frac{22}{7}$.

189. Въ цилиндрѣ, имѣющемъ высоту h , отношеніе полной поверхности къ боковой равно отношенію m къ n . Найти объемъ, боковую и полную поверхности этого цилиндра.

190. По данному объему V цилиндра и отношенію m къ n его полной поверхности къ боковой, найти полную поверхность цилиндра и его размѣренія.

191. Сумма боковой и полной поверхностей цилиндра равна S , а разность между высотой и радіусомъ основанія равна a . Найти полную поверхность цилиндра.

192. Въ цилиндрѣ, разсѣченномъ плоскостью, непараллельною основанію, даны: радіусъ основанія r , наибольшее a и наименьшее b разстоянія плоскости сѣченія до основанія. Найти боковую поверхность и объемъ усѣченного цилиндра.

193. Цилиндръ, у котораго радіусъ основанія r и высота h , разсѣченъ плоскостью, перпендикулярною къ основанію, на двѣ части. Найти объемы этихъ частей, если хорда, по которой плоскость пересѣкаетъ основаніе цилиндра, равна r .

194. Найти полную поверхность и объемъ цилиндра, вписаннаго въ кубъ, у котораго ребро a .

195. Найти полную поверхность и объемъ цилиндра, описаннаго около куба, у котораго ребро a .

196. Найти поверхность и объемъ цилиндра, описаннаго около прямоугольнаго параллелепипеда, у котораго высота $h = 4$ арш., а стороны основанія: $a = 8$ арш. и $b = 1$ саж.

Въ слѣдующихъ задачахъ отъ 197 до 201 дана правильная призма, у которой высота h и сторона основанія a . Найти боковую поверхность и объемъ цилиндра, вписаннаго въ нее, когда призма:

197. Треугольная. 198. Четырехугольная. 199. Шестиугольная.

200. Восьмиугольная. 201. Десятиугольная.

Въ слѣдующихъ задачахъ отъ 202 до 206 дана правильная призма, у которой высота h и сторона основанія a . Найти боковую поверхность и объемъ цилиндра, описаннаго около нея, когда призма:

202. Треугольная. 203. Четырехугольная. 204. Шестиугольная.

205. Восьмиугольная. 206. Десятиугольная.

207. Въ конусѣ, имѣющемъ высоту $h = \frac{7}{11}$ саж. и радіусъ основанія $r = 0,375$ саж., проведена плоскость, параллельно основанію,

на разстояніи $h = \frac{7}{9}$ саж. отъ вершины конуса. Найти площадь сѣченія.

208. Въ конусѣ, имѣющемъ высоту $h = 1\frac{1}{2}$ ари. и площадь основанія $q = 78,5$ □ ари., провести такъ плоскость, параллельно основанію, чтобы въ сѣченіи получился кругъ радіуса $r = 1,4$ аршина. ($\pi = 3,14$).

Въ слѣдующихъ задачахъ, отъ 209 до 219, буква r означаетъ радіусъ основанія конуса; h — высоту; a — апофему; S — боковую поверхность; S' — полную поверхность и V — объемъ конуса.

209. Дано: $r = 1$ и $h = 1\frac{1}{2}$; найти: a , S , S' и V ($\pi = 3,14$).

210. Дано: $r = 5$ и $a = 13$; найти: h , S , S' и V ($\pi = 3,14$).

211. Дано: $r = 3$ и $S = 76\frac{3}{7}$; найти: a , h и V ($\pi = \frac{22}{7}$).

212. Дано: $r = 3$ и $S' = 24\pi$; найти: a , h , S и V .

213. Дано: $r = 21$ и $V = 9240$; найти: h , a и S' ($\pi = \frac{22}{7}$).

214. Дано: $a = 5$ и $h = 3$; найти: r , S и V ($\pi = 3,14$).

215. Дано: $a = 3$ и $S' = 12\frac{2}{7}$; найти: r , h , S и V ($\pi = \frac{22}{7}$).

216. Дано: $h = 6$ и $S = 80\pi$; найти: r , a , S' и V .

217. Дано: $h = 1$ и $V = \frac{23}{56}$; найти: r , a и S ($\pi = \frac{22}{7}$).

218. Дано: $S = 2,94375$ и $S' = 4,71$; найти: r , a , h и V ($\pi = 3,14$).

219. Дано: S' и V ; найти r и h .

220. Что сдѣлается съ боковою поверхностью конуса, если образующую оставимъ ту же, а радіусъ основанія уменьшимъ въ $m = 4$ разъ?

221. Что будетъ съ объемомъ конуса, если радіусъ основанія оставимъ тотъ же, а высоту уменьшимъ въ $m = 6$ разъ?

222. Что будетъ съ боковою поверхностью конуса, если его образующую увеличимъ въ m разъ, а площадь основанія въ n разъ.

223. Что будетъ съ объемомъ и поверхностью конуса, если высоту и радіусъ основанія увеличимъ въ $m = 3$ разъ?

224. Найти отношеніе боковыхъ поверхностей и объемовъ конусовъ, происходящихъ отъ вращенія прямоугольнаго треугольника около каждаго изъ катетовъ.

225. Найти отношеніе объемовъ, полученныхъ отъ вращенія параллелограмма около неравныхъ его сторонъ.

226. Найти отношеніе объемовъ равносторонняго цилиндра и равносторонняго конуса, у которыхъ полная поверхности равны между собою.

227. Найти отношеніе полныхъ поверхностей равносторонняго цилиндра и равносторонняго конуса, если ихъ объемы равны между собою.

228. Найти съ точностью до 0,01 объемъ и полную поверхность равносѣторняго конуса, у котораго апогема $a=0,8$ метра.

229. Найти съ точностью до 0,01 поверхность равносѣторняго конуса, котораго объемъ $V=1$ куб. саж.

230. Найти съ точностью до 0,001 объемъ равносѣторняго конуса, имѣющаго поверхность $S=1$ □ арш.

231. Найти объемъ конуса, у котораго поверхность равна S и образующая наклонена къ основанію подъ угломъ въ 30° .

232. Найти полную поверхность конуса, кот. объемъ $V=\frac{1}{8}$ куб. фута и противоположныя образующія составляютъ уголъ въ 60° .

233. Боковая поверхность конуса равна S , а образующая въ n разъ болѣе радіуса основанія. Найти объемъ конуса.

234. Найти высоту и радіусъ основанія конуса, котораго объемъ равенъ V , а боковая поверхность въ n разъ болѣе площади основанія.

235. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ двухъ подобныхъ конусовъ, имѣющихъ высоты: $h=2$ арш. и $h_1=3$ арш.

236. Данъ конусъ, имѣющій высоту $h=4$ фут. и радіусъ основанія $r=3$ футамъ. Найти объемъ конуса, подобнаго данному и имѣющаго высоту $h_1=2$ футамъ.

237. Данъ конусъ, котораго поверхность $S=2,75$ □ вершка и радіусъ основанія $r=1\frac{1}{2}$ арш. Найти радіусъ основанія конуса, подобнаго данному и имѣющаго поверхность $S_1=11$ □ верш.

238. На какомъ разстояніи отъ вершины конуса, имѣющаго высоту $h=3$ арш. и радіусъ основанія $r=2$ арш., провести плоскость, параллельно основанію, которая раздѣлила бы пополамъ боковую поверхность конуса?

239. На какомъ разстояніи отъ вершины конуса, имѣющаго высоту $h=2\frac{2}{3}$ саж. и радіусъ основанія $r=1\frac{1}{12}$ саж., провести плоскость, параллельно основанію, которая раздѣлила бы боковую его поверхность въ отношеніи $m=4$ къ $n=5$?

240. На какомъ разстояніи отъ вершины конуса, имѣющаго высоту $h=2,1$ саж. и радіусъ основанія $r=4$ саж., провести плоскость, параллельно основанію, которая раздѣлила бы боковую поверхность на три части въ отношеніи $m:n:p=16:20:13$?

241. На какомъ разстояніи отъ вершины конуса провести плоскость, параллельно основанію, которая раздѣлила бы его объемъ въ отношеніи m къ n ?

242. Найти площадь прямоугольнаго треугольника, если объемы конусовъ отъ обращенія треугольника около катетовъ равны V и V_1 .

243. Найти катеты прямоугольнаго треугольника, у котораго дана гипотенуза a , когда извѣстно, что объемъ конуса отъ обращенія треугольника около гипотенузы въ m разъ болѣе объема конуса, полученнаго отъ вращенія этого треугольника около большаго катета.

244. Данъ конусъ, у котораго радіусъ основанія равенъ r и образующая равна a . Пересѣчь конусъ плоскостью, параллельною основанію, такъ, чтобы полная поверхность отсѣченнаго конуса равнялась бы боковой поверхности даннаго конуса.

245. Найти площадь прямоугольнаго треугольника, если полная поверхности конусовъ, полученныхъ отъ вращенія треугольника около катетовъ, равны $S=4,83 \square$ саж. и $S_1=8,67 \square$ саж.

246. Найти радіусъ основанія и образующую такого конуса, у котораго полная поверхность равна πa^2 и площадь прямоугольнаго треугольника, отъ вращенія котораго получился конусъ, равна b^2 .

247. Изъ точки A , взятой на разстояніи d отъ центра круга радіуса r , проведены къ нему касательныя AB и AC , гдѣ B и C точки касанія. Найти поверхность и объемъ конуса BAC , полученнаго отъ вращенія треугольника ABC около AO .

248. Въ кругѣ радіуса R проведемъ діаметръ AB . На какомъ разстояніи отъ центра провести хорду CD , перпендикулярно AB , чтобы боковыя поверхности конусовъ, полученныхъ отъ вращенія треугольниковъ CAD и CBD около AB , были въ отношеніи m къ n .

249. Около цилиндра, у котораго высота h и радіусъ основанія r , описанъ конусъ данной высоты H . Найти полную поверхность и объемъ этого конуса.

250. Въ конусъ, у котораго высота h и радіусъ основанія r , вписанъ цилиндръ, имѣющій данную боковую поверхность S . Найти высоту и радіусъ основанія этого цилиндра.

251. Боковая поверхность конуса, развернутая въ плоскость, представляетъ секторъ съ угломъ въ 120° . Найти полную поверхность и объемъ конуса, если его образующая равна a .

252. Объемъ конуса равенъ V , а боковая поверхность его, развернутая въ плоскость, даетъ секторъ съ угломъ въ 60° . Найти боковую поверхность конуса.

Дана правильная пирамида, у которой высота h и сторона основания a . Найти боковые поверхности (S и S_1) и объемы (V и V_1) вписанного и описанного конуса, когда пирамида:

253. Треугольная.

254. Четырехугольная.

255. Шестиугольная.

256. Десятиугольная.

257. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, описанный около круга, которого центр O и радиус r . Проведем диагональ FC и еще диагонали AC и BF , которые пересекутся в точке I на апофеме OH , перпендикулярной к FC . Требуется найти объемы и боковые поверхности конусов от обращения треугольников: PIA и IOF около апофемы OH , принятой за ось.

258. Найти поверхность и объем тела от вращения правильного шестиугольника около большей из своих диагоналей, когда сторона шестиугольника равна a футам.

Въ задачахъ отъ 259 до 263, буква h означаетъ высоту усѣченнаго конуса съ параллельными основаниями; a — апофему; r и r_1 — радиусы оснований; S , S' и V — боковую поверхность, полную поверхность и объемъ усѣченнаго конуса:

259. Дано: $r=6$, $r_1=2$ и $a=5$; найти: h , S , S' и V ($\pi=3,14$).

260. Дано: $r=2$, $r_1=1$ и $h=0,75$; найти: a , S , S' и V ($\pi=\frac{22}{7}$).

261. Дано: $r=5$, $r_1=2$ и $S=110$; найти: a , h и V ($\pi=\frac{22}{7}$).

262. Дано: $r=10$, $r_1=4$ и $V=816,4$; найти: h и S ($\pi=3,14$).

263. Дано: $r=5$, $S=30\pi$ и $S'=56\pi$; найти: r_1 , a , h и V .

264. Усѣченный конусъ, у котораго высота h , а радиусы оснований r и R , разсѣченъ пополамъ плоскостью, параллельною основаниямъ. Найти радиусъ круга сѣченія и разстояніе его до основания, у котораго радиусъ равенъ r .

265. Найти объемъ тела, полученнаго отъ вращения прямоугольника $ABCD$, въ которомъ $AB=a$ и $BC=b$, около прямой XAY , перпендикулярной къ диагонали AC .

266. Продолжимъ одинъ изъ боковъ AB равносторонняго треугольника ABC и отложимъ на продолженіи часть $BD=AB$; изъ точки D возставимъ перпендикуляръ DE къ AD . Найти объемъ отъ обращения треугольника ABC около DE , когда бокъ $AB=a$.

267. Данъ усѣченный конусъ $ABCD$ съ параллельными основаниями и у котораго радиусъ нижняго основания AOD вдвое болѣе радиуса R верхняго основания $BO'C$, гдѣ O и O' центры оснований. Найти на OO' такую точку E , чтобы, проводя черезъ нее сѣкущую

плоскость FG , параллельно основаніямъ, сумма объемовъ конуса $F'OG$ и усѣченного конуса $FBCG$ равнялась половинѣ объема даннаго конуса.

268. Найти боковыя поверхности (S и S_1) и объемы (V и V_1) усѣченныхъ конусовъ, вписаннаго и описаннаго около правильной усѣченной треугольной пирамиды, у которой высота h , а стороны основаній равны a и b .

269. Найти боковыя поверхности (S и S_1) и объемы (V и V_1) усѣченныхъ конусовъ, вписаннаго и описаннаго около правильной усѣченной четырехугольной пирамиды, у которой высота h , а стороны основаній равны a и b .

270. Найти боковыя поверхности (S и S_1) и объемы (V и V_1) усѣченныхъ конусовъ, вписаннаго и описаннаго около правильной усѣченной шестиугольной пирамиды, у которой высота h , а стороны основаній равны a и b .

Въ задачахъ 271 до 275, найти объемы отъ обращенія правильныхъ многоугольниковъ около одной изъ сторонъ, равной a :

271. Пятиугольника. 272. Шестиугольника. 273. Восьмиугольника.

274. Десятиугольника.

275. Дѣнадцатиугольника.

Найти поверхность S и объемъ V тѣла, полученнаго отъ вращенія правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ радіуса R , около діаметра, проходящаго чрезъ одну изъ его вершинъ:

276. Шестиугольника.

277. Восьмиугольника.

Найти объемы и поверхности отъ обращенія правильныхъ многоугольниковъ около прямой, лежащей въ плоскости многоугольника и проходящей чрезъ его вершину A , перпендикулярно къ діаметру $AB=2r$ круга, описаннаго около многоугольника:

278. Треугольника.

279. Квадрата.

280. Пятиугольника.

281. Шестиугольника.

282. Восьмиугольника.

283. Десятиугольника.

284. Дѣнадцатиугольника.

285. Въ шарѣ радіуса $R=2$ арш. проведена плоскость на разстояніи $k=0,5$ саж. отъ центра шара. Найти площадь сѣченія. $\pi=\frac{22}{7}$.

286. На какомъ разстояніи отъ центра шара радіуса $R=0,75$ фута провести плоскость, которая дала бы въ сѣченіи площадь $q=1\frac{1}{2}$ фута? $\pi=\frac{22}{7}$.

287. Въ шарѣ проведена плоскость на разстояніи $k=1$ сажени отъ его центра, которая дала въ сѣченіи площадь $q=1,57$ саж. Найти радіусъ шара. $\pi=3,14$.

288. Въ шарѣ радіуса $R=0,5$ метра проведена плоскость, которая дала въ сѣченіи кругъ радіуса $r=3$ дециметрамъ. Найти разстоянія полюсовъ отъ плоскости сѣченія.

289. Въ шарѣ радіуса $R=75$ арш. разстояніе дальнѣйшаго полюса круга до самаго круга равно $k=15$ аршинъ. Найти окружность этого круга съ точностью до 0,01.

290. Въ шарѣ ближайшій полюсъ для круга радіуса $r=3$ вершк. отстоитъ отъ него на $k=1$ вершк. Найти площадь большаго круга.

291. Найти поверхность и объемъ шара, у котораго радіусъ $R=3$ арш., а $\pi=3,14$.

292. Найти поверхность и объемъ шара, у котораго діаметръ $d=2,5$ фута, а $\pi=3,14$.

293. Найти поверхность и объемъ шара, въ кот. окружность большаго круга равна $a=6,28$ саж., а $\pi=3,14$.

294. Вычислить, съ точностью до 0,01, поверхность и объемъ шара, въ которомъ площадь q большаго круга равна $2,25 \square$ саж.

295. Найти, съ точностью до 0,01, радіусъ шара, котораго поверхность $S=1 \square$ фута.

296. Найти, съ точностью до 0,01, радіусъ шара, котораго объемъ $V=1$ куб. саж.

297. Найти, съ точностью до 0,001, окружность большаго круга для шара, котораго поверхность $S=0,08 \square$ метра.

298. Найти, съ точностью до 0,1, окружность большаго круга для шара, котораго объемъ $V=\frac{1}{6}$ куб. саж.

299. Найти, съ точностью до 0,1, поверхность и объемъ шара, если дуга большаго круга b , равная $0,125$ арш., содержитъ $m^0=45^0$.

300. Найти поверхность шара, съ точностью до 0,01, котораго объемъ $V=\frac{1}{6}$ куб. саж.

301. Найти объемъ шара, котораго поверхность $S=4 \square$ арш.

302. Данъ шаръ радіуса $R=10\frac{3}{8}$ арш. Найти радіусъ такого шара, котораго поверхность составляетъ $\frac{m}{n}=\frac{9}{64}$ поверхности даннаго.

303. Данъ шаръ радіуса $R=1\frac{7}{15}$ фута. Найти радіусъ шара, котораго объемъ въ $m=8$ разъ менѣе объема даннаго шара.

304. Если радіусъ шара увеличимъ въ $m=5$ разъ, то что сдѣлается съ его поверхностью и объемомъ?

305. Что сдѣлается съ поверхностью и объемомъ шара, если діаметръ большаго круга уменьшимъ въ $m=4$ раза?

306. Что сдѣлается съ поверхностью и объемомъ шара, если площадь большаго круга увеличимъ въ $m=9$ разъ?

307. Что сдѣлается съ поверхностью и объемомъ шара, если окружность большаго круга уменьшимъ въ $m=10$ разъ?

308. Что сдѣлается съ радіусомъ шара, если поверхность шара уменьшимъ въ $m=64$ раза?

309. Что сдѣлается съ радіусомъ шара, если объемъ шара увеличимъ въ $m=1728$ разъ?

310. Что сдѣлается съ объемомъ шара, если его поверхность увеличимъ въ $m=9$ разъ?

311. Что сдѣлается съ поверхностью шара, если его объемъ уменьшимъ въ $m=8$ разъ?

312. На сколько слѣдуетъ увеличить радіусъ R шара, чтобы его поверхность увеличилась въ m разъ? $R=3\frac{1}{2}$ арш. и $m=169$.

313. На сколько слѣдуетъ уменьшить радіусъ R шара, чтобы его объемъ уменьшился въ m разъ? $R=16,2$ фута и $m=27$.

314. Объемы двухъ шаровъ находятся въ отношеніи $m=64$ къ $n=27$. Найти отношеніе поверхностей этихъ шаровъ.

315. Поверхности двухъ шаровъ находятся въ отношеніи $m=25$ къ $n=16$. Найти отношеніе объемовъ этихъ шаровъ.

316. Пустой шаръ имѣетъ внѣшній радіусъ $R=1$ метру и толщину стѣнки $a=5$ дециметр. Найти вмѣстимость шара ($\pi=\frac{22}{7}$).

317. Пустой металлическій шаръ, имѣющій радіусъ $r=10$ дюйм. и толщину стѣнки $a=9$ дюйм., перелить въ другой пустой шаръ радіуса $R=1$ футу. Найти толщину стѣнки послѣдняго шара.

318. Найти радіусъ шара, котораго поверхность равна поверхности цилиндра, имѣющаго высоту $h=2,6$ фута и радіусъ основанія $r=0,2$ саж.

319. Найти радіусъ шара, котораго поверхность равна поверхности равносторонняго конуса, имѣющаго образующую $a=0,6$ арш.

320. Найти радіусъ шара, котораго объемъ равенъ объему равносторонняго цилиндра, имѣющаго образующую $a=2$ метр.

321. Найти радіусъ шара котораго объемъ равенъ объему конуса, имѣющаго радіусъ основанія $r=5,4$ арш. и высоту $h=7,2$ саж.

322. Сумма радіусовъ трехъ шаровъ, которыхъ поверхности находятся въ отношеніи $m:n:p=16:9:1$, равна $a=\frac{2}{3}$ саж. Найти поверхность и объемъ перваго изъ этихъ шаровъ.

323. Найти объемы двух шаровъ, которыхъ поверхности относятся какъ $m=9$ къ $n=4$, и разность радиусовъ ихъ равна $a=0,5$ арш. $\pi=3,14$.

324. Найти поверхность шара, котораго объемъ равенъ суммѣ объемовъ двухъ шаровъ, имѣющихъ поверхности: $S_1=4$ и $S_2=1$.

325. Вычислить объемъ шара, котораго поверхность равна суммѣ поверхностей двухъ данныхъ шаровъ, имѣющихъ объемы: $V_1=64$ и $V_2=27$.

326. Проведемъ въ шарѣ радиуса R плоскость, перпендикулярную къ діаметру его AB , которая дѣлила бы поверхность шара въ отношеніи m къ n ; построимъ конусы, у которыхъ основаниями было бы сѣченіе шара, а вершины лежали въ точкахъ A и B . Найти отношеніе объемовъ конусовъ къ объему шара.

327. Данъ полушаръ ACB , у котораго центръ O и радиусъ R . Найти радиусъ круга, полученнаго въ сѣченіи полушара плоскостью, параллельною кругу AB , если извѣстно, что отношеніе объема усѣченнаго конуса, имѣющаго основаниями кругъ AB и сѣченіе, къ объему шара, у котораго діаметръ будетъ высота усѣченнаго конуса, равно m .

Въ слѣдующихъ шести задачахъ отъ 328 до 333, R означаетъ радиусъ шара; r — радиусъ основанія сегмента; h — высоту сегмента; S и V — поверхность и объемъ сегмента.

328. Дано: $R=5$ и $h=1$; найти: S и V ($\pi=3,14$).

329. Дано: $R=5$ и $r=4$; найти: h , S и V ($\pi=3,14$).

330. Дано: $R=2$ и $S=4\pi$; найти: h , r и V .

331. Дано: $r=3$ и $S=78,5$; найти: h , R и V ($\pi=3,14$).

332. Дано: $h=1$ и $S=5\pi$; найти: R , r и V .

333. Дано: $h=3$ и $V=9\pi$; найти: R и S .

334. Діаметръ $d=6$ метр. шара раздѣлимъ на три равныя части и чрезъ точки дѣленій представимъ плоскости, перпендикулярныя къ діаметру, которыя раздѣлятъ поверхность шара также на три части. Найти поверхность и объемъ каждой части.

335. Въ разстояніи $k=1,5$ фута отъ центра шара радиуса $R=2\frac{1}{2}$ фута проведена плоскость, кот. раздѣлила шаръ на два сегмента. Найти поверхность и объемъ каждого изъ сегментовъ съ точн. до 0,01.

336. Отношеніе высотъ двухъ сегментовъ, составляющихъ шаръ радиуса $R=5$, равно отношенію $m=3$ къ $n=2$. Найти поверхности и объемы этихъ сегментовъ.

337. На какомъ разстояніи отъ центра шара радіуса R должна находиться точка, изъ которой видимая часть шара равнялась бы $S = \frac{1}{4}$ поверхности шара.

338. Шаръ пересѣчь плоскостью такъ, чтобы объемъ одного изъ сегментовъ равнялся объему конуса, вписаннаго въ другой.

339. Пересѣчь шаръ плоскостью такъ, чтобы боковая поверхность одного изъ сегментовъ равнялась боковой поверхности конуса, вписаннаго въ другой сегментъ.

340. Пересѣчь шаръ плоскостью такъ, чтобы отношеніе объема полученнаго сегмента къ объему сектора, имѣющаго основаніемъ поверхность этого сегмента, равнялось m .

341. Пересѣчь шаръ радіуса R плоскостью, перпендикулярною къ діаметру его AB , такъ, чтобы объемъ меньшаго изъ полученныхъ сегментовъ былъ въ m разъ болѣе объема конуса, у котораго основаніе есть сѣченіе, а вершина въ центрѣ шара.

342. Пусть AB діаметръ круга радіуса R . На какомъ разстояніи отъ A провести хорду CD , перпендикулярную къ AB , такъ, чтобы сумма объемовъ сегментовъ отъ обращенія круговыхъ сегментовъ

CAD и CBD около AB равнялась $\frac{m}{n}$ объема шара, полученнаго отъ вращенія полукруга ACB около AB . $m=5$, $n=8$.

Въ задачахъ отъ 343 до 349, буква R означаетъ радіусъ шара; h и S — высоту и поверхность сегмента, соотвѣтствующаго сектору; r — радіусъ основанія сегмента; V — объемъ сектора.

343. Дано: $R=5$ и $h=3$; найти: r , S и V съ точн. до 0,01.

344. Дано: $R=2,5$ и $r=1,5$; найти: h , S и V .

345. Дано: $R=5$ и $S=20\pi$; найти: h , r и V .

346. Дано: $R=2$ и $V=8$; найти: S , h и r .

347. Дано: $h=\frac{1}{2}$ и $S=3\frac{13}{16}$; найти: R , r и V ($\pi=3\frac{22}{7}$).

348. Дано: $h=2$ и $V=6\frac{11}{24}$; найти: R , r и S ($\pi=3,14$).

349. Дано: $S=720\pi$ и $V=7200\pi$; найти: R , h и r .

350. Найти объемъ сектора отъ обращенія круговаго сектора AOB около радіуса OB — R , если $\angle AOB$ содержитъ: 1) 60° и 2) 30° .

Въ задачахъ отъ 351 до 359, R означаетъ радіусъ шара; r и r_1 — радіусы основаній пояса ($r > r_1$); h — высоту пояса; S , S' и V — боковую поверхность, полную поверхность и объемъ пояса ($\pi=3,14$).

351. Дано: $R=10$, $r=8$ и $r_1=6$; найти: h , S , S' и V .

352. Дано: $R=5$, $r=4$ и $h=1$; найти: r_1 , S и V .

353. Дано: $R=5$, $r=4$ и $S=10$; найти: h , r_1 и V .

354. Дано: $R=5$, $h=1$ и $V=\frac{38}{3}\pi$; найти: S , r и r_1 .

355. Дано: $R=10$, $S=40\pi$ и $S'=140\pi$; найти: h , r и r_1 .

356. Дано: $R=1\frac{1}{4}$; $S=0,625\pi$ и $V=\frac{19}{96}\pi$; найти: h , r и r_1 .

357. Дано: $r=4$, $r_1=3$ и $h=1$; найти: R , S и V .

358. Дано: $r=4$, $S=10\pi$ и $S'=35\pi$; найти: r_1 , h и V .

359. Дано: r , r_1 и S ; найти V .

360. Въ шарѣ радіуса $R=1\frac{2}{3}$ арш. проведена плоскость чрезъ его центръ и еще другая плоскость, параллельная первой и находящаяся отъ нея въ разстояніи $k=8$ вершк. Найти объемъ пояса, заключеннаго между параллельными плоскостями и поверхностью шара.

361. Найти объемъ шарового пояса, у котораго высота h , а площади оснований, лежащихъ по одну сторону отъ центра шара, отнесены какъ m къ n , и радіусъ шара равенъ R .

362. Найти радіусы R и r двухъ изнутри касающихся шаровъ по объему V пространства, заключеннаго между поверхностями этихъ шаровъ, и разстоянію b между ихъ центрами.

363. Къ двумъ касающимся кругамъ радіусовъ R и R' проведена вѣшняя касательная. Найти объемъ отъ обращенія около линіи центровъ площади, заключенной между окружностями круговъ и касательною.

364. Изъ точекъ O и O' опишемъ, соответственно, дуги радіусами R и R' , которыя пересѣкутся въ точкахъ A и B . Соединимъ точки O и O' и пусть C будетъ точка пересѣченія дуги радіуса R съ OO' , а C' — точка пересѣченія другой дуги радіуса R' съ OO' . Найти объемъ отъ обращенія фигуры $ACBC'$ около OO' .

365. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ: 1) равностороннихъ конусовъ и 2) равностороннихъ цилиндровъ, вписанныхъ и описанныхъ около шара.

366. Какой высоты долженъ быть конусъ, описанный около шара радіуса R , чтобы отношеніе полной поверхности конуса къ поверхности шара равнялось m .

367. Вычислить радіусы оснований усѣченнаго конуса, описаннаго около шара радіуса R и въ которомъ отношеніе полной поверхности конуса къ поверхности шара равно m .

По данному ребру a правильнаго многогранника найти радіусъ R описаннаго и r вписаннаго въ него шара:

368. Тетраедра.

369. Куба.

370. Октаедра.

371. Додекаедра.

372. Икосаедра.

По данному радіусу R шара найти ребро a правильного многогранника, вписаннаго въ шаръ, и радіусъ r шара, вписаннаго въ этотъ многогранникъ:

373. Тетраедра.

374. Куба.

375. Октаедра.

376. Додекаедра.

377. Икосаедра.

По данному радіусу R шара, найти поверхность S и объемъ V правильного многогранника, вписаннаго въ этотъ шаръ:

378. Тетраедра.

379. Куба.

380. Октаедра.

381. Додекаедра.

382. Икосаедра.

383. Определить: какую часть поверхности шара составляетъ площадь сферическаго треугольника, въ которомъ углы равны: 25° , 80° и 85° ?

384. Найти площадь сферическаго треугольника, въ которомъ углы равны: $58^\circ 12'$, $60^\circ 20'$ и $72^\circ 22'$ и радіусъ шара $R=0,4$ метра.

385. Найти радіусъ шара, на которомъ лежитъ сферическій треугольникъ, имѣющій площадь $10 \square$ арш. и углы въ 60° , 70° и 80° .



РѢШЕНИЯ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ. 1. Имѣемъ: $AD - AC = BD - BE$ или $CD = DE$; также $AD + DE = BD + DC$ или $AE = BC$.

2. Имѣемъ: $AE - AD = BC - BD$ или $DE = CD$; также: $AB - BC = AB - AE$ или $AC = BE$.

3. 1) $OM = AM - AO$ и $OM = OB - BM$; откуда $2OM = AM - BM$ или $OM = \frac{1}{2}(AM - BM)$. 2) $OM = AM - OA$ и $OM = BM + OB$; откуда $2OM = AM + BM$ или $OM = \frac{1}{2}(AM + BM)$.

4. $BD = BE - DE = BE - AE = CE + BC - AE = CE + AC - AE = 2CE$.

5. Имѣемъ: 1) $\angle COM = \angle AOM - \angle AOC$ и $\angle COM = \angle BOC - \angle BOM$; откуда $2\angle COM = \angle AOM - \angle BOM$. 2) $\angle COM = \angle AOM - \angle AOC$ и $\angle COM = \angle BOM + \angle BOC$; откуда $2\angle COM = \angle AOM + \angle BOM$.

6. Равнобѣдренная составляетъ равные углы съ данною прямою, а потому къ ней перпендикулярна.

7. Уголъ между равнобѣдренными равенъ полусуммѣ данныхъ \angle ; но сумма данныхъ \angle равна $2d$, а потому уголъ между равнобѣдренными $= d$.

8. $\angle AOD + \angle BOC + \angle AOB + \angle COD = 4d$ или $2\angle AOD + 2\angle AOB = 4d$; откуда $\angle AOD + \angle AOB = 2d$, т.-е. OD и OB составляютъ прямую.

9. AD высота $\triangle ABC$, а $A'D'$ высота $\triangle A'B'C'$. Дано: $AD = A'D'$, $\angle BAD = \angle B'A'D'$ и $\angle CAD = \angle C'A'D'$; тогда $\triangle ABD = \triangle A'B'D'$ и $\triangle ACD = \triangle A'C'D'$; слѣд. $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$.

10. AD и $A'D'$ высоты $\triangle ABC$ и $A'B'C'$. Дано: $\angle A = A'$, $\angle B = \angle B'$ и $AD = A'D'$; тогда $\triangle ABD = \triangle A'B'D'$ и слѣд. $AB = A'B'$.

11. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$ точки F и F' — середины сторонъ BC и $B'C'$. Дано: $BC = B'C'$, $AF = A'F'$ и $\angle AFB = \angle A'F'B'$; тогда видимъ, что $\triangle AFB = \triangle A'F'B'$ и $\triangle AFC = \triangle A'F'C'$; откуда $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$.

12. AD и $A'D'$ высоты $\triangle ABC$ и $A'B'C'$; F и F' середины BC и $B'C'$. Дано: $BC = B'C'$, $AD = A'D'$ и $AF = A'F'$. $\triangle ADF = \triangle A'D'F'$ и слѣд. $\angle AFB = \angle A'F'B'$; поэтому $\triangle AFB = \triangle A'F'B'$ и $\triangle AFC = \triangle A'F'C'$; откуда $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$.

13. AD и BE высоты $\triangle ABC$; $A'D'$ и $B'E'$ высоты $\triangle A'B'C'$. Дано $AB = A'B'$, $AD = A'D'$ и $BE = B'E'$. $\triangle ABD = \triangle A'B'D'$ и слѣд. $\angle B = \angle B'$; также $\triangle ABE = \triangle A'B'E'$ и слѣд. $\angle A = \angle A'$.

14. F середина BC въ $\triangle ABC$; F' середина $B'C'$ въ $\triangle A'B'C'$. Дано: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $AF = A'F'$. $\triangle ABF = \triangle A'B'F'$ и потому $\angle B = \angle B'$.

15. F середина BC въ $\triangle ABC$ и F' середина $B'C'$ въ $\triangle A'B'C'$. Дано: $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ и $AF=A'F'$. Продолжимъ AF на $FG=AF$ и $A'F'$ на $F'G'=A'F'$. Тогда $\triangle AFB=\triangle CFG$, а потому $CG=AB$ и $CF=BF$; также $\triangle A'F'B'=\triangle C'F'G'$, а потому $C'G'=A'B'$ и $C'F'=B'F'$. Отсюда выходитъ, что $\triangle ACG=\triangle A'C'G'$ и $CF=C'F'$ или $BC=B'C'$.

16. $AB+BC+AC=2p$, гдѣ $2p$ означаетъ периметръ $\triangle ABC$; но $AB+BC > AC$, а потому $AC+AC < 2p$ или $AC < p$.

17. AD высота $\triangle ABC$. Тогда $AD < AB$ и $AD < AC$; откуда $2AD < AB+AC$ или $AD < \frac{1}{2}(AB+AC)$.

18. Пусть AD , BE и CF —высоты $\triangle ABC$; тогда (17) $AD < \frac{1}{2}(AB+AC)$, $BE < \frac{1}{2}(AB+BC)$ и $CF < \frac{1}{2}(AC+BC)$; сложивъ эти неравенства, найдемъ: $AD+BE+CF < AB+AC+BC$.

19. Возьмемъ равнобедренный $\triangle ABC$, въ кот. BC основание. Опустимъ $\perp BD$ и CE на AC и AB ; тогда $\angle BDC=\angle BEC$ и слѣд. $BD=CE$.

20. Въ равностороннемъ $\triangle ABC$ прямые: AD , BE и CF суть высоты; тогда, принявъ BC за основание, найдемъ (19) $BE=CF$, а, принявъ AB за основание, найдемъ: $AD=BE$; слѣд. $AD=BE=CF$.

21. Въ $\triangle ABC$ прямая AD дѣлитъ пополамъ $\angle A$ и сторону BC въ точкѣ D ; продолжимъ AD на $DE=AD$ и соединимъ E съ C . Изъ равенства $\triangle ABD$ и CDE выходитъ, что $AB=CE$ и $\angle CED=\angle BAD$ или $\angle DEC=\angle CAD$; тогда изъ $\triangle ACE$ получимъ: $AC=CE$ или $AC=AB$.

22. Проведенію прямую AO до пересѣченія съ BC въ точкѣ D ; тогда $\angle BOD > \angle BAO$ и $\angle COD > \angle CAO$; откуда $\angle BOC > \angle BAC$.

23. $\angle ADB > \angle ACB$ или $\angle ADB > \angle ABC$, а потому въ $\triangle ABD$ сторона $AB > AD$.

24. $\angle ACB > \angle ADC$, $\angle ACD > \angle ABC$ или $\angle ACB$, а потому $\angle ADC < \angle ACD$ и слѣд. въ $\triangle ACD$ сторона $AD > AC$ и $> AB$.

25. Положимъ $AB > AC$. Тогда $\angle ACB > \angle ABC$; но $\angle ADB > \angle ACB$ и потому $\angle ADB > \angle ABC$. Слѣд. въ $\triangle ABD$, $AB > AD$.

26. Треугольники ABC и DBC имѣютъ общее основаніе BC и равные $\angle A$ и D . Точка D не можетъ быть внутри $\triangle ABC$, потому что тогда (22) $\angle D$ будетъ болѣе $\angle A$; D не можетъ быть ни на AB и ни на AC , потому что тогда бы $\angle D > \angle A$. Слѣд. точка D лежитъ внѣ $\triangle ABC$. Точно такъ же и A лежитъ внѣ $\triangle DBC$.

27. $DC-DM < CM$ или $DB-DM < AC-AM$ или $< AB-AM$.

28. $BF+FC > BC$; $BF+FC+DE > BC+AC$ или $BF+DF > BC+AC$.

29. По заданію $\angle B > \angle C$, а потому въ $\triangle DBC$ и EBC сторона BC общая и $BD=CE$, по заданію. Если допустимъ, что $CD=BE$, то эти \triangle равны и тогда $\angle B=\angle C$, что противно заданію; а если допустимъ, что $CD < BE$, то въ этихъ треугольникахъ $\angle B > \angle C$, что противно заданію. Слѣд. $CD > BE$.

30. $AC > AB$, а потому $\angle ABC > \angle ACB$; тогда $\angle DBC < \angle ECB$. Разсматривая $\triangle BCE$ и DBC и рассуждая какъ въ предыдущей задачѣ, найдемъ, что $BE > CD$.

31. $\angle BCE > \angle CBD$, а потому из $\triangle BCE$ и CBD , гдѣ $EC=BD$ и BC общая, видимъ, что $BE > CD$.

32. Данъ равносторонній $\triangle ABC$; пусть D , E и F —середины сторонъ BC , AC и AB . $\triangle ABD$, ABE и FBC равны между собою, а потому $AD=BE=CF$. Кромѣ того изъ равенства, напр. $\triangle ABD$ и ACD , выходитъ, что $\angle ADB=\angle ADC$, т.-е. $AD \perp BC$ и слѣд. $BE \perp AC$ и $CF \perp AB$.

33. Пусть BC будетъ основаніе даннаго $\triangle ABC$; D точка пересѣченія проведенныхъ прямыхъ. Опустимъ $\perp DE$ и DF на AB и AC ; въ $\triangle BCD$ стороны BD и CD равны, а потому $\triangle BDE=\triangle CDF$, т.-е. $DE=DF$.

34. A —вершина даннаго $\triangle ABC$; D точка пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ точекъ B и C къ AB и AC . Прямоугольные $\triangle ABD$ и ACD равны, а потому $\angle BAD=\angle CAD$.

35. $\triangle ABD$ и CBD равнобедренные, а потому $AD=BD=BC$.

36. Продолжимъ BA до D и проведемъ равнодѣльную AE угла DAC и прямую $AF \parallel BC$. $\angle CAD=\angle B+\angle C$; слѣд. $\angle CAE=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C$; откуда $\angle CAE$ будетъ $>$, $=$ или $< \angle C$, смотря по тому $\angle B$, $>$, $=$ или $< \angle C$; слѣд. $\angle CAE$, $>$, $=$ или $< \angle C$ и $\angle CAF$, смотря по тому AC , $>$, $=$ или $< AB$. Отсюда выходитъ, если $AC > AB$, то AE выѣ $\angle CAF$ и слѣдовательно пересѣчетъ BC въ сторону B ; если $AC=AB$, то AE совпадетъ съ AF , т.-е. $\parallel BC$, а если $AC < AB$, то AE внутри $\angle CAF$ и слѣд. пересѣчетъ BC въ сторону C .

37. Построимъ $\angle BCD=\angle B$, гдѣ D на AB ; тогда $\angle ACD=\angle A$. Въ $\triangle BDC$: $BD=CD$, а въ $\triangle ADC$: $AD=CD$; слѣд. $AD+BD=2CD$ или $AB=2CD$.

38. $AB+AD > BO+OD$; $OD+DC > OC$; откуда $AB+AD+OD+DC > OB+OC+OD$ или $AB+AC > OB+OC$.

39. AB и CD параллельныя прямыя; EF данная прямая между ними; O середина EF . Проведемъ прямую черезъ O , которая пересѣчетъ AB и CD въ точкахъ K и L ; $\triangle OKE=\triangle OLF$, а потому $OK=OL$.

40. Проведемъ прямую $EF \parallel AB$, которая пересѣчетъ BC въ F . $\triangle ADE=\triangle EFC$ и слѣд. $AE=EC$ и $DE=FC$; но $DE=BF$, а потому $DE=\frac{1}{2}BC$.

41. Въ $\triangle ABC$ пусть D и E середины сторонъ AB и AC . Проведемъ прямую $EF \parallel AB$ до пересѣченія съ BC въ F ; тогда $\triangle ADE=\triangle EFC$; откуда $\angle AED=\angle ACB$, т.-е. $DE \parallel BC$.

42. Проведемъ $EF \parallel AD$. Въ $\triangle BEF$, $BE=EF$, а потому $BD=DF$; въ $\triangle ADC$, $AE=CE$, и потому $DF=FC$; слѣд. $BD=\frac{1}{2}BC$.

43. Опустимъ $\perp AE$ и CF на BD . $\triangle ABE=\triangle CDF$ и потому $\angle ABE=\angle CDF$, т.-е. $\triangle BOD$ равнобедренный; слѣд. $BO=DO$. Тогда и $AO=CO$.

44. Пусть точка O внутри $\triangle ABC$; тогда: $AB+BC > AO+CO$, $BC+AC > BO+AO$ и $AB+AC > BO+CO$; сложивъ эти неравенства, найдемъ: $2AB+2BC+2AC > 2AO+2BO+2CO$ или же $AB+BC+AC > AO+BO+CO$. Также $AB < AO+BO$, $BC < BO+CO$ и $AC < AO+CO$; откуда $AB+BC+AC < 2(AO+BO+CO)$.

45. 1) Пусть ABC данный \triangle и D середина BC ; продолжимъ AD на $DE=AD$. $\triangle CDE=\triangle ABD$; слѣд. $CE=AB$. Изъ $\triangle ACE$ выходитъ, $AE < AC+CE$, или $2AD < AC+AB$, или $AD < \frac{1}{2}(AC+AB)$. 2) Изъ $\triangle ABD$

и ACD имѣемъ: $AD > AB - BD$ и $AD > AC - CD$; откуда $2AD > AB + AC - BC$ или $AD > \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

46. Точки D, E и F середины боковъ BC, AC и AB въ $\triangle ABC$. 1) Имѣемъ (I, 45): $AB + AC > 2AD$, $AB + BC > 2BE$ и $AC + BC > 2CF$; сложивъ эти неравенства, найдемъ, по сокращеніи на 2, $AB + BC + AC > AD + BE + CF$. 2) Имѣемъ: $AB < AD + BD$, $AC < AD + CD$ или $AB + AC < 2AD + BC$; также и $AB + BC < 2BE + AC$ и $AC + BC < 2CF + AB$. Сложивъ почленно эти неравенства, найдемъ: $2AB + 2BC + 2AC < 2(AD + BE + CF) + AB + BC + AC$, или $AB + BC + AC < 2(AD + BE + CF)$.

47. Имѣемъ: $AB + BD > AD$ и $AC + CD > AD$; откуда $AB + BC + CA > 2AD$. Также $AB + BC + CA > 2BE$ и $AB + BC + CA > 2CF$; слѣд. $3(AB + BC + CA) > 2(AD + BE + CF)$ или $AB + BC + CA > \frac{2}{3}(AD + BE + CF)$.

48. На продолженіи BA отложимъ часть $AC' = AC$ и точку C' соединимъ прямою съ C , которая пересѣчетъ XY въ точкѣ D . $\triangle AC'D = \triangle ACD$; откуда $C'D = CD$ и $\angle ADC' = \angle ADC$, т.-е. $CC' \perp XY$. $\triangle C'MD = \triangle CMD$ и слѣд. $C'M = CM$; тогда $MB + MC' > AB + AC'$, или $MB + MC > AB + AC$.

49. $\triangle ABC = \triangle AB'C'$; откуда $\angle C = \angle C'$ и $\angle ABC = \angle AB'C'$. Также $\triangle BDC' = \triangle B'DC$; слѣд. $BD = B'D$ и $\triangle ABD = \triangle AB'D$; отсюда выходитъ, что $\angle BAD = \angle B'AD$.

50. На KL отложимъ длины: $AA' = A'A'' = A''A''' = \dots$ и чрезъ A, A', A'', A''', \dots проведемъ параллельныя прямыя, пересѣкающія прямую MN въ B, B', B'', B''', \dots . Изъ B проведемъ прямую $\parallel KL$ до пересѣченія съ прямою $A'B'$ въ C ; изъ B' проведемъ прямую $\parallel KL$ до пересѣченія съ $A''B''$ въ C' и т. д.; тогда увидимъ, что $\triangle BCB' = \triangle B'CB'' = \triangle B''CB''' = \dots$, а потому $BB' = B'B'' = B''B''' = \dots$.

51. Проведемъ BE равнодѣлящую $\angle B$ въ $\triangle ABC$ и, продолживъ BC до D , проведемъ равнодѣлящую угла ACD , которая пересѣчетъ прямую BE въ E . Въ $\triangle BCE$: $\angle CED = \angle EBC + \angle BEC$ или $\frac{1}{2}\angle ACD = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle BEC$; но $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$, а потому $\frac{1}{2}\angle BAC = \angle BEC$.

52. Продолжимъ стороны AB и AC до E и F въ $\triangle ABC$; пусть D точка пересѣченія равнодѣлящихъ внѣшнихъ $\angle \angle B$ и C . $\angle BDC = 2d - (\angle DBC + \angle BCD) = 2d - \frac{1}{2}(\angle EBC + \angle FCB) = 2d - \frac{1}{2}(2d - \angle B + 2d - \angle C) = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$.

53. Пусть G точка пересѣченія равнодѣлящихъ $\angle \angle ABE$ и ADE ; H точка пересѣченія равнодѣлящихъ $\angle \angle ACE$ и AFE . Для $\triangle DGB$ (I, 51), $\angle DGB = \frac{1}{2}\angle DEB$ и для $\triangle ECF$, $\angle CHF = \frac{1}{2}\angle CEF$. Но $\angle DEB = \angle CEF$, а потому $\angle DGB = \angle CHF$.

54. Положимъ $AB > AC$ въ $\triangle ABC$; равнодѣлящая $\angle A$ пересѣкаетъ BC въ D . Отложимъ на AB часть $AE = AC$; тогда $\triangle ADE = \triangle ADC$; слѣд. $DE = DC$ и $\angle ADE = \angle ADC$ и $\angle DEA = \angle DCA$. Но $\angle BED > \angle ADE$ или $\angle ADC$; также $\angle ADC > \angle ABD$; слѣд. $\angle BED > \angle ABD$, а потому въ $\triangle BED$ сторона $BD > DE$ или $BD > DC$.

55. Равнодѣлящія $\angle \angle B$ и C въ $\triangle ABC$ пересѣкаются въ O . Опустимъ $\perp OD, OE$ и OF на AB, BC и AC . $\triangle OBD = \triangle OBE$, $\triangle OCE = \triangle OCF$;

слѣд. $OD=OE$, $OE=OF$ и $\angle ADO=\angle AFO$; откуда $\angle OAD=\angle OAF$, т.-е. равнодѣлящая $\angle A$ также проходитъ чрезъ точку O .

56. Доказательство то же, что и въ предыдущей теоремѣ.

57. D , E и F середины боковъ AB , BC и AC въ $\triangle ABC$; изъ точекъ D и E возставимъ \perp къ AB и BC , кот. пересѣк. въ точкѣ O . Изъ равенства $\triangle ADO$ и BDO , $\triangle OBE$ и OCE выходитъ, что $OA=OB$ и $OB=OC$, т.-е. $\triangle AOC$ равнобедренный, и потому \perp на AC изъ точки O пройдетъ чрезъ F ; слѣд. \perp , возставленный изъ точки F къ AC , пройдетъ чрезъ O .

58. Отложимъ на AD часть $AF=AB$ и F соединимъ съ C ; $\triangle ACF=\triangle ABC$ и слѣд. $CF=CB$ и $\angle AFC=\angle ABC=d$; откуда $FC < CD$ или $BC < CD$. Отложимъ на AE часть $AG=AC$ и точку D соединимъ съ G ; $\triangle ADG=\triangle ADC$ и слѣд. $DG=CD$, $\angle AGD=\angle ACD$ или $\angle EGD=\angle ACB$. Въ $\triangle DEG$ имѣемъ: $\angle GED < \angle ACB$ или $\angle GED < \angle EGD$, а потому $DG < DE$ или $CD < DE$.

59. Треб. доказ., напр., что $DE < DC$. Отложимъ на прямой XY часть $DF=DC$ и F соединимъ съ A . Въ $\triangle ACF$ имѣемъ: $AF+AC > 2AD$ (1, 45); но, по заданію, $AE-AD=AD-AC$ или $AE+AC=2AD$, а потому $AF+AC > AE+AC$ или $AF > AE$; отсюда выходитъ, что $BF > BE$, или $BF-BD > BE-BD$, или $DF > DE$ или $CD > DE$.

60. ABC равностор. \triangle ; AO , BO и CO равнодѣлящія его угловъ. Продолжимъ AO до встрѣчи съ BC въ D ; $\angle BOC=2\angle BOD$, а $\angle BOD=\angle ABO+\angle BAO=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A=A$ и слѣд. $\angle BOC=2A$.

61. ABC равнобедренный \triangle ; CD продолженіе его основанія BC . Тогда $\angle ACD=B+A=(d-\frac{1}{2}A)+A=d+\frac{1}{2}A$ или $2\angle ACD=2d+A$.

62. Черезъ вершины A , B и C данного \triangle проведемъ прямыя, параллельно сторонамъ его, до пересѣченія въ точкахъ C' , B' и A' . Имѣемъ: $B'C' \parallel BC$ и $A'B' \parallel AB$, а потому $AB'=BC$; также $A'C' \parallel AC$ и $B'C' \parallel BC$, а потому $AC'=BC$. Слѣд. A будетъ въ серединѣ $B'C'$ и потому $B'C'=2BC$.

63. Если чрезъ вершины \triangle проведемъ прямыя \parallel его сторонамъ, до ихъ встрѣчи, то высоты его будутъ не что иное, какъ \perp \perp , возставленные изъ серединъ сторонъ полученнаго \triangle , которые пересѣкаются въ одной точкѣ (1, 57).

64. ABC прямоугол. \triangle , въ кот. $\angle A$ прямой. Изъ точки D стороны BC опустимъ \perp \perp DE и DF на AB и AC ; тогда $BE+DE+BD+DF+FC+CD=BE+AF+BD+AE+FC+CD=AB+AC+BC$. Если же точку D' возьмемъ на продолженіи BC и опустимъ \perp \perp $D'E'$ и $D'F'$ на продолженіе сторонъ AB и AC , то $BE'+D'E'+BD'-(D'F'+CF'+CD')=BE'-D'F'+D'E'-CF'+BD'-CD'=AB+AC+BC$, т.-е. разность периметровъ полученныхъ треугольниковъ равна периметру даннаго \triangle .

65. Опустимъ \perp \perp ME , MF , BD и MG на AB , AC , AC и BD . $\angle BEM=\angle BGM$ и слѣд. $ME=BG$; также $MF=DG$ и $ME+MF=BG+GD=BD$. Если же точку возьмемъ на продолженіи BC , то разность разстояній этой точки до другихъ сторонъ будетъ равна перпендикуляру, опущенному изъ конца основанія на противоположную сторону.

66. Опустимъ $\perp\perp MD$, ME и MF на AB , AC и BC и черезъ M проведемъ прямую $KL \parallel BC$, которая пересѣчетъ AB и AC въ K и L ; опустимъ $\perp KG$ на AC и $\perp AH$ на BC , который пересѣчетъ KL въ N . Тогда (I, 65) $MD+ME=KG=AN$, а $MD+ME+MF=A \vee +NH=AH$, т.-е. сумма постоянна и равна высотѣ \triangle . Если же точку возьмемъ внѣ \triangle , то разность между суммой разстояній ея до двухъ сторонъ того угла \triangle , внутри котораго взята точка, и разстояніемъ ея до третьей стороны постоянна и равна высотѣ \triangle .

67. Если A и B лежать по одну сторону XY , то проведемъ изъ A и C прямыя $\parallel XY$, которыя пересѣкутъ CF въ G и BE въ H . $\triangle ACG=\triangle CBH$ и потому $CG=BH$; также $CF=AD+CG$ и $CF=BE-BH$ и слѣд. $2CF=AD+BE$. Точно такъ же надо поступить и въ томъ случаѣ, когда A и B лежать по разнымъ сторонамъ прямой XY .

68. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$: $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ и $AB=nA'B'$. Раздѣлимъ AB на n равныхъ частей: AD, DE, EF, \dots и чрезъ точки дѣленія проведемъ хорды DK, EL, FH, \dots , параллельныя BC ; тогда (I, 50) сторона AC раздѣлится также на n равныхъ частей: AK, KL, LH, \dots ; $\triangle ADK=\triangle A'B'C'$ ($AD=A'B'$, $\angle A=\angle A'$ и $\angle ADK=\angle B=\angle B'$), а потому сторона $AK=A'C'$ и слѣд. $nAK=nA'C'$ или $AC=n \cdot A'C'$. Точно такъ же докажемъ, что $BC=n \cdot B'C'$.

69. Пусть F середина BC . Опустимъ перпендикуляръ FG на прямую XY ; тогда $EG=DG$ (I, 50) и $\angle DFG=\angle EFG$; откуда $DF=EF$.

70. Проведемъ равнодѣлящія внѣшнихъ \angle даннаго $\triangle ABC$, кот. въ пересѣченіи образуютъ $\triangle A'B'C'$, гдѣ A', B' и C' вершины, противоположнія A, B и C . Въ $\triangle AB'C$ углы будутъ: $d-\frac{1}{2}A$, $d-\frac{1}{2}C$ и $\frac{1}{2}(A+C)$; въ $\triangle BA'C$: $d-\frac{1}{2}C$, $d-\frac{1}{2}B$ и $\frac{1}{2}(B+C)$; въ $\triangle AC'B$: $d-\frac{1}{2}A$, $d-\frac{1}{2}B$ и $\frac{1}{2}(A+B)$. Но $d-\frac{1}{2}A=d-\frac{1}{2}[2d-(B+C)]=\frac{1}{2}(B+C)$; также $d-\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}(A+C)$ и $d-\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}(A+B)$, т.-е. что углы $\triangle AB'C$, $AC'B$ и $BA'C$ будутъ: $\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{1}{2}(B+C)$ и $\frac{1}{2}(A+C)$. Вторая часть теоремы видна непосредственно, такъ какъ напр. $\angle B'=\frac{1}{2}(A+C)$ и слѣд. $B+2B'=A+B+C=2d$.

71. $AD=AB$, а потому $\angle ADB=\frac{1}{2}(2d-\angle BAC)$; точно такъ же $\angle CEB=\frac{1}{2}(2d-\angle ACB)$ и $\angle BCF=\frac{1}{2}(2d-\angle CBA)$. Слѣд. $\angle ADB+\angle CEB+\angle BCF=\frac{1}{2}(6d-2d)=2d$. Но $\angle ADB+\angle CEB+\angle EBD=2d$; изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что $\angle BCF=\angle EBD$.

72. $A+B+A'+B'=2d$ или $2d-(A+B)=A'+B'$, т.-е. $C=A'+B'$.

73. $C=2d-A-B=B+A'-A-B=B'-A'$.

74. $A+B+C=2d$ и $B+B'=d$; откуда $A-B'+C=d$ и потому $C=d-(A-B')=d-(A'-B')$.

75. $\angle BDE=\angle ABD=\angle DBE$; слѣд. $BE=DE$ и $DE+CE=BE+CE=BC$.

76. Въ $\triangle BOD$ имѣемъ: $\angle BOD=\angle ABO=\angle OBD$, а потому $OD=BD$; также и въ $\triangle COE$ найдемъ, что $OE=CE$; откуда $OD+DE+OE=BD+DE+EC=BC$.

77. Въ $\triangle BDO$ имѣемъ: $\angle BOD=\angle OBC=\angle OBD$, а потому $OD=BD$; въ $\triangle CEO$ также $OE=CE$; слѣд. $DE-OD+OE=BD+CE$. Изъ $\triangle BD'O'$.

гдѣ $\angle D'BO' = \angle D'O'B$, выходитъ, что $O'D' = BD'$, и изъ $\triangle CE'O'$, что $O'E' = CE'$; слѣд. $D'E' = O'E' - O'D' = CE' - BD'$.

78. D и F середины сторонъ AB и AC въ $\triangle ABC$; O точка пересѣченія прямыхъ BF и CD ; проведемъ прямую AO , которая непремѣнно пройдетъ чрезъ точку E , середину BC . Въ самомъ дѣлѣ, отложивъ на продолженіи AO часть $OM = OA$, соединимъ точку M съ B и C ; тогда изъ $\triangle ABM$ увидимъ, что $DO \parallel BM$ и $DO = \frac{1}{2}BM$, а изъ $\triangle ACM$, что $FO \parallel CM$ и $FO = \frac{1}{2}CM$. Такъ какъ $BM \parallel OC$, а $CM \parallel OB$, то $BM = OC$, а $CM = OB$, т.-е. $OD = \frac{1}{2}OC$ или $= \frac{1}{2}CD$, а $OF = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}BF$. Далѣе: $\triangle CEM = \triangle BEO$ и потому $BE = CE$, т.-е. E середина BC , и $OE = EM = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}AO$ или $OE = \frac{1}{2}AE$.

79. Въ $\triangle ABC$, гдѣ $AC > AB$, D , E и F будутъ середины: AB , BC и AC . Пусть O пересѣченіе BF съ CD ; изъ $\triangle ACE$ и ABE найдемъ, что $\angle AEC > \angle AEB$ и слѣд. $OC > OB$ или $\frac{2}{3}CD > \frac{2}{3}BF$; откуда $CD > BF$.

80. Положимъ, что въ $\triangle ABC$, гдѣ $\angle A$ прямой, $\angle B$ вдвое болѣе $\angle C$; тогда $\angle B + \angle C = d$, или $3\angle C = d$ или $\angle C = \frac{1}{3}d$, а $\angle B = \frac{2}{3}d$. Въ $\angle A$ проведемъ прямую подѣляющую $\angle A$ на два угла, равныхъ $\angle B$, которая пересѣчетъ BC въ точкѣ D ; тогда $\angle ADB = 2d - \frac{2}{3}d = \frac{4}{3}d$, а потому $BD = AD = AB$. Также въ $\triangle ACD$: $\angle DAC = d - \frac{2}{3}d = \frac{1}{3}d = \angle C$, а потому $AD = CD$; слѣд. $BC = 2BD = 2AB$. Обратное предположеніе уже легко доказать.

81. Пусть D середина гипотенузы BC въ $\triangle ABC$. На продолженіи AD отложимъ часть $DE = AD$ и соединимъ E съ B и C . $\triangle DCE = \triangle ABD$, а потому $CE = AB$ и $\angle DEC = \angle BAD$, т.-е. $CE \parallel AB$; $\triangle BDE = \triangle ADC$, а потому $BE = AC$ и $\angle BED = \angle EAC$, т.-е. $BE \parallel AC$; слѣд. $\angle ABE$ будетъ прямой. $\triangle ABE = \triangle ABC$, а потому гипотенузы ихъ AE и BC равны. Итакъ, $AE = BC$, или $\frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}BC$ или $AD = \frac{1}{2}BC$.

82. Данъ $\triangle ABC$ и D середина BC . 1) Когда $AD = BD = DC$, то $\angle B = \angle BAD$, $\angle C = \angle CAD$ и $\angle B + \angle C = \angle A$; но $\angle B + \angle C = 2d - \angle A$, а потому $\angle A = 2d - \angle A$, или $2\angle A = 2d$ или $\angle A = d$. 2) Когда $AD > BD$ и $AD > CD$, то $\angle B > \angle BAD$ и $\angle C > \angle CAD$, а $\angle B + \angle C > \angle A$; но $\angle B + \angle C = 2d - \angle A$, а потому $2d - \angle A > \angle A$ или $2d > 2\angle A$, т.-е. $\angle A < d$. 3) Когда же $AD < \frac{1}{2}BC$, найдемъ, что $\angle A > d$.

83. $AC = AD$; слѣд. $\angle ADC = \angle ACD$. Но $\angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = 2\angle ACD$; также $\angle DAC = 2\angle ACB$. Откуда $\angle BAC + \angle DAC = 2(\angle ACD + \angle ACB)$ или $2d = 2\angle BCD$; откуда $\angle BCD = d$, т.-е. $DC \perp BC$.

84. Въ $\triangle ABD$ точка E середина AB , а потому (I, 81) $ED = EA$; также въ $\triangle ADC$, $FD = AF$, а потому $\triangle EDF = \triangle EAF$. слѣд. $\angle EDF = \angle EAF$.

85. E и F середины AC и AB въ $\triangle ABC$; BG и CH равнодѣляющія $\angle B$ и C ; AG и AH перпендикуляры на BG и CH . Уголъ AGB прямой; слѣд. $AF = FB = FG$. Тогда $\angle AFG = 2\angle ABC = \angle ACB$; слѣд. $FG \parallel BC$. Но $FE \parallel BC$ и потому проходить чрезъ G . Также покажемъ, что EF проходить чрезъ H . слѣд. прямая $GH \parallel BC$ и раздѣляетъ AB и AC пополамъ.

86. Въ $\triangle CDG$ сторона CD будетъ прямой, соединяющей C съ серединою AB ; также $DG \parallel BF$ и $EG \parallel AB$, а потому $DG = BF$ и $EG = BD = FE$; слѣдовательно $\triangle AEF = \triangle CFG$ и потому $CG = AE$.

87. Раздѣлимъ DE пополамъ въ точкѣ F ; тогда $AF=EF$. По заданію, $DE=2AB$, а потому $AB=AF$ и $\angle ABF=\angle AFB=2\angle ADF=2\angle DBC$ или $\angle ABC=\angle ABF+\angle DBC=3\angle DBC$.

88. $\angle AEF$ будетъ внѣшній \angle для равнобедреннаго $\triangle DCE$ и потому $\angle AEF=C+\angle EDC=C+\frac{1}{2}(2d-C)=d+\frac{1}{2}C$; слѣдовательно $C=2\angle AEF-2d$. Въ $\triangle AEF$ имѣемъ: $\angle AEF+\angle AFE=2d-A=2C=4\angle AEF-4d$ или $3\angle AEF=4d+\angle AFE$.

89. $\angle BAD=A-\angle CAD=A-(d-C)=A-d+C$; но $d=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C$ и потому $\angle BAD=A-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C+C=\frac{1}{2}(A-B+C)$.

90. ABC данный треугольникъ; AD равнодѣлящая $\angle A$ и AE высота треугольника. $\angle DAE=\angle BAE-\angle BAD=d-B-\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}(2d-2B-A)=\frac{1}{2}[(A+B+C)-2B-A]=\frac{1}{2}(C-B)$.

91. $\angle AEB=B+C$ и $\angle ADC=B+C$; откуда $\angle AEB=\angle ADC$ или $\angle AED=\angle ADE$, т.-е. $\triangle DAE$ равнобедренный.

92. $\angle DOC=\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(B+C)$; также $\angle AOE=d-\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}(2d-A)=\frac{1}{2}(A+B+C-A)=\frac{1}{2}(B+C)$, т.-е. $\angle DOC=\angle AOE$.

93. $\angle BAD=\angle BDA=C+\angle CAD$ и $\angle CAE=\angle AEC=B+\angle BAE$; сложивъ эти равенства, найдемъ: $d+\angle EAD=d+\angle CAD+\angle BAE$ или $\angle EAD=\angle CAD+\angle BAE=d-\angle EAD$; откуда $\angle EAD=\frac{1}{2}d$.

94. Доказательство сходно съ предыдущимъ.

95. Такъ какъ $\angle AEC=\angle ACE$ и $\angle AEC+\angle ECA=\angle BAC$, то $\angle AEC=\frac{1}{2}\angle BAC$. Въ $\triangle DCE$ прямая $AC=AD=AE$, а потому $\angle DCE$ прямой.

96. $\triangle ACD$ и CBE равнобедрен., а потому $\angle ACD=d-\frac{1}{2}A$ и $\angle ECB=d-\frac{1}{2}B$; слѣд. $\angle ACD+\angle ECB=2d-\frac{1}{2}(A+B)=d$, потому что $A+B=2d$; откуда $\angle DCE=2d-(\angle ACD+\angle ECB)=d$.

97. Положимъ, что $\angle B$ будетъ острый: 1) $\angle A$ есть общій въ $\triangle ABC$ и AEF и $\angle E=\angle C$. 2) Изъ точки A возставимъ \perp къ AE до пересѣченія съ EF въ G ; тогда $\angle ADG=d-\angle FDC=d-C$ и $\angle AGE=d-(\angle AEG=d-C)$; слѣд. $\angle ADG=\angle AGE$ и $AD=AG$, т.-е. $\triangle AEG$ и ADC равны; откуда $AE=CD$ и потому $AB=AE-BE=CD-BD$.

98. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$ дано: $BC=B'C'$, $\angle B=\angle B'$ и $AB+AC=A'B'+A'C'$. Продолживъ сторону BA , отложимъ часть $AD=AC$; также, продолживъ сторону $B'A'$, отложимъ часть $A'D'=A'C'$. $\triangle DBC=\triangle D'B'C'$ и слѣд. $\angle D=\angle D'$ и $CD=C'D'$; слѣд. равнобедр. $\triangle ADC$ и $A'D'C'$ равны и $AC=A'C'$, а потому и $AB=A'B'$.

99. Доказательство сходно съ предыдущимъ.

100. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$: $BC=B'C'$, $\angle A=\angle A'$ и $AB+AC=A'B'+A'C'$, гдѣ предположимъ, что $AB>AC$. Продолживъ BA , отложимъ часть $AD=AC$; $\triangle ADC$ равнобедренный и $\angle ACD=\angle ADC=\frac{1}{2}A$. То же самое сдѣлаемъ и для $\triangle A'B'C'$ и найдемъ, что $\angle A'C'D'=\angle A'D'C'=\frac{1}{2}A'$; но $\angle A=\angle A'$ и потому $\angle ADC=\angle A'D'C'$. Видимъ, что $\triangle BDC$ и $B'D'C'$ равны и, при ихъ совмѣщеніи, сторона $C'A'$ пойдетъ по CA , и потому $\triangle A'B'C'$ совмѣстится съ $\triangle ABC$.

101. Доказательство сходно съ предыдущимъ.

102. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$: $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ и $AB + AC + BC = A'B' + A'C' + B'C'$. На продолженіяхъ бока BC отложимъ $BD = BA$ и $CE = CA$; тогда сторона DE въ $\triangle ADE$ равна периметру \triangle , $\angle D = \angle DAB = \frac{1}{2}B$ и $\angle E = \angle CAE = \frac{1}{2}C$; то же самое сдѣлаемъ и для $\triangle A'B'C'$. Такъ какъ $\triangle ADE = \triangle A'D'E'$, то, совмѣстивъ ихъ, увидимъ, что $A'B'$ пойдетъ по AB и $A'C'$ по AC .

103. $ABCD$ данный четырехугольникъ и E точка внутри его. Тогда $AE + CE > AC$ и $BE + DE > BD$; откуда $AE + BE + CE + DE > AC + BD$.

104. Пусть $ABCD$ данный четырехугольникъ. Тогда $AB + BC > AC$, $AD + CD > AC$, $AB + AD > BD$ и $BC + CD > BD$; сложивъ почленно эти неравенства и сокративъ на 2, найдемъ: $AB + BC + CD + DA > AC + BD$.

105. Проведемъ равнодѣлящія $\angle A$ и B въ $\diamond ABCD$ до ихъ пересѣченія въ O ; $\angle AOB = 2d - \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(A + B + C + D) - \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(C + D)$.

106. $ABCD$ данный \diamond . Проведемъ равнодѣлящія угловъ A и C до ихъ встрѣчи въ точкѣ O и продолжимъ AO до пересѣченія съ BC въ E ; тогда увидимъ: $\angle COE = \angle AEB - \frac{1}{2}C = 2d - \frac{1}{2}A - B - \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(4d - A - 2B - C) = \frac{1}{2}(A + B + C + D - A - 2B - C) = \frac{1}{2}(D - B)$.

107. Въ каждый изъ \triangle -въ, полученныхъ на сторонахъ многоугольника, входитъ одинъ изъ исконыхъ угловъ и два внѣшнихъ угла многоугольника, соотвѣств. угламъ, прилежащимъ къ этой сторонѣ; поэтому сумма \angle въ всѣхъ \triangle -хъ, полученныхъ на сторонахъ многоугольника, будетъ состоятъ изъ искомой суммы угловъ и двойной суммы внѣшнихъ угловъ даннаго многоуг. Означивъ число сторонъ многоуг. буквою n , а сумму исконыхъ угловъ буквою a , найдемъ, что $2dn = a + 2 \cdot 4d$ или $a + 8d = 2nd$.

108. Поставивъ въ предыдущемъ равенствѣ $n + 4$ вмѣсто n , найдемъ: $a + 8d = 2(n + 4)d$ или $a = 2nd$.

109. На основаніи BC равнобедреннаго $\triangle ABC$ возьмемъ какую-нибудь точку D и изъ нея проведемъ прямыя, || бокамъ CA и BA , до пересѣченія съ ними въ E и F ; тогда $\angle EBD = \angle ACB = \angle EDB$ и слѣд. $ED = BE$; также $DF = AE$; поэтому $AE + ED + DF + FA = 2DE + 2AE = 2AB$.

110. Въ $\square ABCD$ проведемъ чрезъ O пересѣченіе діагоналей прямую, которая встрѣтитъ AD и BC въ точкахъ E и F . $\triangle AEO = \triangle CFO$ и слѣдовательно $OE = OF$. $\diamond ABFE = \diamond CDEF$, потому что всѣ части одного, соотвѣственно, равны всѣмъ частямъ другого.

111. Пусть въ $\square ABCD$, $\angle A$ болѣе $\angle B$. Тогда въ $\triangle ABD$ и ABC , $\angle LBA$ и ABC заключены между равными сторонами, а потому $BD > AC$.

112. $\triangle AEN = \triangle CFG$ и слѣд. $EN = FG$; также и $\triangle EBG = \triangle DFH$ и слѣд. $EG = FH$; поэтому фигура $EGFH$ будетъ параллелограммъ. Означивъ буквою O точку пересѣченія прямыхъ GH и BD , увидимъ, что $\triangle BOG = \triangle DOH$, и потому $OB = OD$, а $OG = OH$, т.-е. O будетъ середина діагоналей GH и BD , чрезъ которую пройдутъ діагонали EF и AC .

113. \perp изъ A пересѣчетъ CD или продолженіе CD въ H , а \perp изъ C пересѣчетъ AD или продолженіе AD въ G , а сами \perp встрѣтятся въ точкѣ F . Увидимъ, что прямыя AH , CG и DE будутъ высоты $\triangle ACF$, пересѣкающіяся въ F (I, 63).

114. Данъ $\square ABCD$. На его сторонахъ отложимъ части $AM=BN=CP=DQ$ и соединимъ M съ N , N съ P , P съ Q и Q съ M . $\triangle AMQ$, $\triangle BNM$, $\triangle CNP$ и $\triangle DPQ$ равны, и потому $MQ=MN=NP=PQ$ и $\angle AQM=\angle BMN$; но $\angle AMQ+\angle AQM=d$ или $\angle AMQ+\angle BMN=d$, а поэтому и $\angle NMQ$ тоже равенъ d . Слѣд. $\diamond MNPQ$ будетъ квадратъ.

115. Въ $\diamond ABCD$ діагонали AC и BD пересѣкаются въ O . Разсматривая $\triangle ABC$ видимъ, что $OB=OA=OC$, т.-е. $OB=\frac{1}{2}AC$, а потому (I, 82), заключаемъ, что $\angle B$ прямой. Точно такъ же покажемъ, что и остальные углы прямые, т.-е. $\diamond ABCD$ будетъ прямоугольникъ.

116. M и N будутъ точки пересѣченія BD съ CE и AF . Изъ точки M проведемъ прямую $MK \parallel AB$ до пересѣченія съ AF въ точкѣ K ; $\triangle BEM$, $\triangle KMN$ и $\triangle DFN$ равны, а слѣд. $BM=MN=ND$.

117. Предположимъ, что прямая XU пересѣкаетъ параллелограммъ. Опустимъ \perp на AE , CG и DF на прямую XU и $\perp DK$ на CG . $\triangle ABE=\triangle CDK$; откуда $CK=AE$ и $DF=KG=CK-CG=AE-CG$.

118. $ABCD$ данная трапеція, гдѣ $AD \parallel BC$ и $AB=CD$. Изъ точки B проведемъ прямую $\parallel CD$ до пересѣченія съ AD въ точкѣ E ; тогда $AB=BE$ и $\angle A=\angle AEB=\angle D$; но $\angle C+\angle D=2d$, а потому $\angle C+\angle A=2d$. Точно такъ же и $\angle B+\angle D=2d$.

119. Дана трапеція $ABCD$, гдѣ $AD \parallel BC$ и $\angle A+\angle C=2d$; но $\angle A+\angle B=2d$, а потому $\angle B=\angle C$ и слѣд. $\angle A=\angle D$. Проведемъ прямую $BE \parallel CD$ до пересѣченія съ AD въ точкѣ E ; получимъ $\triangle ABE$, въ которомъ $\angle A=\angle D=\angle AEB$ и слѣд. $AB=BE$ или $AB=CD$.

120. Въ трапеціи $ABCD$, гдѣ $AD \parallel BC$, черезъ E , середину AB , проведемъ прямую $\parallel AD$, которая пересѣчетъ прямыя AC , BD и CD въ H , G и F . Изъ $\triangle ABC$ видимъ (I, 40), что H середина AC и $EH=\frac{1}{2}BC$; изъ $\triangle ACD$, что F середина CD и $FH=\frac{1}{2}AD$, а изъ $\triangle BCD$, что G середина BD и $FG=\frac{1}{2}BC$; отсюда слѣдуетъ, что середины прямыхъ: AB , AC , BD и CD лежатъ на одной прямой. Кроме того, $EF=EH+HF=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}(BC+AD)$ и $HG=HF-GF=\frac{1}{2}AD-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AD-BC)$.

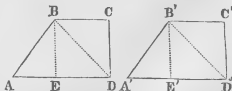
121. Дана равнобочная трапеція $ABCD$, въ кот. $\angle A=\angle D$ и $\angle B=\angle C$; E и F середины AB и CD . Изъ E и F возставимъ \perp къ AB и CD , кот. пересѣкутся въ G ; опустимъ $\perp GK$ на BC ; треб. док., что $BK=CK$. Продолжимъ GE и GF до пересѣченія съ продолженіями стороны BC въ M и N ; $\triangle BEM=\triangle CFN$ и слѣд. $BM=CN$ и $\angle M=\angle N$; поэтому въ $\triangle MGN$ имѣемъ: $MK=NK$ или $MK-BM=NK-CN$ или $BK=CK$.

122. Дано (фиг. 5) $AB=A'B'$, $AD=A'D'$, $\angle A=\angle A'$ и $\angle D=\angle D'$. Для доказательства, наложимъ одну трапецію на другую.

123. Дано: $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AD=A'D'$ и $\angle A=\angle A'$. Для доказательства, наложимъ одну трапецію на другую.

124. Дано: $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AD=A'D'$ и $BD=B'D'$. $\triangle ABD=\triangle A'B'D'$, а потому $\angle A=\angle A'$ и слѣд. приводимъ къ 122 теоремѣ.

Фиг. 5.



125. Дано: $AD=A'D'$, $BC=B'C'$, $\angle A=\angle A'$ и $\angle D=\angle D'$. Проведемъ прямую $BE \parallel CD$ и $B'E' \parallel C'D'$; $\triangle ABE=\triangle A'B'E'$ и слѣд. $AB=A'B'$, а потому приводимся къ 122 теоремѣ.

126. Дано: $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CD=C'D'$ и $AD=A'D'$. Проведемъ $BE \parallel CD$ и $B'E' \parallel C'D'$; $\triangle ABE=\triangle A'B'E'$ и слѣд. $\angle A=\angle A'$, а потому приводимся къ 122 теоремѣ.

127. 1) $\angle DAB=\frac{1}{2}d=\angle NAE$; но BAN прямая, а потому и DAE прямая. 2) $\angle MBA=\frac{1}{2}d=\angle ANC$, а потому $BM \parallel CN$. 3) Опустимъ $\perp AK$ на BC ; $\triangle ABK=\triangle BDP$; откуда $BK=DP$; также $\triangle AKC=\triangle CQE$ и потому $KC=EQ$. слѣд. $BC=BK+KC=DP+EQ$. 4) Пусть S точка пересѣченія HA съ BC . $\triangle AMH=\triangle ABC$, а потому $\angle AHM=\angle ACS$ и $\angle MAH=\angle CAS$; но $\angle AHM+\angle MAH=d$, а потому и $\angle ACS+\angle CAS=d$, т.-е. $\triangle ACS$ прямоугольный и $HS \perp CB$. $\triangle DBC=\triangle ABH$; слѣд. $\angle BHS=\angle BCD$ и $\angle BHS+\angle HBS=d$. Пусть G точка пересѣченія HB съ CD ; тогда $\angle CBG+\angle BCG=d$, т.-е. что $\angle CGB=d$ и слѣд. $CD \perp BH$. Точно такъ же и $BE \perp CH$ въ точкѣ L , а потому прямые HP , CG и BL , будучи высотами $\triangle CHB$, пересѣкаются въ одной точкѣ.

128. Проведемъ прямые $MX \parallel AN$ и $NY \parallel AM$, кот. пересѣкнутся въ L ; Q пересѣченіе MN съ AL и G середина BC . $\triangle AML=\triangle ABC$, а потому $AL=BC$ и $\frac{1}{2}AL=\frac{1}{2}BC$, т.-е. $AQ=BG$, а также $MQ=AG$; но $MN=2MQ$ и потому $MN=2AG$. $\triangle AMQ=\triangle ABG$; слѣд. $\angle AMQ=\angle BAG$; но сторона $AM \perp AB$, а потому и сторона $MQ \perp AG$ или $AG \perp MN$.

129. Пусть точки M , N , P и Q середины сторонъ: AB , BC , CD и DA въ $\diamond ABCD$. Изъ $\triangle ABD$ видимъ, что $MQ \parallel BD$ и $=\frac{1}{2}BD$, а изъ $\triangle BCD$, что $NP \parallel BD$ и $=\frac{1}{2}BD$; слѣд. $\diamond MNPQ$ будетъ параллелограммъ.

130. Діагонали равнобочной трапеціи равны, а потому прямые, соединяющія середины послѣдовательныхъ боковъ, равныя половинамъ діагоналей, составляютъ ромбъ.

131. Въ трапеціи $ABCD$, гдѣ $BC \parallel AD$ и $AB=AC$, E и F середины BC и AD . Соединимъ E съ A и D ; $\triangle ABE=\triangle DCE$; слѣд. $AE=DE$, т.-е. $\triangle AED$ равнобедренный и потому $EF \perp AD$.

132. Проведемъ прямую $EX \parallel BC$ до пересѣченія съ продолженіемъ DC въ G ; тогда $EG=AD=2AB$ и $DG=AE=2AB$; слѣд. $\diamond AEGD$ будетъ ромбъ, въ которомъ діагонали AG и DE перпендикулярны. Но $AF=$ и $\parallel CG$; слѣд. $AG=$ и $\parallel CF$, а потому CF , параллельная AG , $\perp DE$.

133. Данъ $\diamond ABCD$; M , N , P и Q середины прямыхъ AB , CD , AC и BD . Изъ $\triangle ACD$ имѣемъ: $NP \parallel AD$ и $=\frac{1}{2}AD$, а изъ $\triangle ABD$ имѣемъ: $MQ \parallel AD$ и $=\frac{1}{2}AD$; слѣд. фигура $MPNQ$ будетъ параллелограммъ.

134. Данъ $\diamond ABCD$; M , N , P и Q середины прямыхъ AB , CD , AC и BD ; O пересѣченія прямыхъ MN и PQ . $\diamond MQNP$ будетъ параллелограммъ, въ кот. MN и PQ діагонали, а потому O будетъ серединою PQ .

135. Въ $\diamond ABCD$, точки E , F , G , H , K и L середины AB , BC , CD , DA , AC и BD ; M точка пересѣченія EG и FH . Въ $\square EFGH$ діагонали EG и FH дѣлятся пополамъ, и слѣд. M лежитъ на серединѣ FH ; фигура $HLFK$ тоже \square , гдѣ M середина діагонали FH , а потому и діагональ KL проходитъ также черезъ M и въ ней дѣлится пополамъ, т.-е. $KM=LM$.

136. Въ $\triangle ABD$, $AD > AB$, а потому $\angle ABD > \angle ADB \dots (1)$; въ $\triangle BDC$, $CD > BC$, а потому $\angle DBC > \angle BDC \dots (2)$. Сложивъ (1) и (2), получимъ $\angle ABC > \angle ADC$. Точно также можно показать, что $\angle BCD > \angle BAD$.

137. Проведемъ равнодѣлящія угловъ $\diamond ABCD$, и пусть M будетъ точкою пересѣч. равнодѣл. $\angle A$ и B ; $N = \angle B$ и C ; $P = \angle C$ и D и $Q = \angle D$ и A . Тогда $\angle BNC = 2d - \frac{1}{2}(B+C)$ и $\angle AQD = 2d - \frac{1}{2}(A+D)$; отсюда $\angle BNC + \angle AQD = 4d - \frac{1}{2}(A+B+C+D) = 4d - 2d = 2d$. Если $\diamond ABCD$ параллелограммъ, то равнодѣлящія двухъ послѣдовательныхъ угловъ будутъ \perp -ны, а потому $\diamond MNPQ$ будетъ \square . Продолжимъ AM до пересѣченія съ BC въ E и CN до пересѣченія съ AD въ F ; въ $\triangle ABE$, $\angle BEA = \angle EAD = \frac{1}{2}A = \angle BAE$, а потому въ равнобедренномъ $\triangle ABE$ сторона $AB = BE$ и $AM = ME$. Точно также же и въ $\triangle CDF$, $CD = FD$ и $CP = FP$; но $AE = CF$, а потому $EM =$ и $\parallel CP$; слѣд. $MP \parallel CE$ и $MP = CE = BC - BE = BC - AB$. Наконецъ, если $\diamond ABCD$ будетъ прямоугольникомъ, то фигура $MNPQ$, въ которой діагонали $=$ и \perp къ сторонамъ AB и CD (см. предыдущ.), т.-е. \perp между собою, будетъ квадратъ.

138. 1) Такъ какъ (фиг. 6) $EC =$ и $\parallel AB$, то $BE =$ и AC ; точно также $DF =$ и $\parallel AC$; слѣд. фигура $BEFD$ будетъ \square , въ которомъ стороны равны діагоналямъ. 2) Пусть M и N середины сторонъ AB и CD ; проведемъ прямую AF , которая, будучи діагональю параллелограмма, пройдетъ черезъ середину CD , т.-е. точку N ; теперь, рассматривая $\triangle ABF$, найдемъ (I, 41), что $BF = 2MN$. 3) $\angle \angle ECB$ и FCD равны $\angle \angle B$ и D , какъ на крестъ-лежащие между \parallel прямыми; $\angle ECF = \angle A$, по параллельности боковъ.

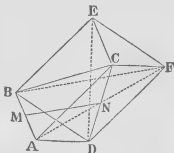
139. Въ шестиугольникъ $ABCDEF$ проведемъ прямыя AE , BD , AD и BE .

Тогда $AB =$ и $\parallel DE$, а потому $ABDE$ будетъ параллелограммъ, въ кот. діагонали AD и BE дѣлятся пополамъ другъ друга въ O . Также въ $\square BCEF$ діагональ CF проходитъ черезъ середину BE , т.-е. O ; слѣдовательно AD , BE и CF пересѣкаются въ одной точкѣ.

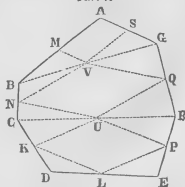
140—143. Надо одинъ четырехугольникъ наложить на другой.

144. Предложенную теорему можно выразить такъ: *выпуклый многоугольникъ нечетнаго числа сторонъ вполнѣ определяется, когда известны середины его боковъ*. Это предложеніе очевидно, когда имѣемъ $\triangle ABC$ (фиг. 7), потому что, если даны M , S и V середины его сторонъ, то

Фиг. 6.



Фиг. 7.



стороны $\triangle ABC$ будут параллельны сторонам $\triangle MSV$; а такъ какъ черезъ точку можно провести только одну прямую, параллельную данной, то поэтому $\triangle ABC$ вполне определенъ. Положимъ, данъ, для примѣра, выпуклый семиугольникъ $ABCDEFGC$, гдѣ M, N, K, L, P, Q и S середины боковъ AB, BC, \dots и GA ; проведемъ прямыя BC и CF , раздѣлимъ семиугольникъ на \triangle и два \diamond ; пусть U и V середины CF и BG . Соединивъ U и L съ K и P , получимъ $\square UKLP$, въ которомъ вершины K, L и P даны, а потому и вершина U вполне определена. Соединивъ V и U съ N и Q , получимъ $\square VNUQ$, въ которомъ вершины N, U и Q определены, а потому и вершина V также вполне определена; наконецъ, $\triangle ABC$, въ которомъ M, V и S , т.-е. середины боковъ, извѣстны, будетъ вполне определенъ. Отсюда ясно, что когда определена вершина A , то определена сторона $AB=2AM$, сторона $BC=2BN$ и т. д.

145. Раздвинувъ ножки циркуля на длину a , ставимъ ножку безъ карандаша или пера въ точку A , а другою описываемъ дугу, кот. пересѣчетъ прямую XU въ точкѣ B . AB будетъ искомая часть.

146. Проведемъ произвольно прямую и взявъ на ней точку, поступаемъ далѣе такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ.

147. Продолживъ AB , отложимъ часть $BC=a$ (I, 145). Длина AC искомая.

148. Проведемъ произвольную прямую и на ней отложимъ часть $AB=a$; потомъ отложимъ отъ точки B , въ томъ же направленіи, часть $BC=b$ и, наконецъ, часть $CD=c$. Прямая AD будетъ искомая.

149. Проведемъ произвольную прямую, отложимъ на ней часть $A'B'=AB$, $B'C'=BC$, $C'D'=CD$ и $D'E'=DE$. Прямая $A'E'$ будетъ искомая.

150. Пусть a данная прчяая. На произвольной прямой XU отложимъ часть $AB=a$, $BC=a$, $CD=a$ и $DE=a$. Прямая AE будетъ искомая.

151. На произвольной прямой отложимъ часть $MN=5AB$; MN будетъ искомая прямая.

152. На произ. прямой отложимъ часть $MN=9AB$; MN искомая прямая.

153. Представимъ дюймъ AB , раздѣленный на 10 равныхъ частей въ точкахъ: C, D, E, F, G, H, \dots ; тогда, проведемъ прямую XU , отложимъ на ней часть $MN=AB+AG$ и часть $PQ=AB+AH$. Прямые MN и PQ искомыя.

154. На произвольной прямой отложимъ часть $AB=3a$ (I, 150) и отъ конца послѣдней — еще часть $BC=2c$. Длина AC будетъ искомая.

155. На произвольной прямой XU отложимъ часть $AB=a$, а потомъ отъ B къ A —часть $BC=b$; AC будетъ искомая разность.

156. На произвольной прямой отложимъ сначала часть $AB=5a$ (I, 150), а потомъ отъ B къ A —часть $BC=4b$; AC будетъ искомая длина. Задача возможна, когда $a > \text{или} = \frac{4}{5}b$.

157. Смотри 148, 149, 154 и 155 задачи этого отд.

158. Возьмемъ на прямой MN какую-нибудь точку B и изъ A опишемъ окружность радіусомъ AB , которая пересѣчетъ прямую MN въ B .

159. Окружности, описанныя изъ A и B радіусами, большими нѣсколько половины AB , будутъ искомыя.

160. Изъ точекъ A и B данной прямой AB опишемъ окружности радіусомъ, большимъ половины AB , кот. въ пересѣченіи дадутъ искомыя точки.

161. Изъ A опишемъ окружность радіусомъ въ 2 дюйма, а изъ B — радіусомъ въ 1 дюймъ. Если окружн. пересѣкнутся, то получимъ искомую точку.

162. Изъ точки A опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ a , которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ B и C . Хорды AC и AB будутъ искомыми.

163. Принявъ B за центръ, опишемъ дугу произвольнымъ радіусомъ, кот. пересѣчетъ бока угла въ D и E ; проведемъ произвольную прямую XU и изъ какой-либо точки ея M опишемъ дугу KL тѣмъ же радіусомъ, кот. пересѣчетъ эту прямую въ N ; изъ N опишемъ дугу радіусомъ DE , кот. пересѣчетъ дугу KL въ P . $\angle PMN$ будетъ искомымъ.

164. Рѣшеніе то же, что въ предыдущей задачѣ.

165. Построимъ $\angle DEF = \angle A$; на EF , при точкѣ E и внѣ $\angle DEF$, построимъ $\angle CEF = \angle B$ и наконецъ, внѣ $\angle DEG$, построимъ $\angle GEN = \angle C$. Тогда $\angle DEN$ будетъ искомымъ.

166. Построеніе одинаковое съ предыдущимъ, потому что упятерить уголь значить взять данный уголь 5 разъ слагаемымъ.

167. Построимъ $\angle DEF = \angle A$ и на ED , внутри угла, построимъ $\angle DEG = \angle B$. Уголь GEF будетъ искомымъ.

168. Изъ A опишемъ дугу произвольнымъ радіусомъ, кот. пересѣчетъ бока угла въ M и N ; изъ M и N опишемъ дуги равными радіусами, большими MN , кот. пересѣкнутся въ точкѣ D . Прямая AD будетъ искома.

169. Данный уголь раздѣлимъ пополамъ; каждую часть пополамъ и т. д.

170. Представимъ $0,75$ въ видѣ простой дроби $\frac{3}{4}$. Слѣдовательно, данный уголь надо будетъ раздѣлить на четыре части и взять такихъ три.

171. Половина угла, равнаго суммѣ данныхъ угловъ, будетъ больший изъ искомыхъ угловъ; половина же угла, равнаго разности данныхъ угловъ, будетъ меньшій изъ искомыхъ угловъ. Задача возможна, если сумма дана болѣе разности.

172. Изъ A опишемъ окружность радіусомъ нѣсколько большимъ (на глазъ) половины AB ; изъ точки B опишемъ окружность тѣмъ же радіусомъ, которая пересѣчетъ первую окружность въ C и D ; проведемъ прямую CD , которая встрѣтитъ AB въ E . Точка E будетъ серединою AB .

173. Раздѣлимъ данную прямую пополамъ; каждую часть пополамъ и т. д.

174. Представивъ десятичную дробь $2,625$ въ видѣ простой, получимъ $2\frac{5}{8}$. Видимъ, что искома прямая должна быть равна двумъ даннымъ прямымъ, да еще пяти восьмымъ ея. Эту же прямую легко построить (I, 150, 173).

175. Половина суммы двухъ данныхъ прямыхъ будетъ большая прямая изъ искомыхъ, а половина разности данныхъ прямыхъ будетъ меньшая изъ искомыхъ. Задача возможна, когда сумма болѣе разности.

176. На прямой XU отложимъ въ обѣ стороны равныя части AB и AC ; изъ точекъ B и C опишемъ дуги радіусомъ, большимъ AC , которая пересѣкнутся въ точкѣ D . Прямая AD будетъ искомымъ перпендикуляръ.

177. Продолжимъ данную прямую за данную точку, поступаемъ такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ.

178. Рѣшеніе то же, что и въ 172 зад.

179. \perp , возставленный изъ середины AB , будетъ искомое геом. мѣсто.

180. Возставим \perp изъ середины AB , который пересѣчетъ MN въ C . Точка C будетъ искомая.

181. См. 180 зад.

182. Точка пересѣченія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ серединъ двухъ какихъ-либо сторонъ, будетъ искомая.

183. На AB возьмемъ двѣ точки C и D и изъ нихъ опишемъ дуги радіусами, большими нѣсколько CD , которыя пересѣкутся въ E и F . Изъ E и F опишемъ дуги произвольными, но равными радіусами, которыя въ пересѣченіи дадутъ искомую точку.

184. Построимъ $\angle XCY$, равный данному, и на его бокахъ отложимъ части: $CA=b$ и $CB=a$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

185. (I, 184).

186. Проведемъ прямую XU и на ней, отъ какой-либо точки D , отложимъ части: $DB=d$ и $DC=c$; возставимъ $\perp DE$ къ XU и на немъ отложимъ $DA=h_a$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

187. Рѣшеніе то же, что и въ предыд. зад., гдѣ только $DB=DC=\frac{1}{2}a$.

188. (I, 184).

189. На произвольной прямой отложимъ часть $BC=a$ и построимъ на ней $\angle MBC$ и $\angle NCB$, равные даннымъ. $\triangle ABC$, гдѣ A точка пересѣченія прямыхъ MB и NC , будетъ искомымъ.

190. (I, 189). 191. (I, 189).

192. На произвольной прямой отложимъ часть $BC=a$; изъ B и C опишемъ дуги радіусами c и b , кот. пересѣкутся въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

193. На произвольной прямой отложимъ часть $BC=a$; изъ B и C опишемъ дуги радіусами b и b , кот. пересѣкутся въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

194. На произвольной прямой отложимъ часть $BC=a$; изъ B и C опишемъ дуги радіусами a и a , кот. пересѣкутся въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

195. Построимъ $\angle XBY$, равный данному $\angle B$, и на сторонѣ BY отложимъ часть $BC=a$; изъ точки C опишемъ дугу радіусомъ b , которая пересѣчетъ прямую BX въ A и A' . $\triangle ABC$ и $A'BC$ будутъ искомыми. Задача допускаетъ два рѣшенія, или одно, или ни одного.

196. (I, 210).

197. На произвольной прямой XU отложимъ часть $BD=d$ и $DC=e$; возставимъ $\perp DE$ къ XU , а изъ точки C опишемъ дугу радіусомъ b , которая пересѣчетъ DE въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

198. Построимъ $\angle XBY$, равный $\angle B$, и на сторонѣ BY отложимъ часть $BD=d$ и $DC=e$; возставимъ $\perp DE$ къ XU , который пересѣчетъ прямую BX въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

199. Изъ произвольной точки D по прямой XU возставимъ \perp , на которомъ отложимъ часть $DA=h_a$; изъ точки A опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ b , кот. пересѣчетъ прямую XU въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

200. Изъ A опишемъ окружность, пересѣкающую прямую XU въ B и C ; изъ B и C , тѣмъ же радіусомъ, опишемъ дуги, которыя пересѣкутся въ D ; пусть E точка пересѣченія прямыхъ AD и XU . Прямая AE будетъ искомымъ перпендикуляръ.

201. Опустимъ $\perp AB$ на XU . AB будетъ искомое разстояніе.

202. Равнодѣлящая угла, составленнаго данными прямыми, будетъ искомое геометрическое мѣсто.

203. Проведемъ равнодѣлящую угла, составленнаго прямыми MN и KL которая пересѣчетъ прямую XU въ A . Точка A будетъ искомая.

204. Проведемъ равнодѣлящую двухъ какихъ-либо угловъ, которая пересѣкнется въ точкѣ O . Точка O будетъ искомая.

205. Соединимъ точку A съ какою-либо точкою B прямой MN и на AB построимъ $\angle CAB$, равный на-крестъ лежащему углу при точкѣ B . Прямая AC будетъ искомая.

206. Изъ какой-либо точки одной прямой опустимъ \perp на другую. Часть перпендикуляра между данными прямыми будетъ искомое разстояніе.

207. Изъ точки A прямой XU возставимъ къ ней $\perp AK$ и на немъ отложимъ часть $AB=a$. Прямая $BC \parallel XU$, будетъ искомая.

208. Рѣшеніе то же, что и въ 207 задачѣ этого отдѣла.

209. Проведемъ прямую $KL \parallel MN$ на разстояніи a (I, 208), которая пересѣчетъ прямую XU въ A . Точка A будетъ искомая.

210. На прямой XU построимъ $\angle XCD$, равный $\angle a$, и проведемъ прямую $AB \parallel CD$. Прямая AB будетъ искомая.

211. Построимъ $\angle XBY$, равный $\angle B$, и на сторонѣ BY отложимъ часть $BC=a$; изъ точки C проведемъ прямую подъ угломъ A къ прямой BX , которая пересѣчетъ ее въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

212. (I, 211). 213. (I, 211).

214. Пусть D , E и F середины сторонъ. Проведемъ чрезъ точку D прямую $\parallel EF$; чрезъ $E \parallel DF$ и чрезъ $F \parallel DE$; тогда въ пересѣченіи этихъ прямыхъ получимъ искомый \triangle .

215. Чрезъ точку M проведемъ прямую $KL \parallel XU$, а чрезъ точки N и P прямые NS и PT подъ углами A и B къ прямой XU . Въ пересѣченіи прямыхъ: KL , NS и PT получимъ искомый \triangle .

216. Изъ произвольной точки A прямой KL опустимъ $\perp AB$ на прямую MN . Прямая, проходящая чрезъ середину AB , параллельно MN , будетъ искомое геометрическое мѣсто.

217. Искомая точки, очевидно, лежатъ на одинаковомъ разстояніи отъ прямой, а потому искомое геометрическое мѣсто будетъ прямая.

218. Проведемъ прямую, равноотстоящую отъ прямыхъ MN и KL , которая пересѣчетъ XU въ A . Точка A будетъ искомая.

219. Изъ произвольной точки B прямой MN опишемъ дугу радіусомъ a , кот. пересѣчетъ прямую KL въ C . Прямая $AD \parallel BC$ будетъ искомая.

220. Проведемъ прямую $XU \parallel MN$ на разстояніи a и изъ середины AB возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ прямую XU въ C . Точка C будетъ искомая.

221. Проведемъ прямую $AB \parallel MN$ на разстояніи a и прямую $CD \parallel KL$ на разстояніи b . Точка G пересѣченія прямыхъ AB и CD будетъ искомая.

222. Между MN и KL проведемъ прямые AB и CD , параллельныя имъ и на одинаковомъ разстояніи отъ нихъ, которая пересѣкнется въ точкѣ G . Равнодѣлящая $\angle G$ будетъ искомая.

223. Черезъ точку A проведемъ произвольно прямую AX и на ней отложимъ послѣдовательно n равныхъ, но произвольныхъ частей: $AC=CD=DE=EF=\dots=KL$. Изъ точекъ C, D, E, F, \dots и K проведемъ прямыя, параллельно BL , которая отсѣкутъ на AB n равныхъ частей (I, 50).

224. Прямую AB раздѣлимъ на три части (I, 223) въ точкахъ C и D . Часть AD будетъ искомая.

225. Прямая, проходящая черезъ точку A и середину BC , будетъ искомая.

226. Раздѣлимъ пополамъ прямую BC въ D и проведемъ черезъ A прямую MN , перпендикулярную къ AD . Прямая MN будетъ искомая.

227. Изъ A опишемъ дугу произвольнымъ радіусомъ, которая пересѣчетъ бока угла въ B и C . Прямая $MN \parallel BC$ будетъ искомая.

228. Рѣшеніе то же, что и въ 227 задачѣ этого отдѣла.

229. Изъ какой-либо точки C діаметра AB возставимъ \perp внутри полукруга и на немъ отложимъ часть $CE=a$; черезъ точку E проведемъ прямую $\parallel AB$, которая пересѣчетъ, окружность въ M и N . Точки M и N будутъ искомыя. Задача возможна, если $a < =$ или $\frac{1}{2}AB$.

230. Изъ произвольной точки B прямой AY возставимъ \perp , на кот. отложимъ часть $BC=a$ и черезъ C проведемъ прямую $\parallel AY$, кот. пересѣчетъ AX въ D . Прямая, проведенная черезъ точку $D \parallel CB$, будетъ искомая.

231. Изъ произвольной точки B проведемъ, внутри угла, прямую $\parallel MN$ и на ней отложимъ часть $BC=a$. Дальнѣйшее построеніе одинаково съ построениемъ въ предыдущей задачѣ.

232. Проведемъ прямую MN подъ угломъ α къ AX ; тогда приводимся къ 231 задачѣ этого отдѣла.

233. Изъ точки A опишемъ дугу произвольнымъ радіусомъ, которая пересѣчетъ бока угла въ точкахъ M и N ; тогда приводимся къ 231 задачѣ этого отдѣла.

234. См. предыдущую задачу.

235. Проведемъ прямую $PQ \parallel XA$ до пересѣченія съ бокомъ AY въ B ; отложимъ на немъ часть $BC=BA$. Прямая PC будетъ искомая.

236. Проведемъ прямую $PQ \parallel XA$ до пересѣченія съ продолженіемъ бока YA въ B ; отложимъ на немъ часть $AC=AB$. Прямая PC искомая.

237. Отложимъ на сторонѣ AY часть $AD=l$ и проведемъ прямую $DE \parallel MN$; построимъ равнодѣлящую $\angle ADE$, кот. пересѣчетъ AX въ B , а изъ B проведемъ прямую $\parallel MN$ до встрѣчи съ AY въ C . Точки B и C будутъ искомыя.

238. Раздѣлимъ $\angle B$ и C пополамъ и черезъ точку O пересѣченія равнодѣлящихъ проведемъ прямую $DE \parallel BC$. Прямая DE будетъ искомая.

239. Раздѣлимъ пополамъ внѣшніе углы при B и C и черезъ пересѣченіе равнодѣлящихъ проведемъ прямую $DE \parallel BC$. Прямая DE искомая.

240. Опустимъ $\perp AD$ на MN и, продолживъ его, отложимъ часть $DE=AD$; черезъ точку E проведемъ прямую $XEY \parallel MN$ и изъ произвольной точки F прямой KL опишемъ дугу радіусомъ a , которая пересѣчетъ прямую XY въ точкѣ G . Прямая $АН$, параллельная FG , будетъ искомая.

241. Проведемъ прямую $XY \parallel AB$ на разстояніи k , которая пересѣчетъ продолженія сторонъ AC и BC въ D и E ; построимъ равнодѣлящую $\angle CDE$, которая пересѣчетъ BE въ F . Точка F искомая.

Если дана разность, то построение то же.

242. Построим $\angle XAY$, равный данному, и между его боками проведем прямую $BC=a$ и составляющую съ ними равные углы (I, 233).

243. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

244. Построимъ $\triangle ADB$, въ которомъ катетъ $AD=h_a$ и катетъ $DB=d$; возставимъ $\perp AE$ къ AB , который пересѣчетъ продолженіе BD въ точкѣ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

245. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ; только $\triangle ABD$ надо построить по гипотенузѣ b и катету d .

246. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 244 задачи этого отдѣла.

247. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 244 задачи этого отдѣла; только $\triangle ABD$ надо построить по катету и острому углу.

248. Построимъ $\triangle ADC$, въ кот. гипотенуза $AC=b$ и катетъ $AD=h_a$; продолживъ сторону CD , отложимъ часть $CB=a$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

249. Построимъ $\triangle BDC$, въ которомъ гипотенуза $BC=a$ и катетъ $CD=h_c$; изъ точки C опишемъ дугу радиусомъ b , которая пересѣчетъ сторону BD или ея продолженіе въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

250. 1) Построимъ $\angle XBY$, равный $\angle B$, и проведемъ прямую $KL \parallel BY$ на разстояніи h_a , кот. пересѣчетъ прямую BX въ A ; изъ A проведемъ прямую AE подъ $\angle C$ къ BY , кот. пересѣчетъ ее въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

2) Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ, только прямую AE надо будетъ провести подъ угломъ A къ прямой BA .

251. Построимъ $\triangle ABD$, въ кот. $\angle ABD = \angle B$, сторона $BD = \frac{1}{2}a$ и $AD = m_a$; на продолженіи BD отложимъ $DC = DB$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

252. Построимъ $\triangle BDC$, въ кот. $\angle DBC$ равенъ $\angle B$, сторона $BC = a$ и $CD = m_c$; продолживъ BD , отложимъ $DA = DB$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

253. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 250 задачи этого отдѣла (1 случай).

254. Построимъ $\triangle DBC$, въ которомъ гипотенуза $BC = a$ и катетъ $BD = h_b$; построимъ $\angle XBC = \angle DCB$ и продолжимъ сторону CD до встрѣчи съ BX въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

255. Построимъ правильный $\triangle BCD$, въ которомъ стороны равны $2b$; опустимъ $\perp BA$ на CD . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

256. Построимъ правильный $\triangle BCD$, въ которомъ стороны равны a ; опустимъ $\perp BA$ на BD . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

257. Построимъ $\triangle BDC$, въ которомъ катетъ $BD = h_b$ и гипотенуза $BC = a$; построимъ $\angle XBC$, равный $\angle B$, и продолжимъ прямую CD до пересѣченія съ AH въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

258. Построимъ $\triangle ADE$, въ кот. катетъ $AD = h_a$ и гипотенуза $AE = m_a$; продолживъ DE , отложимъ $EB = \frac{1}{2}a$ и $EC = \frac{1}{2}a$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

259. Построимъ $\triangle ADC$, въ которомъ стороны: $AD = m_a$, $AC = b$ и $DC = \frac{1}{2}a$; продолживъ CD , отложимъ часть $DB = \frac{1}{2}a$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

260. Построимъ $\triangle BEC$, въ которомъ $BC = a$, $BE = b$ и $CE = 2m_c$; чрезъ B и точку E , середину CD , проведемъ прямую, на которой отложимъ часть $EA = EB$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

261. Построимъ $\triangle BDE$, въ которомъ сторона $EB = \frac{2}{3}m_b$, $DE = \frac{1}{3}m_a$ и $\angle BED = \angle (m_a, m_b)$; продолживъ BE , отложимъ $BF = m_b$, а продолживъ

DE , отложимъ $DA=m_a$; чрезъ A и F проведемъ прямую, которая пересѣчетъ продолженіе BD въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

262. Построимъ $\angle XBY$, равный данному, и проведемъ прямую $KL \parallel BY$ на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ BX въ точкѣ A ; изъ точки A опишемъ дугу радіусомъ m_a , которая пересѣчетъ прямую XU въ D . Отложивъ $DC=DB$, получимъ искомый $\triangle ABC$.

263. Построимъ $\triangle ADE$, въ кот. катетъ $AD=h_a$ и гипотенуза $AE=l$; построимъ $\angle XAE$ и YAE , равные $\frac{1}{2}\angle A$ и означимъ чрезъ B и C точки пересѣченія AX и AY съ продолженіями DE . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

264. Построимъ $\triangle ABD$, въ которомъ катетъ $BD=h_b$ и $\angle BAD$ равенъ данному углу; опишемъ изъ точки B дугу радіусомъ a , которая пересѣчетъ продолженіе AD въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

265. Построимъ $\triangle BDC$, въ которомъ катетъ $BD=h_b$ и гипотенуза $BC=a$; изъ середины BC опишемъ дугу радіусомъ m_a , которая пересѣчетъ продолженіе CD въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

266. Построимъ $\triangle DBE$, въ кот. катетъ $DE=h_a$ и гипотенуза $BD=2m_b$; изъ B опишемъ дугу радіусомъ a , кот. пересѣчетъ BE въ C ; на прямой CF , гдѣ F середина BD , отложимъ часть $FA=FC$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

267. Построимъ $\angle XBY$, равный данному, и проведемъ прямую $MN \parallel BY$ на разстояніи h_a , кот. пересѣчетъ BX въ A ; проведемъ прямую $KL \parallel AX$ на разстояніи h_c , кот. пересѣчетъ BY въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

268. $\angle(h_a, h_c)=\angle B$, а потому рѣшеніе одинаковое съ предыдущимъ.

269. Построимъ $\triangle BDC$, въ которомъ катетъ $BD=h_b$, а гипотенуза $BC=a$; проведемъ прямую $KL \parallel BC$ на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ продолженіе катета CD въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

270. Начертимъ произвольно прямую XU и проведемъ прямую $KL \parallel XU$ на разстояніи h_a ; изъ какой-либо точки B прямой XU опишемъ дугу радіусомъ $2m_b$, которая пересѣчетъ прямую KL въ D ; отложимъ на BD часть $BE=\frac{2}{3}m_b$ и изъ точки E опишемъ дугу радіусомъ $\frac{2}{3}m_c$, которая пересѣчетъ XU въ C . Продолживъ CE , отложимъ $CF=m_c$ и чрезъ точки B и F проведемъ прямую, которая пересѣчетъ KL въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

2) Построимъ $\triangle ADE$, въ которомъ катетъ $AD=h_a$ и гипотенуза $AE=m_a$; отложимъ на EA часть $EO=\frac{1}{3}EA$ и изъ точки O опишемъ дугу радіусомъ $\frac{2}{3}m_c$, которая пересѣчетъ продолженіе DE въ точкѣ C ; отложимъ на DE часть $EB=EC$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

271. Построимъ $\triangle BDC$, въ которомъ катетъ $BD=h_b$ и гипотенуза $BC=a$; опишемъ изъ середины BC дугу радіусомъ $\frac{1}{2}a$, а изъ C дугу радіусомъ h_c , которыя пересѣкутся въ E ; продолживъ прямыя BE и CD до встрѣчи въ A , получимъ искомый $\triangle ABC$.

272. Построимъ равносторонній $\triangle DBE$ и проведемъ прямую $KL \parallel BE$ на разстояніи высоты, которая пересѣчетъ сторону BD въ A ; проведемъ прямую $AX \parallel DE$, которая пересѣчетъ BE въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

273. Построимъ $\triangle ABD$, въ которомъ катетъ $AB=c$ и $\angle ABD=q$; продолживъ AD , отложимъ часть $DC=DB$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

274. Построим $\triangle DEF$, въ которомъ $\angle D$ прямой и $\angle DEF = \varphi$; продолживъ DF , отложимъ $FC = FE$ и на CE часть $CB = a$; проведемъ прямую $BX \parallel ED$, которая пересѣчетъ CD въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

275. Построимъ $\angle XBY$, равный данному, и на его бокахъ отложимъ $BC = a$ и $BD = s$; изъ середины CD возставимъ \perp , который пересѣчетъ BD въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

276. Построение то же, что и въ предыдущей задачѣ, только уголь EAB долженъ быть равенъ прямоу.

277. На произвольной прямой отложимъ часть $BC = a$ и на ней построимъ $\angle XBC$, равный данному; отложимъ на AX часть $BD = d$ и изъ середины BD возставимъ \perp до встрѣчи съ BX въ точкѣ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

278. Построение то же, что и въ предыдущей задачѣ.

279. На произвольной прямой отложимъ часть $BC = a$ и изъ середины ея D возставимъ \perp , на кот. отложимъ часть $DE = s$; изъ середины BE возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ DE въ точкѣ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

280. На произвольной прямой отложимъ часть $BC = a$ и изъ середины ея D возставимъ \perp , на которомъ отложимъ часть $DE = d$; возставимъ \perp изъ середины BE до встрѣчи въ A съ прямою ED . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

281. На произвольной прямой отложимъ часть $EF = 2r$ и изъ середины ея D возставимъ \perp , на которомъ отложимъ часть $DA = h_a$; изъ середины прямой AE возставимъ \perp до встрѣчи съ EF въ точкѣ B и на DF отложимъ часть $DC = DB$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

282. Изъ какой-либо точки D прямой XY возставимъ \perp , на которомъ отложимъ часть $DA = h_a$; на прямой XY отложимъ часть $DE = \frac{1}{2}d$ и изъ середины AE возставимъ \perp , который пересѣчетъ прямую XY въ C ; отложимъ на прямой XY часть $DB = DC$, получимъ искомымъ $\triangle ABC$.

283. Построимъ $\triangle DBC$, въ которомъ катетъ $BD = h_b$ и гипотенуза $BC = a$; продолживъ CD , отложимъ часть $CE = s$ и изъ середины BE возставимъ \perp , который пересѣчетъ CD въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

284. Построимъ $\triangle BCD$, въ которомъ катетъ $BD = h_b$ и гипотенуза $BC = a$; отложимъ на CD часть $CE = d$ и изъ середины BE возставимъ \perp , который пересѣчетъ продолженіе CD въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

285. Построимъ $\angle XBY$, равный данному, и проведемъ прямую $KL \parallel BY$, на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ прямую BX въ A ; на сторонѣ BY отложимъ часть $BC = s - AB$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

286. 1) Построимъ $\angle XBY$, равный данному, и проведемъ прямую $KL \parallel BY$, на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ BX въ точкѣ A ; отложимъ на сторонѣ BY часть $BC = d + AB$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

2) Построимъ $\angle XBY$, равный данному, и проведемъ прямую $KL \parallel BY$ на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ прямую BY въ C ; отложимъ на сторонѣ BX часть $BA = BC - d$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

287. 1) Построимъ $\triangle BOC$, въ которомъ стороны: $BC = a$, $BO = \frac{2}{3}m_b$ и $CO = \frac{2}{3}m_c$; продолживъ BO , отложимъ часть $BD = m_b$, а продолживъ CO , отложимъ часть $CE = m_c$; проведемъ прямая BE и CD , которая пересѣкутся въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

2) Построим $\triangle BOF$, въ которомъ стороны: $BF = \frac{1}{2}a$, $BO = \frac{2}{3}n_b$ и $FO = \frac{1}{3}m_a$; продолживъ FO , отложимъ $FA = m_a$, а продолживъ BF , отложимъ $FC = FB$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

288. Построимъ $\triangle BOC$, въ которомъ сторона $OB = \frac{2}{3}m_b$, $OC = \frac{2}{3}m_c$ и прямая OD , гдѣ D середина BC , равнялась $\frac{1}{3}m_a$ (I, 258); продолживъ DO , отложимъ часть $DA = m_a$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

289. Построимъ $\angle XBY$, равный данному, и проведемъ прямую $KL \parallel BY$ на разстояніи h_a ; изъ точки B опишемъ дугу радіусомъ $2m_b$, которая пересѣчетъ прямую KL въ D , а чрезъ точку A и середину BD проведемъ прямую, кот. пересѣчетъ BY въ точкѣ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

290. Построимъ $\triangle BDC$, въ кот. катетъ $BD = h_b$ и гипотенуза $BC = a$; чрезъ точку B проведемъ прямую $BE \parallel CD$, а изъ точки C опишемъ дугу радіусомъ $2m_c$, кот. пересѣчетъ BE въ F ; чрезъ B и середину CF проведемъ прямую, которая пересѣчетъ CD въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

291. Построимъ $\triangle BDC$ по сторонѣ $BD = 2m_b$ и высотамъ h_a и h_c (I, 274); проведемъ прямую $DE \parallel CB$ и еще прямую чрезъ C и середину BD , которая пересѣчетъ DE въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

292. Построимъ $\angle XBY = \angle B$ и проведемъ прямую $KL \parallel BY$ на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ BX въ A ; отложимъ на прямой BY часть $AD = 2p - AB$ и возставимъ изъ середины AD перпендикуляръ, который пересѣчетъ BY въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

293. Проведемъ прямую MN и ей параллельную KL на разстояніи h_a ; изъ произвольной точки B прямой MN опишемъ дугу радіусомъ $2h_b$, которая пересѣчетъ KL въ D , а чрезъ середину BD проведемъ прямую \perp къ ней, кот. встрѣтитъ MN и KL въ точкахъ C и A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

294. Построимъ (фиг. 8) $\angle MON = \angle A$ и $\angle NOP = \angle B$ и отложимъ на OM , ON и OP части: $OA = k_b$, $OD = k_c$ и $OE = k_a$; проведемъ прямыя: $AX \perp OM$, $EY \perp OP$ и $AD \perp ON$, которыя въ пересѣченіи дадутъ искомымъ \triangle .

295. Построимъ $\triangle DBE$, въ кот. $BE = s$, $\angle DBE = \angle B$ и $\angle DEB = \angle C$; раздѣлимъ $\angle DEB$ пополамъ и изъ A , пересѣченія равнодѣлящей съ BD , проведемъ прямую $AX \parallel DE$, кот. пересѣчетъ BE въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

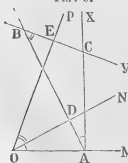
296. Построеніе то же, что и въ предыдущей задачѣ.

297. Построимъ $\triangle ADE$, въ кот. катетъ $AD = s$ и $\angle ADE = \angle B$; проведемъ равнодѣлящую $\angle ADE$, кот. пересѣчетъ AE въ C , и проведемъ $CX \parallel DE$, которая пересѣчетъ AD въ B . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

298. Построимъ $\triangle DBE$, въ которомъ $BE = d$, $\angle DBE = \angle B$ и $\angle DEB = \angle C$; продолживъ BE , проведемъ равнодѣлящую угла, смежнаго съ $\angle DEB$, которая пересѣчетъ продолженіе BD въ A . Проведа прямую $AX \parallel DE$ до пересѣченія съ BE въ C , получимъ искомымъ $\triangle ABC$.

299. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

Фиг. 8.



300. Построимъ равнобедренный $\triangle DBE$, въ которомъ основаніе $BE=s$ и $\angle DBE=\angle DEB=\angle B$, а затѣмъ поступимъ такъ же, какъ въ 295 задачѣ этого отдѣла.

301. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 300 задачи этого отдѣла.

302. Построимъ $\triangle DBE$, въ которомъ гипотенуза $BD=s$ и $\angle BDE=\frac{1}{2}\angle A$; проведемъ равнодѣлящую $\angle BDE$ до встрѣчи съ BE въ F и прямую $FG \parallel ED$ до встрѣчи съ BD въ A ; изъ A опишемъ дугу радіусомъ AB , которая пересѣчетъ BE въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

303. Рѣшеніе то же, что и въ предыдущей задачѣ.

304. Построимъ $\triangle DBE$, въ которомъ гипотенуза $BD=d$ и $\angle DBE=\angle B$; продолживъ BD , проведемъ равнодѣлящую угла, смежнаго съ $\angle BDE$, которая пересѣчетъ BE въ F , и прямую $FX \parallel DE$, которая пересѣчетъ BD въ A . Отложивъ $FC=FB$, получимъ искомый $\triangle ABC$.

305. Построеніе то же, что въ предыдущей задачѣ.

306, 307, 308 и 309. Такъ какъ уголъ равносторонняго \triangle извѣстенъ, то приводимся къ 301—304 задачамъ этого отдѣла.

310. Построимъ $\triangle DEF$, въ кот. $EF=2p$, $\angle DEF=\angle B$ и $\angle DFE=\angle C$; проведемъ равнодѣлящія $\angle E$ и F , кот. пересѣкнутся въ A , и прямыя: $AX \parallel DE$ и $AY \parallel DF$ до встрѣчи съ EF въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

311. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 310 задачи этого отдѣла.

312. Разность двухъ угловъ равна φ , а сумма $2d-B$, а потому можемъ найти самые углы (I, 171) и потомъ построить уже самый \triangle .

313. Построимъ $\triangle DBC$, въ кот. $BC=a$, $BD=s$ и $\angle BDC=\frac{1}{2}A$; изъ середины CD возставимъ \perp , кот. перес. BD въ B . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

314. Построимъ $\triangle DBC$, въ кот. сторона $BC=a$, $BD=d$ и $\angle BDC=90^\circ+\frac{1}{2}A$; изъ середины CD возставимъ \perp , который пересѣчетъ продолженіе BD въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

315. Построимъ $\triangle DBC$, въ которомъ сторона $BC=a$, $BD=b$ и $\angle DBC=\varphi$; изъ точки C опишемъ дугу радіусомъ b , а изъ точки D радіусомъ a , которая пересѣчетъ первую дугу въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

316. Построимъ $\triangle DBC$, въ кот. сторона $BC=a$, $CD=d$ и $\angle DBC=\frac{1}{2}\varphi$; изъ середины BD возставимъ \perp , который пересѣчетъ продолженіе CD въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

Фиг. 9.

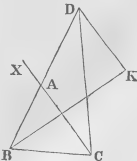
317. Построеніе то же, что и въ 313 задачѣ.

318. Рѣшеніе то же, что въ 314 задачѣ.

319. Построимъ $\triangle BDK$ (фиг. 9), въ кот. катетъ $BK=s$ и $\angle BDK=\angle A$; проведемъ равнодѣлящую $\angle BDK$, а изъ точки B опишемъ дугу радіусомъ a , кот. пересѣчетъ равнодѣлящую въ точкѣ C ; проведемъ прямую $CX \parallel KD$, кот. пересѣчетъ BD въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

Если дана разность высотъ, то рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

320. Расстоянія между смежными вершинами квадратовъ равны двойнымъ медианамъ \triangle , а потому приводимся къ 288 задачѣ этого отдѣла.



321. Продолжим BA до D ; тогда $\angle DAC = \angle APQ + \angle AQP = 4\angle AQP$. Проведем равнодѣлящую AE угла DAC и равнодѣлящую AF угла EAC . Прямая PQ , параллельная AF , будетъ искомая.

322. Проведемъ прямую $DE \parallel XY$ и изъ точки A проведемъ прямую \perp къ DE , которая пересѣчетъ прямыя MN и KL въ точкахъ F и G ; чрезъ середину FG проведемъ къ ней \perp -ую прямую, которая пересѣчетъ данную прямую въ точкахъ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

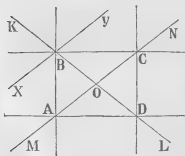
323. 1) На сторонѣ AY отложимъ произвольную часть AC и на ней, внутри угла, построимъ равносторонній $\triangle BAC$ и проведемъ равнодѣлящую AP угла BAC . Прямыя AB и AP раздѣляютъ уголъ на три равныя части. 2) Если $\angle XAB$, BAF и PAU раздѣлимъ пополамъ, то прямыя AB , AP и равнодѣлящая уголъ раздѣляютъ прямой уголъ на шесть равныхъ частей.

324. На AB построимъ равнобедренный $\triangle CAB$ и, продолживъ BC , отложимъ часть $CD = CB$. Прямая AD будетъ искомымъ перпендикуляръ.

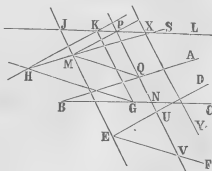
325. Опустимъ $\perp AC$ на XY и, продолживъ его, отложимъ часть $CD = AC$; проведемъ прямую BD , кот. пересѣчетъ XY въ M . Точка M будетъ искомая.

326. Проведемъ прямую $XY \parallel MN$ на разстояніи s (фиг. 10), кот. пересѣ-

Фиг. 10.



Фиг. 11.



четъ KL въ B ; отложимъ на OM , ON и OL части. $OA = OC = OD = OB$. Периметръ $\square ABCD$ будетъ искомое геометрическое мѣсто (I, 65).

Продолженія же сторонъ этого \square будутъ геом. мѣсто для равенности.

327. Чрезъ точку G (фиг. 11), взятую на BC , проведемъ прямую $GK \parallel XY$, на кот. отложимъ часть $GK = s$ и проведемъ прямую $KL \parallel BC$; чрезъ точки K и G проведемъ прямыя $\parallel EF$ и ED , кот. пересѣкутся въ H ; проведемъ прямую $EJ \parallel XY$ и прямую $HS \parallel BA$, кот. пересѣчетъ прямую EJ въ M . Изъ M проведемъ прямую $\parallel ED$, кот. пересѣчетъ прямую KL въ P . Прямая PQ , параллельная XY , будетъ искомая.

328. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и на бокахъ его отложимъ часть $AB = a$ и $AD = b$; чрезъ точки B и D проведемъ параллели AY и AX , которыя пересѣкутся въ точкѣ C . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

329. Построим $\triangle ABC$, въ кот. сторона $AB=a$, $AC=k$ и $\angle BAC = \angle(a, k)$; чрезъ точки C и A проведемъ параллели BA и BC , которыя пересѣкутся въ D . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

330. Построимъ $\triangle AOD$, въ которомъ сторона $AO=\frac{1}{2}k$, $DO=\frac{1}{2}l$ и $\angle AOD = \angle(k, l)$; продолживъ AO , отложимъ часть $AC=k$, а продолживъ DO , отложимъ часть $DB=l$. $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ \square .

331. Построимъ $\triangle ABC$ по тремъ сторонамъ: $AB=a$, $BC=b$ и $AC=k$; проведемъ чрезъ точки A и C параллели BC и BA до ихъ пересѣченія въ точкѣ D . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

332. Построимъ $\triangle ABO$ по тремъ сторонамъ: $AB=a$, $AO=\frac{1}{2}k$ и $BO=\frac{1}{2}l$; продолживъ AO , отложимъ $O'A=OA$, а продолживъ BO , отложимъ $OD=OB$. $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ \square .

333. Построимъ $\triangle AOD$, въ которомъ сторона $AD=b$, $AO=\frac{1}{2}k$ и $\angle ODA = \angle(b, l)$; дальнѣйшее построение одинаково съ предыдущимъ.

334. Построимъ $\triangle ABD$, въ которомъ сторона $AD=b$, $DB=l$ и $\angle BAD = \angle A$; проведемъ прямую $BX \parallel AD$ и прямую $DY \parallel AB$, которыя пересѣкутся въ C . Параллелограммъ $ABCD$ будетъ искомымъ.

335. Построимъ $\triangle AOD$, въ которомъ сторона $AD=b$, $\angle OAD = \angle(b, k)$ и $\angle ODA = \angle(b, l)$; продолживъ AO , отложимъ $OC=OA$, а продолживъ DO , отложимъ $OB=OD$. Параллелограммъ $ABCD$ будетъ искомымъ.

336. Чрезъ точки M и N проведемъ прямая, параллельныя XY , а чрезъ точки P и Q прямая подъ угломъ A къ прямой XY . Въ пересѣченіи этихъ четырехъ прямыхъ получимъ искомымъ \square .

337. Построимъ $\triangle ABD$, въ которомъ сторона $BD=l$, $\angle BAD = \angle A$ и $\angle ABD = \angle(a, l)$; проведемъ прямую чрезъ A и O , середину BD , и на ней отложимъ часть $OC=OA$. $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

338. Проведемъ прямая $MX \parallel NP$ и $PY \parallel MN$, кот. пересѣкутся въ Q чрезъ M и P проведемъ параллели прямой NQ , а чрезъ N и Q параллели прямой MP ; въ пересѣченіи параллелей получимъ искомымъ \square .

339. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

340. Построимъ $\triangle ABE$, въ кот. катетъ $BE=h_b$ и гипотенуза $AB=a$; продолживъ AE , отложимъ $AD=b$ и чрезъ точки B и D проведемъ параллели AD и AB , кот. пересѣкутся въ C . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

341. Построимъ $\triangle ACE$, въ кот. катетъ $CE=h_b$ и гипотенуза $AC=k$; построимъ $\angle XAE = \angle A$ и проведемъ изъ C параллели AE и AX , которыя пересѣкутъ AX и AE въ точкахъ B и D . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

342. Построимъ $\triangle BDE$, въ которомъ катетъ $BE=h_b$ и гипотенуза $BD=l$; изъ точки D опишемъ дугу радиусомъ b , которая пересѣчетъ продолженіе DE въ A ; дальнѣйшее построение очевидно.

343. Построимъ $\triangle BDE$, въ кот. катетъ $BE=h_b$ и гипотенуза $BD=l$; проведемъ прямую $BX \parallel ED$, а изъ O , середины BD , опишемъ дугу радиусомъ $\frac{1}{2}l$, кот. пересѣчетъ DE и BX въ A и C . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

344. Построимъ $\triangle ABE$, въ которомъ катетъ $BE=h_b$ и гипотенуза $AB=a$; проведемъ прямую $KL \parallel AB$ на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ продолженіе AE въ D ; проведемъ прямую $BN \parallel AD$, которая пересѣчетъ прямую KL въ C . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

345. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и проведемъ прямую $MN \parallel AX$ на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ AY въ D ; проведемъ прямую $KL \parallel AY$ на разстояніи h_b , которая пересѣчетъ прямую AX въ B ; пусть точка C пересѣченіе прямыхъ MN и KL . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

346. Построимъ $\triangle ABE$, въ которомъ гипотенуза $AB=a$ и $\angle BAE=\angle A$; проведемъ прямую $MN \parallel AB$ на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ продолженіе AE въ D ; проведемъ прямую $BX \parallel AE$, которая пересѣчетъ MN въ C . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

347. Построимъ $\triangle AOE$, въ которомъ катетъ $AE=g$ и гипотенуза $AO=\frac{1}{2}k$; продолживъ AO , отложимъ $OC=OA$ и, продолживъ EO , отложимъ $OB=OD=\frac{1}{2}l$. $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ \square .

348. Построимъ $\triangle ABD$, въ кот. сторона $AD=b$, $\angle BAD=\angle A$ и сумма сторонъ AB и BD равна s (I, 275); тогда, проведя изъ точекъ B и D параллели AD и AB до встрѣчи въ точкѣ C , получимъ искомымъ $\square ABCD$.

349. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

350. Построимъ $\triangle ACD$, въ кот. сторона $AC=k$, $\angle ADC=180^\circ-\angle A$ и сумма сторонъ AD и CD равняется p (I, 313); построеніе очевидно.

351. Построимъ $\triangle AOD$, въ которомъ сторона $AD=b$, $\angle AOD=\varphi$ и $AO+OD=s$ (I, 313); продолживъ AO , отложимъ $OC=OA$, а продолживъ DO , отложимъ $OB=OD$. $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ \square .

352. Построеніе сходно съ предыдущимъ.

353. (I, 328). 354. (I, 329). 355. (I, 330).

356. Построимъ равнобедренный $\triangle ABD$, въ которомъ основаніе $BD=l$ и $\angle BAD=\angle A$ (I, 242); проведя изъ B и D параллели AD и AB до ихъ встрѣчи въ точкѣ C , получимъ искомымъ ромбъ $ABCD$.

357. (I, 345). 358. (I, 344).

359. Построимъ $\triangle BDE$, въ которомъ катетъ $BE=h$ и гипотенуза $BD=l$; проведемъ прямую $BX \parallel DE$ и изъ середины BD возставимъ \perp , который пересѣчетъ BX и DE въ C и A . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ ромбъ.

360. (I, 331). 361. (I, 351). 362. (I, 352).

363. Построимъ $\triangle AOD$, въ которомъ $\angle AOD=\frac{1}{2}\angle A$ и сумма катетовъ равна s (I, 296); продолживъ AO , отложимъ часть $OC=OA$, а продолживъ DO — часть $OB=OD$. $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ ромбъ.

364. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

365. Построимъ равнобедренный $\triangle ABC$, въ которомъ $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle A$ и $AB+AC=s$ (I, 300); проведя изъ точекъ A и C прямыя, параллельно BC и AB , до ихъ встрѣчи въ точкѣ D , получимъ искомымъ ромбъ $ABCD$.

366. Построимъ $\triangle ABE$, въ которомъ $\angle BAE=\angle A$ и $AB+BE=s$ (I, 297); проведемъ $BX \parallel AE$ и отложимъ $BC=AB$; также на продолженіи AE отложимъ $AD=AB$. $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ ромбъ.

367. Построимъ $\triangle ACE$, въ которомъ $\angle CAE=\frac{1}{2}\angle A$ и $AC+CE=s$ (I, 297); проведемъ $CX \parallel EA$ и чрезъ середину AC — прямую \perp къ AC , кот. пересѣчетъ прямыя CX и AE въ B и D . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ ромбъ.

368. (I, 330). 369. (I, 332).

370. Построимъ $\triangle ABD$, въ кот. катетъ $BD=k$ и $\angle ABD=\angle(k, a)$. Проведя чрезъ B и D прямыя, параллельно AD и AB , получимъ искомымъ \square .

371. Построим равнобедренный $\triangle AOD$, въ которомъ основаніе $AD=b$ и $\angle AOD=\angle(k, b)$ (I, 242); продолживъ AO , отложимъ $OC=OA$, а продолживъ DO , отложимъ $OB=OD$. $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ \square .

372. (I, 361). 373. (I, 348). 374. (I, 349).

375. Построимъ $\triangle ACD$, въ которомъ гипотенуза $AC=k$ и $AD+CD=p$ (I, 317); дальнѣйшее построение очевидно.

376. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

377. Построимъ $\triangle ABC$, въ которомъ $\angle BAC=\alpha$ и $AB+AC=s$ (I, 297); изъ точекъ A и C проведемъ прямыя, параллельныя BC и BA , до встрѣчи ихъ въ точкѣ D . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

378. Построимъ квадратъ по сторонѣ, равной $\frac{1}{2}p$.

379. (I, 355). 380. (I, 365).

381. Построимъ равнобедренный $\triangle AOB$, въ кот. сумма гипотенузы AB съ катетомъ AO равна $\frac{1}{2}s$ и $\angle BAO=\frac{1}{2}d$ (I, 297); построение очевидно.

382. Построение сходно съ предыдущимъ.

383. Пусть A точка пересѣченія діагоналей; B и C другія двѣ данныя точки. На продолженіи BA отложимъ часть $AD=AB$; проведемъ прямую CD и опустимъ $\perp AE$ на CD . Отложимъ на CD части: $EF=EG=EA$ и проведемъ прямую GA , на кот. отложимъ $AH=AG$; на прямой FA отложимъ $AK=AF$. $\diamond KHFG$ будетъ искомымъ квадратъ.

384. Пусть A точка пересѣченія діагоналей, а B и C двѣ другія данныя точки. Вовставимъ $\perp AX$ къ AB и отложимъ на немъ $AD=AB$; проведемъ прямую CD и опустимъ на нее $\perp BE$ и AC ; отложимъ на CD часть $GH=EH$; тогда EH будетъ сторона искомага квадрата. Дальнѣйшее построение очевидно.

385. Опустимъ $\perp QE$ на прямую NP и отложимъ на немъ часть $QF=NP$; проведемъ прямую $QX \parallel MF$ и опустимъ $\perp NG$ и PH на прямую QX . Четыреугольникъ, полученный въ пересѣченіи прямыхъ MF, QX, NG и PH , будетъ искомымъ \square .

386. 1) Построимъ $\angle XAY=\angle A$ и на AX отложимъ часть $AB=a$; проведемъ прямую $BK \parallel AY$ и на ней отложимъ часть $BC=b$; изъ C опишемъ дугу радіусомъ c , кот. пересѣчетъ AY въ D . Трапеція $ABCD$ искомая.

2) Построимъ $\angle XAY=\angle A$ и на AX отложимъ часть $AB=a$, а на AY часть $AD=d$; проведемъ прямую $BK \parallel AY$ и отложимъ на ней часть $BC=b$. Трапеція $ABCD$ будетъ искомая.

387. Построимъ $\triangle ABE$ по тремъ сторонамъ: $AB=a, BE=c$ и $AE=d-b$; продолживъ AE , отложимъ $ED=b$ и, проведя прямую $BK \parallel AD$, отложимъ на ней часть $BC=b$. Трапеція $ABCD$ будетъ искомая.

388. Построимъ $\triangle ABE$, въ кот. сторона $AE=d-b, \angle BAE=\angle A$ и $\angle BEA=\angle D$; продолживъ AE , отложимъ $ED=b$, и проведемъ прямую $BK \parallel AD$, на кот. отложимъ $BC=b$. Трапеція $ABCD$ будетъ искомая.

389. Построимъ $\triangle ABD$ по тремъ сторонамъ: $AB=a, AD=d$ и $BD=l$; проведемъ прямую $BK \parallel AD$, а изъ точки A опишемъ дугу радіусомъ k , которая пересѣчетъ BK въ C . Трапеція $ABCD$ будетъ искомая.

390. Построимъ $\angle XAY=\angle A$ и отложимъ на его бокахъ части: $AB=a$

и $AD=d$; на AD построимъ $\angle EDA=D$ и проведемъ прямую $BK \parallel AY$, которая пересѣчетъ DE въ C . Трапеція $ABCD$ будетъ искома.

391. 1) Построимъ $\triangle ABE$ по тремъ сторонамъ: $AB=a$, $BE=c$ и $AE=d-b$; проведемъ прямую $BK \parallel AE$, опишемъ изъ точки A дугу радіусомъ k , которая пересѣчетъ BK въ C ; проведемъ прямую $CL \parallel BE$, которая пересѣчетъ AE въ D . Трапеція $ABCD$ будетъ искома.

2) Построимъ $\triangle ABE$, какъ въ предыд. случаѣ, опишемъ дугу изъ B радіусомъ l , кот. пересѣчетъ продолженіе AE въ D ; проведемъ $BK \parallel AD$ и $DL \parallel EB$, кот. пересѣкутся въ C . Трапеція $ABCD$ будетъ искома.

392. Построимъ $\triangle BED$, въ которомъ катетъ $BE=h$ и гипотенуза $BD=l$; продолживъ DE , отложимъ $DA=d$, а изъ точки A опишемъ дугу радіусомъ k , кот. пересѣчетъ прямую BK , параллельную AD , въ точкѣ C . Трапеція $ABCD$ будетъ искома.

393. 1) Построимъ $\triangle ABE$, въ кот. сторона $AE=d-a$, $\angle BAE=\angle A$ и $AB+BE=b+c$ (I, 275); проведемъ прямую $BK \parallel AE$, а изъ A опишемъ дугу радіусомъ k , кот. пересѣчетъ BK въ C ; проведемъ прямую $CL \parallel BE$, которая пересѣчетъ продолженіе AE въ D . Трапеція $ABCD$ будетъ искома.

2) Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

394. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 393 задачи этого отдѣла.

395. Построимъ $\triangle ACE$ по тремъ сторонамъ: $AE=AD+DE=d+b$, $AC=k$ и $CE=l$; проведемъ прямая: $CK \parallel EA$ и $DL \parallel EC$, которыя пересѣкутся въ B . Трапеція $ABCD$ будетъ искома.

396. Построимъ $\triangle ACE$, въ которомъ сторона $AC=k$, $CE=l$ и $\angle ACE=q$; на AE отложимъ $AD=d$ и дальше поступимъ какъ въ 395 задачѣ.

397. Построимъ $\triangle ABD$, въ которомъ сторона $AB=a$, $AD=d$ и $\angle BAD=\angle A$; изъ B и D опишемъ дуги радіусами b и c , которыя пересѣкутся въ C . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

398. Построимъ $\triangle ABC$ по тремъ сторонамъ: $AB=a$, $BC=b$ и $AC=k$; изъ A и C опишемъ дуги радіусами d и c , которыя пересѣкутся въ D . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

399. На $AB=a$ построимъ, по одну сторону, $\angle KAB=\angle A$ и $\angle LBA=\angle B$; построимъ $\angle XAB=\angle(k,a)$ и $\angle YBA=\angle(l,a)$; пусть C и D будутъ точки пересѣченія BL съ AX и AK съ BY . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

400. Построимъ $\angle XAY=\angle A$ и на его сторонахъ отложимъ части: $AB=a$ и $AD=d$; внутри этого угла построимъ $\angle XAK=\angle(k,a)$ и на AK отложимъ часть $AC=k$. $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

401. Построимъ $\angle XAY=\angle A$ и на AX отложимъ часть $AB=a$; внутри построимъ $\angle KBA=\angle B$ и на BK отложимъ часть $BC=b$; построимъ $\angle LCB=\angle C$ и пусть D пересѣченіе AY съ CL . $\diamond ABCD$ искомымъ.

402. Построимъ $\triangle ABC$, въ кот. $AC=k$, $\angle BAC=\angle(k,a)$ и $\angle ABC=\angle B$; вѣдъ \triangle , на AC построимъ $\angle XAC=\angle(k,d)$, а изъ C проведемъ прямую CY подъ $\angle D$ къ AX , которая пересѣчетъ ея въ D . $\diamond ABCD$ искомымъ.

403. На произвольной прямой отложимъ часть $BC=b$ и построимъ, по одну сторону ея, $\angle XBC=\angle B$ и $\angle YCB=\angle C$; отложимъ на BX часть $BA=a$, а на CY отложимъ часть $CD=c$. $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

404. Построим $\triangle ABC$ по трем сторонам: $AB=a$, $BC=b$ и $AC=k$. Построим $\angle XAB=\angle A$ и $\angle YCB=\angle C$, которых стороны AX и CY пересекутся в D . $\diamond ABCD$ будет искомым.

405. На произвольной прямой отложим часть $AB=a$ и, по одну сторону ее, построим: $\angle XAB=\angle A$, $\angle KAB=\angle(k,a)$, $\angle YBA=\angle B$ и $\angle LBA=\angle(l,a)$; означим буквою C точку пересечения AK съ BY и буквою D точку пересечения AX съ BL . $\diamond ABCD$ будет искомым.

406. Построим $\triangle ABC$ по трем сторонам: $AB=a$, $BC=b$ и $AC=k$; проведем прямую BX под $\angle(k,l)$ къ AC и на ней отложим часть $BD=l$. $\diamond ABCD$ будет искомым.

407. На произв. прямой отложим часть $AB=a$ и, по одну сторону ее, построим $\angle XAB=\angle A$ и $\angle YBA=\angle B$; между AX и BY проведем прямую $DC=c$ и составляющую $\angle C$ съ BY (I, 232). $\diamond ABCD$ искомым.

408. Построим $\triangle ABC$ по трем сторонам: $AB=a$, $BC=b$ и $AC=k$; из B опишем дугу радиусом l , а из C — дугу радиусом c , которая пересечет первую дугу в D . $\diamond ABCD$ будет искомым.

409. Построим $\triangle ABC$ по трем сторонам: $AB=a$, $BC=b$ и $AC=k$; проведем прямую BX под $\angle(k,l)$ къ AC , а из C опишем дугу радиусом c , которая пересечет прямую BX в D . $\diamond ABCD$ будет искомым.

410. Построим $\angle XDY=\angle D$ и на DY отложим $DC=c$; внутри \angle , при произвольной точке E прямой DY , построим $\angle KED=\angle A$ и отложим на EK часть $EF=a$; проведем $FG \parallel ED$, а из C опишем дугу радиусом b , кот. пересечет прямую FG в B . $\diamond ABCD$ будет искомым.

411. Положим, что $\diamond ABCD$ будет искомым. Опустим $\perp BE$ на AC и продолжим его до пересечения съ AD въ F ; точку F соединим съ C и D . $\triangle CDF$ будет известен, так какъ въ немъ три стороны известны: $CD=c$, $CF=CB=b$ и $FD=AD-AF=d-a$. Поэтому, чтобы решить эту задачу, надо сперва построить $\triangle CDF$ по трем сторонам: $CF=b$, $CD=c$ и $DF=d-a$; продолжить DF и отложить $DA=d$; опустить $\perp FE$ на AC и, продолжив его, отложить $EB=EF$. $\diamond ABCD$ будет искомым.

412. Построим $\square BEFD$ по двум сторонам: $BE=k$ и $BD=l$ и $\angle(k,l)$ между ними; из E опишем дугу радиусомъ a , а из D радиусомъ c , которая пересечется въ C ; проведемъ прямую $BX \parallel EC$ и прямую $DY \parallel FC$, которая пересечется въ A . $\diamond ABCD$ будет искомым.

413. Построим $\square MENF$, въ кот. стороны: $ME=\frac{1}{2}b$ и $MF=\frac{1}{2}d$ и диагональ $MN=m$; на диагонали EF построим $\square EKFL$, въ кот. стороны: $EK=\frac{1}{2}a$ и $EL=\frac{1}{2}c$. Проведя чрезъ M , K , N и L прямые, параллельныя, соответственно, прямымъ EK , EM , FK и MF , получимъ въ пересечении этихъ прямыхъ искомымъ $\diamond ABCD$.

414. Построим $\triangle CED$ по двум сторонам: $CE=a$, $CD=c$ и $\angle ECD=\angle(a,c)$; из E опишем дугу радиусомъ b , а из D — радиусомъ d , которая пересечется въ точкѣ A ; проведемъ прямую $AX \parallel EC$ и прямую $CY \parallel EA$, которая пересечется въ B . $\diamond ABCD$ будет искомым.

415. Отложимъ на AB часть $BP=AM$ и на BC часть $CN=AM$. $\triangle MNP$ будет искомым.

416. Отложимъ на BC часть $BN=AM$; на сторонѣ CD часть $CP=AM$ и на сторонѣ AD часть $DQ=AM$. $\diamond MNPQ$ будетъ искомый квадратъ.

417. Изъ O точки пересѣченія діагоналей даннаго квадрата опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ половинѣ діагонали $\square MNPQ$, которая пересѣчетъ стороны AB , BC , CD и DA въ точкахъ E и E' , F и F' , G и G' , H и H' . $\diamond EFGH$ и $E'F'G'H'$ будутъ искомыя квадраты.

418. Изъ точки O пересѣченія діагоналей опишемъ окружность радіусомъ OM , которая пересѣчетъ стороны AB , BC , CD и DA прямоугольника въ точкахъ M и M' , N и N' , P и P' , Q и Q' . $\diamond MNPQ$ и $M'N'P'Q'$ будутъ искомыя прямоугольники.

419. Проведемъ равнод. $\angle A$, кот. пересѣчетъ сторону BC въ D ; проведемъ хорду $DE \parallel BA$ и хорду $DF \parallel CA$. $\diamond AEDF$ будетъ искомый ромбъ.

420. Пусть D середина основанія BC . Построимъ $\angle XDN$ и $\angle YDC$, равные $\frac{1}{2}d$; бока DX и DY пересѣкутъ стороны AB и AC въ E и F . $\triangle DEF$ будетъ искомый.

421. Черезъ A и C проведемъ прямыя AM и CN , параллельныя BD , а черезъ B и D прямыя BK и DL , параллельныя AC ; въ пересѣченіи проведенныхъ прямыхъ получимъ искомый \square .

422. Въ $\triangle ABC$ проведемъ хорду $MP=a$ и $\parallel AC$ (1, 231); также въ $\triangle ADC$ проведемъ хорду $NQ=a$ и $\parallel AC$. $\diamond MPQN$ будетъ искомый \square .

423. Проведемъ AD равнодѣлящую $\angle A$ и по обѣ стороны AD построимъ $\angle \angle XAD$ и $\angle YAD$, равные $\frac{1}{2}d$; проведемъ прямую $BK \parallel AY$ и $CL \parallel AX$. Въ пересѣченіи прямыхъ AX , AY , BK и CL , получимъ искомый квадратъ.

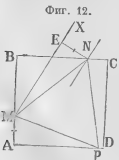
424. Проведемъ діагональ AC и по обѣ ея стороны построимъ углы, равные $\frac{1}{2}d$ (1, 329), которыхъ бока пересѣкутъ BC и CD въ E и F . $\triangle AEF$ будетъ искомый.

425. Положимъ, что задача рѣшена и $\triangle MNP$ (Фиг. 12) будетъ искомый; слѣд. его углы равны $\frac{2}{3}d$. Проведемъ прямую MX подъ угломъ $\angle XMN = \angle MPA$ и опустимъ $\perp NE$ на MX ; тогда $\triangle MEN = \triangle MAP$ и слѣдовательно $EN=AM$. Углы $\angle BMP$ есть внѣшній для $\triangle MAP$, а потому $\angle BMP = d + \angle MPA$; кромѣ того $\angle BMP = \angle BMX + \angle XMN + \frac{2}{3}d$; изъ этихъ равенствъ имѣемъ: $\angle BMX + \angle MPA + \frac{2}{3}d = d + \angle MPA$; откуда $\angle BMX = \frac{1}{3}d$.

Рѣшеніе. Построимъ $\angle BMX = \frac{1}{3}d$ (1, 323) и проведемъ прямую $\parallel MX$ на разстояніи AM , кот. пересѣчетъ BC въ N , и изъ M опишемъ дугу радіусомъ MN , кот. пересѣчетъ AD или CD въ P . $\triangle MNP$ будетъ искомый.

426. O данная точка; AB и CD данныя прямыя. Возьмемъ на прямой AB произвольную точку F и построимъ на OF равносторонній треугольникъ GFO ; на OG построимъ $\angle OGX = \angle OFB$ и пусть точка H пересѣченія прямыхъ GX и CD . Отложивъ на BC часть $FK=GH$, получимъ искомый $\triangle KAH$.

427. O данная точка; AB и CD данныя прямыя. Опустимъ $\perp ON$ на AB и на ON построимъ $\square ONPN'$; продолжимъ PN' до встрѣчи съ CD



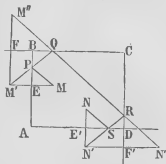
въ Q' и на AB отложимъ $NQ=N'Q'$. Точки Q и Q' будутъ вершинами искомага квадрата.

428. Дано: прямая $AB \parallel CD$ и прямая $AD \parallel BC$. Въ $\square ABCD$ точка O пересѣченіе діагоналей. Черезъ O проведемъ прямую $\perp AC$, на которой отложимъ $OE=OG=OA$; также проведемъ черезъ O прямую $\perp BD$, на которой отложимъ $OH=OF=OB$. Пусть AB, BC, CD и DA пересѣкаются съ прямыми FG, GH, HE и EF , соответственно, въ точкахъ K, L, M и N . $\diamond KLMN$ будетъ искомымъ квадратъ.

429. Дано положеніе серединъ сторонъ (фиг. 7, стран. 233) семиугольника: точки M, N, K, L, P, Q и S . Проведемъ прямыя, параллельно прямымъ LP и LK , до встрѣчи въ U ; проведемъ черезъ N и Q прямыя, параллельно UQ и UN , до ихъ встрѣчи въ V . Далѣе построимъ $\triangle ABG$, зная M, V и S середины его боковъ, а потомъ A соединимъ съ M и, продолживъ AM , отложимъ часть $MB=MA$; B соединимъ съ N и, продолживъ BN , отложимъ $NC=NB$ и т. д.

430. Дано (фиг. 13) положеніе двухъ шаровъ M и N на прямоугольномъ бильярдѣ $ABCD$ и требуется бросить шаръ M по такому направленію, чтобы онъ, ударившись послѣдовательно о стѣнки AB, BC, CD и DA , сшибъ шаръ N . Опустимъ $\perp ME$ на AB и на продолженіи его отложимъ часть $EM'=EM$; опустимъ $\perp M'F$ на BC и на продолженіи его отложимъ часть $FM''=FM'$. То же самое построеніе сдѣлаемъ и для точки N , т.-е. опустимъ $\perp NE'$ на AD , и на продолженіи его отложимъ часть $E'N'=EN$; потомъ опустимъ перпендикуляръ $N'F'$ на CD и на продолженіи его отложимъ часть $F'N''=F'N'$. Соединивъ прямою точки M'' и N'' , получимъ направленіе, параллельно кот. нужно бросить шаръ M къ стѣнкѣ AB . Легко построить и самый путь, по кот. будетъ катиться шаръ M : для этого, точки Q и R пересѣченія прямой $N''M''$ съ боками BC и CD соединимъ съ M' и N' ; точку P пересѣченія $M'Q$ съ AB соединимъ съ M и точку S пересѣченія RN' съ AD соединимъ съ N . Полиномая $MPQRSN$ будетъ искомымъ путь.

Фиг. 13.

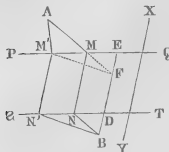


431. Пусть M искомая точка на данной прямой. Тогда, опустивъ перпендикуляръ AC на XU , продолжимъ его на $CA'=CA$; слѣд. $A'M=AM$ и $AM+BM=A'M+BM$. Отсюда ясно, чтобы сумма $A'M+BM$ была наименьшею, необходимо, чтобы точки A', M и B лежали на прямой. Построеніе очевидно.

432. Опустимъ перпендикуляръ AC на XU и, продолживъ его, отложимъ часть $CA'=CA$, и пусть M искомая точка; тогда $AM-BM=A'M-BM$. Ясно, что послѣдняя разность тогда будетъ наибольшею, когда точки A', B и M лежатъ на прямой. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ на

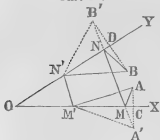
прямой XU точку M' , найдемъ, что $AM' - BM' = A'M' - BM' < A'B$ или $AM' - BM' < AM - BM$.

Фиг. 14.



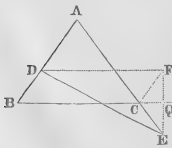
$A'C = AC$; опустимъ $\perp BD$ на

Фиг. 15.



данной; тогда $BD = CE$. Я говорю, что $BC < DE$, т.-е. другими словами

Фиг. 16.



ABC будетъ искомымъ.

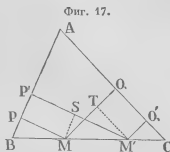
436. По условию, $DE = BD + CE$ и потому $AD + AE = AB + AC + BC$. Но между \triangle -ми, въ кот. сумма двухъ боковъ, заключающихъ данный уголъ постоянна, имѣетъ наименьшую третью сторону равнобедренный \triangle (I, 435), а потому, для рѣшенія задачи, надо взять $AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$.

433. Проведемъ прямую $BE \parallel XY$ (фиг. 14) и отложимъ $EF = BD$; изъ точки M пересѣченія прямыхъ AF и PQ проведемъ прямую $MN \parallel XY$; ломаная $AMNB$ будетъ искомая. Дѣйствительно, возьмемъ другую ломаную $AM'N'B$, гдѣ $M'N' \parallel XY$; тогда $AM' + M'F > AM + MF$ или $AM' + BN' > AM + BN$. Прибавивъ къ обѣимъ частямъ неравенства по $M'N' = MN$, получимъ: $AM'N'B > AMNB$.

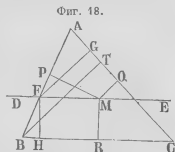
434. Опустимъ $\perp AC$ на OX (фиг. 15) и, продолживъ его, отложимъ часть $B'D = BD$. Прямая $A'B'$ пересѣчетъ бока $\angle XOY$ въ точкахъ M и N ; тогда получимъ ломаную $AMNB$, кот. будетъ наименьшая. Дѣйствительно, возьмемъ точки M' и N' на бокахъ угла; тогда $A'M' + M'N' + B'N' > A'M + MN + B'N$ или $A'M' + M'N' + B'N' > AM + MN + BN$.

435. Начертимъ $\triangle ADE$ (фиг. 16), въ кот. $\angle A$ и сумма сто, оиъ AD и AE будутъ данныя. На бокахъ $\angle A$ отложимъ равныя части AB и AC , кот. сумма тоже равна периметръ $\triangle ABC$ менѣ периметра $\triangle ADE$. Дѣйствительно, проведемъ $DF \parallel BC$ и $CF \parallel BA$; прямая EF пересѣчетъ продолженіе BC въ точкѣ Q . $\triangle FCE$ равнобедренный, потому что $CF = BD = CE$; кромѣ того $\angle FCQ = \angle B$ и $\angle ECQ = \angle C$; но $\angle B = \angle C$ и потому $\angle FCQ = \angle ECQ$; слѣд. $FE \perp CQ$ или $FE \perp DF$. Тогда $DF < DE$ или $BC < DE$; сложивъ это неравенство съ равенствомъ $AB + AC = AD + AE$, найдемъ, что периметръ $\triangle ABC$ менѣ периметра $\triangle ADE$; слѣдовательно равнобедренный \triangle

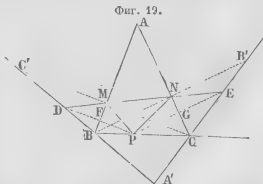
437. Возьмемъ на BC (Фиг. 17) двѣ какія-нибудь точки M и M' ; опустимъ $\perp \perp MP$ и $M'P'$ на AB и $\perp \perp MQ$ и $M'Q'$ на AC ; опустимъ $\perp MS$ на $M'P'$ и $\perp M'T$ на MQ . Тогда $MP+MQ = MP'+M'Q'$, а $M'P'+M'Q' = P'S+M'S+M'Q'$; но $MP=P'S$ и $TQ=M'Q'$, а потому, чтобы сравнить суммы $MP+MQ$ и $M'P'+M'Q'$, достаточно сравнить длины MT и $M'S$. Въ $\triangle MSM'$ и MTM' гипотенуза MM' общая, и если предположимъ, что $\angle B > \angle C$, то MT меньше $M'S$ и слѣд. $MP+MQ < M'P'+M'Q'$, т.е. сумма разстояній отъ точки M , взятой на сторонѣ BC , до боковъ AB и AC уменьшается по мѣрѣ того, какъ точка M приближается къ B , а потому эта сумма будетъ наименьшею тогда, когда M совпадетъ съ B . Слѣд. эта сумма будетъ равна высотѣ \triangle , проведенной изъ B .



438. Положимъ, въ $\triangle ABC$ (Фиг. 18) уголъ B наибольшій. Черезъ точку M , взятую внутри или вне $\triangle ABC$, проведемъ прямую $DE \parallel BC$, и пусть F будетъ точка пересѣченія DE съ AB ; опустимъ $\perp \perp MP$, MQ и MR на AB , AC и BC и $\perp \perp FG$ и FH на AC и BC ; также проведемъ высоту BT данного треугольника. По предыдущему: $FG < MP+MQ$ или $FG+FH < MP+MQ+MR$; по (I, 437) $BT < FH+FG$ и слѣд. $BT < MP+MQ+MR$. Отсюда видимъ, что искомая точка есть вершина наибольшаго изъ угловъ \triangle и что наименьшее значеніе для $MP+MQ+MR$ равно меньшей изъ высотъ \triangle .



439. E точка пересѣченія діагоналей AC и BD въ четырехугольникѣ $ABCD$. Возьмемъ внутри $\diamond ABCD$ какую-нибудь точку F ; тогда $FA+FC > AC$, $FB+FD > BD$; слѣд. $FA+FB+FC+FD > AC+BD$ или $> EA+EB+EC+ED$. Отсюда видимъ, что сумма разстояній отъ F до вершинъ \diamond будетъ наименьшею тогда, когда F совпадаетъ съ E , т.е. искомая точка будетъ E .



440. Возьмемъ на BC (Фиг. 19) произвольную точку P и ставемъ искать между всѣми вписанными треугольниками, имѣющими вершину въ P , та-

ной, у кот. периметръ наименьшій и положимъ, что $\triangle MPN$ будетъ искомымъ. Опустимъ $\perp PF$ на AB и, продолживъ его, отложимъ $FD=FP$; опустимъ $\perp PG$ на AC и, продолживъ его, отложимъ $GE=GP$; проведемъ прямая DB и EC , кот. пересѣкутся въ точкѣ A' и положеніе которой будетъ то же, гдѣ бы ни взяли P на BC . Видимъ, что $MP=MD$ и $NP=NE$, и потому, чтобы периметръ $\triangle MNP$, равный $DM+MN+NE$, былъ наименьшимъ, необходимо, чтобы линія $DMNE$ была прямою. Также, $BD+CE=BP+PC=BC$, а $A'B$ и $A'C$ одинаковы, гдѣ бы ни лежала точка P на BC , а потому $\triangle DA'E$ такой, въ кот. сумма сторонъ $A'D$ и $A'E$ постоянна. Слѣд. (I, 436) для рѣшенія задачи, надо взять $A'D=A'E=\frac{1}{2}(A'B+BC+CA')$ и провести прямую DE , кот. пересѣчетъ AB и AC въ M и N ; тогда $\triangle MNP$ будетъ искомымъ.

441. На $5\frac{1}{2}$ арш. 442. 10,9 арш. 443. 1) $\frac{1}{2}a+b$ и $\frac{1}{2}a-b$; 2) $b+\frac{1}{2}a$ и $b-\frac{1}{2}a$. 444. 1,4d. 445. $58^{\circ}42'5''$, 2. 446. $40^{\circ}29'44''$. 447. $121^{\circ}59'25''$. 448. 125° . 449. 20° . 450. $18^{\circ}45'$. 451. $98^{\circ}59'12''$. 452. 16° . 453. $38^{\circ}16'$. 454. $\frac{16}{11}J$; $\frac{5}{11}d$; $\frac{5}{11}d$ и $\frac{6}{11}d$. 455. $35^{\circ}37'30''$. 456. $144^{\circ}50''$ и $174^{\circ}36'$. 457. $\frac{5}{15}d$; $\frac{5}{15}d$ и $\frac{16}{13}d$. 458. $\frac{1}{n}$. 360° ; 5° ; 9° ; $22^{\circ}30'$. 459. $\frac{4}{181}d$ и $\frac{234}{121}d$. 460. 35° , 45° , 55° , 65° , 75° и 85° . 461. $\frac{6}{7}d$; $2d$; $\frac{10}{7}d$. 462. $19^{\circ}12'$ и $14^{\circ}24'$. 463. $60^{\circ}40'26''$. 464. Нѣтъ. 465. 90° и $32^{\circ}12'33''$, 3. 466. $90^{\circ}24'38''$ и $89^{\circ}35'22''$. 467. $\frac{2}{8}d$. 468. 108° . 469. 60° . 470. 150° , $132^{\circ}6'$ и $77^{\circ}54'$. 471. 126° , $47^{\circ}42'6''$ и $6^{\circ}47'54''$. 472. $0,7d$. 473. $21^{\circ}38'30''$. 474. 80° и $155^{\circ}48'$. 475. $11^{\circ}15'$, $67^{\circ}30'$ и $101^{\circ}15'$. 476. $83^{\circ}59'32''$ и $55^{\circ}26'28''$. 477. 72° . 478. 1) Можно; 2) и 3) Нельзя. 479. 12. 480. 12 треугольниковъ: 2, 3, 4; 2, 4, 5; 2, 5, 6; 2, 6, 7; 3, 4, 5; 3, 4, 6; 3, 5, 6; 3, 5, 7; 4, 5, 6; 4, 5, 7; 4, 6, 7; 5, 6, 7. 481. 11 треугольниковъ: 2, 2, 2; 2, 2, 3; 2, 3, 3; 2, 3, 4; 2, 4, 4; 2, 4, 5; 3, 3, 4; 3, 3, 5; 3, 4, 4; 3, 4, 5; 4, 4, 5. 482. Прямоугольный, тупоугольный и остроугольный. 483. 4 арш. и 14 арш. 484. 6 саж. 485. $109^{\circ}44'30''$ и $70^{\circ}15'30''$. 486. 2 арш. 487. 34 метра и 26 метр. 488. 2,47 арш. 489. $2d$. 490. $169^{\circ}28'$. 491. 150° и $75^{\circ}13'43''$. 492. 1) Трапеція; 2) Параллелограммъ; 3) Прямоугольникъ. 493. $10d$; $16d$; $36d$. 494. $172^{\circ}30'$. 495. 1) 8; 2) 11; 3) 22; 4) $m+2$.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ. 1. Пусть O центръ даннаго круга и A точка внѣ его. Проведемъ сѣкущія ABC и ADE такъ, чтобы $\angle CAO=\angle EAO$. Опустимъ $\perp OK$ и OL на BC и DE ; тогда $OK=OL$, а потому и $\cap BC=\cap DE$.

2. Пусть AOB діаметръ круга O ; AC и BD параллельныя хорды. $\triangle AOC=\triangle BOD$ и слѣд. $\angle AOC=\angle BOD$, т.-е. линія COB будетъ прямою.

3. AB —хорда большаго круга, пересѣкаетъ меньшую окружность въ точкахъ C и D . Опустимъ $\perp OE$ на AB ; тогда $AE=BE$ и $CE=DE$; откуда $AE-CE=BE-DE$ или $AC=BD$.

4. Пусть AB діаметръ и CD хорда круга O . Опустимъ $\perp AE$, OM и BF на CD . Такъ какъ $AO=BO$, то $EM=FM$; также $CM=DM$ и потому $CE=DF$.

5. Пусть AB діаметръ и CD хорда круга O . Возставимъ $\perp \perp CX$ и DY къ CD , кот. пересѣкутъ AB въ E и F ; опустимъ $\perp OM$ на CD . Тогда $CM=DM$ и потому $OE=OF$; слѣд. $OA-OE=OB-OF$ или $AE=BF$.

6. AB — хорда круга O . Отложимъ $AG=BH$ и чрезъ точки G и H проведемъ хорды CD и EF , \perp -ныя къ AB . Пусть OM, ON и $OK \perp \perp$ къ AB, CD и EF ; тогда $MG=MN$ или $ON=OK$, т.-е. хорда $CD=EF$. Также $CN=EK$ или $CN-GN=EK-HK$, т.-е. $CG=EH$ и слѣд. $DG=FN$.

7. Проведемъ прямую $OX \parallel AP$, которая пересѣчетъ прямую PQ въ S ; тогда S середина PQ и слѣд. $OS \perp PQ$. Но прямая AP и BQ параллельны OS , а потому перпендикулярны къ PQ .

8. AOB — діаметръ круга O ; CD и EF параллельныя и равныя хорды, пересѣкающія діаметръ AB въ точкахъ G и H . Пусть OM и $ON \perp \perp$ на CD и EF ; тогда $\triangle MOG=\triangle NOH$ и слѣд. $MG=NH$; но $CM=FN$, или $CM+MG=FN+NH$ или $CG=FN$.

9. Пусть AB и CD равныя хорды круга O . Отложимъ на нихъ равныя части AE и CF и чрезъ точки E и F проведемъ хорду $GEFH$. Пусть OM, ON и $OK \perp$ -ры на AB, CD и GH . Такъ какъ $AM-AE=CN-CF$ или $ME=NF$, то $\triangle MOE=\triangle NOF$ и слѣд. $OE=OF$; $\triangle OKE=\triangle OKF$ и потому $KE=KF$. Но $KG=KH$, а потому $GE=FH$.

10. Пусть AB и $CD \parallel$ хорды круга O , гдѣ $AB < CD$; OA и OB пересѣкаютъ CD въ точкахъ E и F . Опустимъ $\perp OG$ на AB , кот. пересѣчетъ CD въ H ; $\triangle OHE=\triangle OHF$ и потому $EH=FH$, или $CH-EH=DH-FH$ или $CE=DF$.

11. Пусть AB и CD перпендикулярныя хорды круга O ; OA и OB пересѣкаютъ CD въ точкахъ E и F ; $OH \perp CD$. $\angle A=\angle B$ и потому $\triangle OHE=\triangle OHF$; слѣд. $EH=FH$ или $CH-EH=DH-FH$, т.-е. $CE=DF$.

12. Пусть хорда AB круга O дѣлится пополамъ въ данной точкѣ P внутри круга. Черезъ точку P проведемъ еще хорду CD ; опустимъ $\perp OE$ на CD и $\perp OP$ на AB . Тогда $OE < OP$ и слѣд. $CD > AB$.

13. Дуги AA', BB' и CC' равны; откуда $\cup AA'=\cup AC=\cup CC'=\cup AC$ или $\cup A'C=\cup AC'$, т.-е. хорда $AC \parallel$ хордѣ $A'C'$.

14. Проведемъ хорду AB въ кругѣ O и раздѣлимъ ее въ C и D на три равныя части, т.-е. чтобы $AC=CD=DB$; проведемъ радіусы чрезъ C и D , кот. пересѣкутъ $\cup AB$ въ E и F . $\triangle AOC=\triangle BOD$, а потому $\angle AOE=\angle BOF$, и слѣд. $\cup AE=\cup BF$. Проведемъ прямую $BK \parallel DO$ до пересѣченія съ продолж. CO въ G ; въ $\triangle BGC$ найдемъ, что $OG=OC$, потому что $BD=CD$; но $OB > OC$ или OG , а потому изъ $\triangle OBG$ видимъ, что $\angle OGB > \angle OBG$ или $\angle COD > \angle BOD$; слѣд. $\cup EF > \cup BF$ и $> \cup AE$.

15. Назначимъ $\angle DAO$ буквою α . Тогда $\angle COA=\alpha$ и $\angle ADO=\angle OCD=2\alpha$; но $\angle DOE=\angle DAO+\angle ADO=\alpha+2\alpha=3\alpha$.

16. Проведемъ радіусы OD, OE и прямую $FL \parallel DO$, которая пересѣчетъ OB въ точкѣ M . Изъ $\triangle CFM$ видимъ, что $OC=OM$ и $FM=2OD$, а изъ $\triangle CGM$, что $GM \parallel OE$ и $GM=2OE$; но $OD=OE$, а потому $MF=MG$.

17. Пусть O центръ окружности. Тогда $\angle BAO=\angle ABO=\angle PAB$, т.-е. AB есть равнодѣлящая $\angle PAC$.

18. O центръ окружностей; AB и CD хорды большого круга, касающіяся меньшаго круга въ точкахъ E и F ; $OE \perp AB$ и $OF \perp CD$. Такъ какъ $OE=OF$, то $AB=CD$.

19. Касательныя \perp -ны къ діаметру, а потому параллельны между собою.

20. Такъ какъ разстояніе отъ вершины прямого угла до середины гипотенузы равно половинѣ гипотенузы (I, 81), то отсюда видимъ, что вершины прямого угла будутъ лежать на окружности, описанной изъ середины гипотенузы радіусомъ, равнымъ половинѣ ея.

21. Пусть O центръ окружности, проходящей чрезъ точки C , D и E . Тогда $OD \perp AC$ и къ DF , а потому DF будетъ касательною къ кругу O .

22. $\triangle AOB$ равнобедренный, потому что $AO=AB$; кромѣ того $OB=2OD$ и слѣд. D есть середина основанія этого \triangle . Отсюда видимъ, что $AD \perp OD$, т.-е. что AD есть касательная къ кругу O .

23. Пусть AB и AC касательныя къ кругу O . $\angle OBA=\angle OCA=d$ и поэтому $\triangle AOB=\triangle AOC$; слѣд. $AB=AC$ и $\angle OAB=\angle OAC$.

24. Пусть AB и AC касательныя къ кругу O ; D пересѣченіе хорды BC съ AO . $\angle OAB=\angle OAC$ (II, 23); слѣд. $\triangle ABD=\triangle ACD$; откуда $\angle ADB=\angle ADC$, т.-е. $\angle ADB$ прямой.

25. AB и AC касательныя къ кругу O ; $\angle BAC=60^\circ$. Въ $\triangle ABO$ уголъ $OAB=30^\circ$, а потому $\angle BOA=60^\circ$; слѣд. (I, 80) $OA=2OB=\text{діаметру}$.

26. AB и AC касательныя къ кругу O ; $\angle BAC=120^\circ$. Въ $\triangle AOB$ уголъ $OAB=60^\circ$, а потому $\angle BOA=30^\circ$; слѣд. (I, 80) $AO=2AB=AB+AC$.

27. На радіусѣ OA даннаго круга O опишемъ окружность и проведемъ хорду AB , которая пересѣчетъ эту окружность въ C ; $OC \perp AB$ и слѣдовательно $AC=BC$.

28. $\triangle BED=\triangle GEF$, а потому $\angle EGF=\angle EBD=\angle ACD$; слѣд., $GF \parallel AC$.

29. $ABCD$ данный \diamond ; E , F , G и H середины AB , BC , CD и DA . Окружности, описанныя на AB и BC пересѣкаются въ K , а окружности, описанныя на AD и DC , пересѣкаются въ L . Тогда $EF \perp BK$ и $DL \perp CH$; но $EF \parallel AC \parallel GH$, а потому $BK \parallel DL$.

30. $AC \perp BD$; слѣд. $\angle DAC=\frac{1}{2}d$ и $\angle ADC=\frac{1}{2}d$, а потому $AC=CD$.

31. Продолживъ AD и BC до пересѣченія въ E , увидимъ, что AC и BD суть высоты $\triangle ABE$, а слѣд. третья высота, проходя чрезъ точку M , проходитъ и чрезъ вершину E .

32. Въ кругѣ O проведены пересѣкающіяся хорды AB и CD и діаметры EOF и GON , параллельные этимъ хордамъ. Видимъ, что $\cup AC + \cup BD = \cup AH - \cup CH + \cup DF + \cup BF = (\cup AH + \cup BF) + (\cup DF - \cup CH) = (\cup AH + \cup AE) + (\cup DF - \cup DG) = \cup EH + \cup FG$.

33. Хорды AB и CD круга O встрѣчаются въ точкѣ E подъ прямымъ угломъ. $\angle AEC$ измѣряется полусуммою дугъ AC и BD , а $\angle AED$ — полусуммою дугъ AD и BC ; $\angle AEC = \angle AED$ и потому $\cup AC + \cup BD = \cup AD + \cup BC$. Сумма же этихъ дугъ равна окружности круга, а потому $\cup AC + \cup BD$ или $\cup AD + \cup BC = \text{полуокружности}$.

34. O центръ даннаго круга. На радіусѣ OA опишемъ окружность и проведемъ еще радіусы OB и OC , пересѣкающіе окружность, описанную

на OA , изъ точкахъ E и F ; опустимъ $\perp CD$ на OB , а на OC опишемъ окружность, которая пройдетъ чрезъ точку D . Хорды EF и CD въ равныхъ кругахъ AFO и CDO равны, какъ отвѣчающія одному и тому же вписанному углу BOC .

35. $\cup AD = \cup BD$; слѣд. $\angle APD = \angle BPD$. Продолжимъ BP до E ; $CP \perp DP$, а потому CP (I, 7) будетъ равнодѣлящей $\angle APE$.

36. Описавъ на AB сегментъ, вмѣщающій данный уголъ, увидимъ, что равнодѣлящія данныхъ угловъ проходятъ чрезъ C , середину дуги AB .

37. Пусть AB и BC хорды круга O ; хорда BD равнодѣлящая $\angle ABC$. Проведемъ хорду $DE \parallel AB$; тогда $\angle BDE = \angle ABD = \angle DBC$ и $\angle BED = \angle BCD$; слѣд. $\triangle BDE = \triangle BDC$, а потому $DE = BC$.

38. Въ кругѣ O проведемъ хорду AB и возьмемъ точку C на его окружности; построимъ $\angle BAD = \angle C$ и опустимъ $\perp OE$ на AB . Тогда $\angle BAD = \angle AOE$; но $\angle AOE + \angle OAE = d$ и потому $\angle BAD + \angle OAE$ тоже $= d$, т.-е. $\angle OAD$ прямой, а слѣд. AD будетъ касательною къ кругу O .

39. Положимъ, что CD и BE пересѣкаются въ точкѣ G , а AD и CE въ F . $\angle DGE$ измѣряется полуразностью дугъ DE и BC , а $\angle DFE$ измѣряется полуразностью дугъ DE и AC ; но $\cup AC = \cup BC$, а потому и $\angle DGE = \angle DFE$.

40. Положимъ, что равныя хорды AB и CD данного круга пересѣкаются въ точкѣ E внутри круга. $\cup AB = \cup CD$ или, отнявъ отъ обѣихъ дугъ по $\cup BC$, найдемъ, что $\cup AC = \cup BD$; слѣд. хорда $AC = BD$ и $\angle CAB = \angle BDC$, а потому $\triangle ACE = \triangle BDE$. Откуда $AE = DE$ и $BE = CE$.

41. $CD \perp AB$, а потому $\cup BC = \cup BD$; слѣд. $\angle BEC = \angle BED$. AB диаметръ и потому $\angle AEB$ прямой, т.-е. $AE \perp EB$; слѣд. $\angle BEA = \angle BEF$ и $\angle BEA - \angle BEC = \angle BEF - \angle BED$, т.-е. $\angle AEC = \angle DEF$.

42. $\angle ACB = \angle DAE + \angle ADB$; откуда $\angle DAE = \angle ACB - \angle ADB$ постоянный и слѣд. $\cup DE$ тоже постоянная.

43. Пусть O середина AB . $\angle AGB$ и AHB прямые; слѣд. (II, 20) G и H лежатъ на окружности, описанной на AB , какъ диаметрѣ. $\angle GAN = \angle APB - 90^\circ$ постоянная величина; слѣд. $\perp OC$ на GH будетъ величина постоянная, а потому хорда GH будетъ касательною къ окружности, описанной изъ O радиусомъ OC .

44. Продолжимъ AC до G ; E и F середины AB и CD . Тогда $\angle GPD = \angle PAD + \angle ADP$; но $\angle PAD = \frac{1}{2} \angle COD$ и $\angle ADP = \frac{1}{2} \angle AOB$; слѣд. $\angle GPD = \frac{1}{2} \angle COD + \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} (\angle COD + \angle AOB) = \frac{1}{2} \cdot 2d = d$. Въ $\triangle APB$ и CPD : $PE = \frac{1}{2} AB$ и $PF = \frac{1}{2} CD$; слѣд. $PE + PF = \frac{1}{2} (AB + CD)$ будетъ постоянная.

45. $\angle MPC = \angle PAB = 2d - \angle EAB = 2d - \angle EFB = \angle PFE$; отсюда $CD \parallel EF$.

46. O центръ круга; A середина данной хорды; C данная точка на хордѣ. Проведемъ чрезъ C хорду DCE и пусть B ея середина; тогда $\angle OAC$ и OBC будутъ прямые и потому окружность, описанная изъ середины OC радиусомъ, равнымъ $\frac{1}{2} OC$, пройдетъ (II, 7) чрезъ A и B . Слѣдовательно $\angle ABC = \angle AOC$ будетъ величина постоянная, какъ бы не провели хорду DE .

47. Чрезъ точку P проведемъ диаметръ PQ и, продолживъ его, отложимъ часть $PQ' = PQ$; точки A, B, C, \dots соединимъ съ Q , а точки $A',$

B', C', \dots соединимъ съ Q' . $\triangle PA'Q' = \triangle PAQ$ и потому $\angle PA'Q' = \angle PAQ$, т.-е. $\angle PA'Q'$ будетъ прямой, а слѣд. точка A' принадлежитъ окружности, описанной на PQ' , какъ діаметръ. То же самое можемъ сказать и о другихъ точкахъ.

48. Касательная въ A пересѣкаетъ EF въ G . $\angle GAE = \angle GAC + \angle CAE = \angle ABC + \angle BAE = \angle AEG$; слѣд. $GE = GA$; $\angle EAF$ прямой. Углы GAF и AFG равны, какъ имѣющіе одно и то же дополнение до прямого угла; слѣдовательно, $GF = GA$, т.-е. G середина EF .

49. Проведемъ прямую $DAE \parallel PQ$. Тогда $\angle DAB = \angle QPA = \angle C$, т.-е. величина постоянная, а потому положеніе прямой DAE будетъ то же для всякой окружности.

50. Начертимъ $\triangle ABC$; на AB и AC , какъ діаметрахъ, опишемъ окружности, кот. пересѣкутъ прямую BC въ точкахъ D и E . Тогда $\angle ADB = d = \angle AEC$; это же возможно только тогда, когда точки D и E совпадаютъ.

51. Пусть D и E середины дугъ AB и AC . $\angle EGC$ измѣряется $\frac{1}{2}(\cup CE - \cup AD) = \frac{1}{2}(\cup AE - \cup AD) = \frac{1}{2}\cup DE$, а уголъ $\angle AFG$ измѣряется $\frac{1}{2}(\cup AD + \cup BE) = \frac{1}{2}(\cup DB + \cup BE) = \frac{1}{2}\cup DE$; слѣд. $\angle EGC = \angle AFG$, и потому $AF = AG$.

52. $\angle APB + \angle PBA + \angle BAP = 2d$ и $\angle AQB + \angle QBA + \angle BAQ = 2d$; слѣдовательно $\angle APB + \angle AQB + \angle PBA + \angle QBA + \angle BAP + \angle BAQ = 4d$; но MA и MB равнод. $\angle \angle PAQ$ и PBQ ; слѣд. $\angle PBA + \angle QBA = \angle PBA + \angle PBA + 2\angle MBP = 2(\angle PBA + \angle MBP) = 2\angle MBA$; также $\angle BAP + \angle BAQ = 2\angle BAM$, а потому $\angle APB + \angle AQB + 2(\angle MBA + \angle BAM) = 4d = 2(\angle MBA + \angle BAM + \angle AMB)$; отсюда $\angle APB + \angle AQB = 2\angle AMB$. Но $\angle \angle APB$ и AQB постоянные, а потому и $\angle AMB$ постоянный.

53. Въ окружности $AKCE$, уголъ $CAE = \angle SCE$, а въ окружности $ACHL$, уголъ $CAH = \angle CLH$, а потому $\angle EKB = \angle HLB$; $EB = BH$, а потому $\triangle BKE = \triangle BHL$; отсюда $BK = BL$.

54. $\angle BEP = \angle ACP = \angle PCE = \angle PBE$; слѣд. въ $\triangle BPE$ сторона $PB = PE$.

55. Пусть K и L означаютъ точки пересѣченія прямой XY съ окружностью. $\angle MBN$ измѣряется $\frac{1}{2}\cup AB$, а $\angle NMB$ измѣр. $\frac{1}{2}(\cup AL + \cup KB) = \frac{1}{2}(\cup AK + \cup KB) = \frac{1}{2}\cup AB$; слѣд. $\angle MBN = \angle NMB$ и $MN = BN$.

56. $\angle BAD = \angle BDA$ и слѣд. $AB = BD$; но $\angle BAD + \angle AFD = d$ и $\angle BDA + \angle BDF = d$, а потому $\angle AFD = \angle BDF$, т.-е. $BD = BF$ или $AB = BF$.

57. $\cup CF = \cup BD = \cup AE$; слѣд. хорда $CF =$ хордѣ AE , а потому $\triangle FGC = \triangle AGE$; отсюда $CG = EG$. $\angle GHC = \angle BHF = d - \angle HBF = d - \angle ABE = \angle AEB = \angle ACB$, т.-е. въ $\triangle GHC$ сторона $GC = GH$; поэтому $EG = GH = GC$. Въ $\triangle BEC$, $OB = OE$ и $EG = GH$; слѣд. $OG \parallel BC \parallel DF$.

58. Продолжимъ AF и BE до пересѣченія съ окружн. въ P и Q . $\angle ABQ = \angle BAP$; $\angle \angle AQB$ и APB прямые, а потому $\triangle AQB = \triangle APB$ и $\angle QAB = \angle BAP$, т.-е. $AQ =$ и $\parallel BP$ и $AQ \parallel MC$; слѣд. $CQ = AM$ и $QE = AF$. Поэтому $\triangle CQE = \triangle AFM$ и $CE = FM$; $ME + MF = ME + EC = MC$. $\angle MCD = \angle BAP$, какъ съ \perp -ми сторонами; поэтому $MD = BP = EF = ME - MF$.

59. Въ $\triangle ABC$ проведемъ высоты AD , BE и CF , кот. пересѣкнутся въ H ; пусть HM , HN и HK діаметры окружн., описанныхъ на AB , BC и AC и проходящихъ чрезъ H . $\angle HCN = d = \angle HCK$, а потому линія NCK будетъ

прямая, такъ же, какъ и линіи KAM и MBN ; $\angle HAC = \angle EBC$ или $\angle HEC = \angle HNC$, т.-е. $HK = HN$. Такъ же докажемъ, что $HM = HN$.

60. Бока угла A касаются круга O въ B и C . Проведемъ касательную къ кругу въ какой-либо точкѣ D дуги BC (меньшей), кот. пересѣчетъ бока AB и AC въ E и F . 1) По свойству касательныхъ, имѣемъ: $ED = EB$ и $FD = FC$, а потому периметръ $\triangle AEF = AE + AF + ED + FD = AE + AF + EB + FC = AB + AC = 2AB$, т.-е. постояненъ. 2) Такіе $\angle EOF = \angle EOD + \angle FOD = \frac{1}{2} \angle BOD + \frac{1}{2} \angle DOC = \frac{1}{2} \angle BOC$. Если же проведемъ касательную къ кругу чрезъ точку D' , лежащую на вогнутой дугѣ BC , пересѣкающую бока угла въ E' и F' , то разность между суммою сторонъ $\triangle AE'F'$, содержащихъ $\angle A$, и третьей стороной будетъ постоянна, потому что $AE' + AF' - E'F' = AB + BE' + AC + CF' - E'D' - D'F' = AB + AC$. Такъ же и $\angle E'OF' = 2d - \angle EOF$ будетъ величина постоянная.

61. Положимъ, что DE не есть касательная къ кругу. Тогда проведемъ изъ точки D касательную къ этому кругу, кот. пересѣчетъ сторону AC въ точкѣ G и коснется круга въ точкѣ F . Найдемъ: $DG = DF + FG = BD + CG$ и $DE - DG = CE - CG = EG$, что не возможно; слѣд. наше предположеніе не вѣрно, и потому DE есть касательная.

62. Пусть O центръ круга; AB его діаметръ; AM и BN касательныя. Чрезъ какую-нибудь точку C окружности проведемъ касательную, которая пересѣчетъ прямыя AM и BN въ точкахъ D и E . Тогда $\angle AOD = \angle COD$ и $\angle BOE = \angle COE$; откуда $\angle DOE = d$ (1, 7).

63. Пусть окружности O и O' пересѣкаются въ A и B . Проведемъ параллельныя прямыя CAD и EBF и чрезъ O и O' прямыя, перпендикулярныя къ CD , кот. пересѣкутъ CD въ G и K , а EF въ H и L . Тогда $AG + AK = BH + BL$, или $2AG + 2AK = 2BH + 2BL$ или $CD = EF$.

64. Пусть A и B точки пересѣченія окружностей O и O' ; AC и AD ихъ діаметры. $\angle \angle ABC$ и ABD прямые, а потому линія CBD будетъ прямая.

65. $\angle \angle C$ и D будутъ одни и тѣ же, при всякомъ положеніи сѣкущей, а потому и $\angle CBD$ будетъ тотъ же для всякой сѣкущей CAD .

66. Окружности O и O' касаются въ A . Проведемъ параллельныя діаметры BOC и $DO'E$; $\angle COA = \angle AO'D$, а потому изъ равнобедренныхъ $\triangle \triangle AOC$ и $AO'D$ находимъ, что $\angle AOC = \angle DAO'$, т.-е. линія CAD будетъ прямая.

67. Проведемъ общую касательную MAN къ даннымъ кругамъ. Тогда $\angle BDA = \angle BAM$ и $\angle AEC = \angle NAC$; но $\angle BAM = \angle NAC$, а потому $\angle BDA = \angle AEC$, т.-е. $BD \parallel CE$.

68. Окружности O и O' касаются въ A ; AB и AC хорды этихъ круговъ. Проведемъ общую касательную MAN къ этимъ кругамъ; тогда $\angle BAM = \frac{1}{2} \angle AOB$ и $\angle CAM = \frac{1}{2} \angle AOC$; откуда $\angle BAC = \frac{1}{2} (\angle AOB + \angle AOC)$.

69. Чрезъ точку B проведемъ общую касательную MBN къ кругамъ O и O' . Тогда $\angle MBC = \frac{1}{2} \angle BO'C$ и $\angle NBA = \frac{1}{2} \angle AOB$; но $\angle MBC = \angle NBA$ и потому $\angle BO'C = \angle AOB$, т.-е. $OO' \parallel O'A \parallel O''C$.

70. O и O' центры большаго и меньшаго круговъ. Продолжимъ AD до пересѣченія съ окружн. O въ точкѣ G . Въ $\triangle AO'D$: $\angle O'DA = \angle DAO'$, а въ $\triangle AOG$: $\angle OGA = \angle GAO$; откуда $\angle OGA = \angle O'DA$, т.-е. $OG \parallel O'D$

и слѣд. \perp къ BC , а потому дуга $BG =$ дугѣ CG , т.-е. $\angle BAG = \angle CAG$; откуда выходить, что AD будетъ равнодѣлящая $\angle BAC$.

71. Черезъ точку A пересѣченія окружностей O и O' проведемъ сѣкущую BAC и еще прямую $DAE \parallel OO'$; опустимъ $\perp \perp OF$ и $O'G$ на BC , $\perp \perp OH$ и $O'K$ на DE ; тогда $FG = \frac{1}{2}BC$ и $HK = \frac{1}{2}DE$. Проведемъ прямую $OL \parallel BC$ до встрѣчи съ OF въ точкѣ L ; найдемъ: $O'O > O'L$, или $HK > FG$, или $\frac{1}{2}DE > \frac{1}{2}BC$; откуда $DE > BC$.

72. Равныя окружности O и O' пересѣкаются въ A и B . Изъ B опишемъ окружн. произвольнымъ радіусомъ, который пересѣчетъ окружн. O въ C' и D , а окружн. O' въ C и D' (точки C и D по одну сторону AB , а C' и D' по другую сторону). Предположимъ, что прямая AC , по продолженіи, не пройдетъ черезъ D , а пересѣчетъ $\cup ABD$ въ E ; $\angle A$ измѣрится $\frac{1}{2}\cup BC$ и $\frac{1}{2}\cup BE$, а потому $\cup BC = \cup BE$ и хорда $BC =$ хордѣ BE ; слѣд. E лежитъ на окружности, описанной изъ B , т.-е. совпадетъ съ D .

73. Соединивъ B съ G , увидимъ, что $\angle BGA = \angle C$ и $\angle BPG = \angle C$; слѣдовательно $\triangle BGP$ будетъ равнобедренный, въ которомъ $DG = DP$.

74. ABC данный треугольникъ; $A'B'C'$ полученный треугольникъ, гдѣ A' , B' и C' лежатъ противъ A , B и C ; O центръ описанной окружности около $\triangle ABC$. $A'BOC$ ромбъ, а потому $A'B =$ и $\parallel OC$; $AB'CO$ тоже ромбъ, а потому $AB' =$ и $\parallel OC$; слѣд. $A'B =$ и $\parallel AB'$, а потому $A'B' =$ и $\parallel AB$. Также покажемъ, что $B'C' =$ и $\parallel BC$ и что $C'A' =$ и $\parallel CA$.

75. $\angle ABE = d - \angle BAC = \angle ACF$; слѣд. $\cup AE = \cup AF$.

76. Пусть $BO < CO$. Тогда $\angle PQO = 2d - \angle PLO = \angle BLO = \angle BAC$; $\angle QPO = \angle OKQ = \angle BAC$; слѣд. $\angle POQ = \angle ABC$, т.-е. $\triangle POQ$ равносторонній.

77. O и O' двѣ равныя окружности, пересѣкающіяся въ точкахъ A и B . Черезъ A проведемъ сѣкущую CAD , кот. пересѣчетъ еще въ точкѣ E окружность, описанную на AB , какъ діаметрѣ. $\angle ACB = \angle ADB$, какъ измѣряющіеся равными дугами; слѣдовательно $\triangle BCD$ равнобедренный, а потому BE , будучи перпендикулярна къ CD , раздѣляетъ CD пополамъ въ E .

78. A данная точка на прямой BC , въ кот. касаются описанныя окружности. Проведемъ прямую $XY \parallel BC$, кот. пересѣчетъ одну изъ окружностей въ P и P' , и черезъ P касательную PQ къ этой окружности; опустимъ $\perp AD$ на XY и $\perp AE$ на PY ; прямая AD пройдетъ черезъ центры окружностей. $AP = AP'$, а потому $\angle APP' = \angle AP'P$ и $\cup AP = \cup AP'$. $\angle EPA = = \angle AP'P$ (какъ измѣряющіеся $\frac{1}{2}\cup AP$) $= \angle APP'$, т.-е. A равноотстоитъ отъ PP' и PE , а потому PE будетъ касательною къ окружности, описанной изъ A радіусомъ AD .

79. Проведемъ OO' , $O'O''$, $O''O$, OD и OE . OO' проходитъ черезъ C ; слѣд. $\angle O'CA = \angle OCE$; но $\angle O'CA = \angle O'AC$ и $\angle OCE = \angle OEC$, а потому $\angle OEC = \angle O'AC$, т.-е. $OE \parallel O'O''$. Точно такъ же $OD \parallel O'O''$, а потому OD и OE составляютъ прямую, параллельную $O'O''$, т.-е. DOE будетъ діаметръ окружности O .

80. $\angle EAC = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle ABD = \angle ACD$; слѣд. $AE \parallel DC$. Точно такъ же $AD \parallel CE$. Но $\angle ABD = \angle DBC$, а потому $AD = DC$, т.-е. фигура $AECD$ будетъ ромбъ.

81. $\angle CAD = \angle CBD$ или $\angle EAF = \angle CBH$, а потому дуга $EGF = \text{дугѣ } GFH$; слѣдовательно хорда $EF = \text{хордѣ } GH$.

82. O' и O'' центры окружностей. $AD = DB = O'A + O''B$; слѣдовательно $O'D = O''C = O''F$ и $O'D = O'C = O'E$ и $DE = DF$; поэтому $\triangle O'DE = \triangle O''DF$; откуда $\angle DO'E = \angle DO''F$, т.-е. $O'E \parallel O''F$ и $\angle O'CE = \angle O''CF$; но $O'CO''$ прямая, а потому ECF прямая.

83. Проведемъ касательную къ окружности ADC въ A , кот. пересѣчетъ прямую FD въ G . Тогда $\angle DAG = \angle ACD = \angle DAC$ и $\angle ADG = \angle ACF = \angle ACD + \angle DCF = \angle DAC + \frac{1}{2} \angle DAC$; слѣд. $\angle DAG + \angle ADG = 2\angle DAC + \frac{1}{2} \angle DAC = \angle ABC + \angle BAF = d$, а потому $\angle AGD = d$, т.-е. FD перпендикулярна къ касательной AG . То же самое и для прямой FE .

84. Окружности O и O' касаются въ A ; B и C точки касанія общей касательной къ этимъ кругамъ. Черезъ A проведемъ общую касательную къ даннымъ кругамъ, кот. пересѣчетъ BC въ D ; тогда $DA = DB$ и $DA = DC$, т.-е. окружность, описанная изъ D радиусомъ BD , пройдетъ черезъ точки B , A и C и будетъ касательною къ OO' , потому что $OO' \perp AD$.

85. Черезъ точку A пересѣченія окружностей O и O' проведемъ свѣщія BAC и DAE ; положимъ, что прямая BD и EC , по продолженіи, пересѣкутся въ точкѣ M . Черезъ A проведемъ, соотвѣтственно, касательныя GAN и $G'AN'$ къ даннымъ кругамъ; тогда увидимъ, что $\angle AEC = \angle SAC' = \angle BAN'$, а $\angle ADB = \angle BAN$; слѣдоват. $\angle M = \angle ADB - \angle AEC = \angle BAN - \angle BAN' = \angle HAN'$, т.-е. величина постоянная.

86. Въ $\triangle ABC$, на катетахъ AB и AC опишемъ полуокружности AFB и AHC ; изъ D , середины гипотенузы BC , опустимъ $\perp DE$ на AB , который пересѣчетъ полуокружн. AFB въ F ; опустимъ $\perp DG$ на AC , который пересѣчетъ полуокружн. AHC въ H . Тогда $DF = DE + EF = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} (AB + AC)$, и потому окружность, описанная изъ D радиусомъ $\frac{1}{2} (AB + AC)$, коснется въ точкахъ F и H полуокружностей AFB и AHC .

87. Окружности O и O' пересѣкаются въ P и Q ; AB и CD общія касательныя къ нимъ. Возьмемъ на окружности O , противъ P и Q , точку G ; тогда $\angle AGC + \angle APC = 2d$ или $\frac{1}{2} \angle AOC + \angle APC = \frac{1}{2} \angle BO'D + \angle APC = \angle BPD + \angle APC = 2d$; слѣд. $\angle APB + \angle CPD = 2d$. Но $\angle CPD = \angle AQB$, а потому $\angle APB + \angle AQB = 2d$.

88. Дана окружность O и прямая XU . Опишемъ окружность G , касающуюся наружно окружности O въ B и прямую XU въ D . Опустимъ $\perp OE$ на XU и продолжимъ его до пересѣченія съ окружностью O въ A ; соединимъ G съ O и D , B съ D и B съ A . $\angle AOB = \angle BGD$, а потому въ равнобедренныхъ $\triangle BGD$ и AOB , уголъ $DBG = \angle ABO$, т.-е. DBA прямая, гдѣ A лежитъ на пересѣченіи окружности O и перпендикуляра изъ O на прямую XU , т.-е. точка A постоянная. То же самое будетъ, если окружности внутренне касаются.

89. $\angle TEC = \angle BAC = \angle TBC$; слѣд. около $TBEC$ можно описать окружность, а потому $\angle TEB = \angle TCB = \angle TBC = \angle TEC$; но $\angle TEB = \angle EBA$, $\angle TEC = \angle EAB$ и потому $\angle EBA = \angle EAB$ и $EA = EB$. Слѣд. E лежитъ на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ середины AB , т.-е. на діаметрѣ, перпендикулярномъ къ AB .

90. $\angle BAC = \angle BCA$; слѣдовательно $\angle DBC = 2\angle BAC = \angle BOC$, а потому, въ $\triangle BCD$ и EOC , уголъ $OEC = \angle BDC$, какъ имѣющіе одно и то же дополненіе до прямого. Эти равные углы опираются на BC , а потому D и E лежатъ на круговомъ сегментѣ $BEDC$.

91. $\angle EFD$ и EGD прямые, а потому около $DEFG$ можно описать окружность; тогда $\angle GFD = \angle GED = \angle EDA = \angle EBA$. Также $\angle BFD = \angle FBE$, а потому $\angle GFB = \angle FBA$, т.-е. $GF \parallel AB$.

92. $\angle ODC$ и DEC прямые, а потому около $ODCE$ можно описать окружность; слѣд. $\angle ODE = \angle OCE = \angle OCA$. Также можно описать окружность около $ODBF$, а потому $\angle ODF = \angle OBF = \angle OBA$. Но $\angle BOC = \angle OBA + \angle BAC + \angle ACO = \angle ODF + \angle BAC + \angle EDO = \angle BAC + \angle FDE$.

93. Въ $\triangle ABC$, окружность касается сторонъ BC , CA и AB въ D , E и F ; DG , EH и $FK \perp$ -ы на EF , FD и DE . Тогда $\angle BDF = \frac{1}{2}(2d - \angle B)$ и $\angle CDE = \frac{1}{2}(2d - \angle C)$; слѣд. $\angle FDE = \frac{1}{2}(2d - \angle A)$. Но $\angle DGF$ и $\angle DKF$ прямые, а потому около $DKGF$ можно описать окружность; тогда $\angle EGK = 2d - \angle FGK = \angle EDF$. Но $\angle AEG = \frac{1}{2}(2d - \angle A) = \angle EDF$ и слѣдовательно $\angle EGK = \angle AEG$, т.-е. $GK \parallel AC$. Также $GH \parallel AB$ и $HK \parallel BC$.

94. Пусть PA' , PB' и PC' діаметры, а L , M и N центры окружностей PBC , PCA и PAB . Такъ какъ L , M и N середины PA' , PB' и PC' , то $NM = \frac{1}{2}B'C'$, $NL = \frac{1}{2}C'A'$ и $LM = \frac{1}{2}A'B'$. Но AB' и $BC \perp$ -ы AP ; слѣдовательно $AB' \parallel BC$. Также $B'C \parallel AB$, а потому $AB' = \parallel BC$; также $AC' = \parallel BC$; слѣдовательно $B'AC'$ прямая; откуда $BC = \frac{1}{2}B'C' = MN$. Также $CA = NL$ и $AB = LM$, т.-е. $\triangle MNL = \triangle ABC$.

95. Въ $\triangle ABC$ вписанъ кругъ, касающійся AB , BC и CA въ D , E и F ; касательная къ $\odot DF$ пересѣкаетъ AB и AC въ K и I ; касательная къ $\odot DE$ пересѣкаетъ AB и BC въ M и N ; касательная къ $\odot EF$ пересѣкаетъ BC и AC въ P и Q . Сумма периметровъ $\triangle AKL$, BMN и CPQ равна (II, 60) $AD + AF + BD + BE + CE + CF = AB + BC + AC$.

96. Пусть въ $\diamond ABCD$ окружность O касается продолженій сторонъ AB и DC и діагоналей AC и BD въ E , F , G и H . Тогда $BD = BF + DF = BE + DH$; слѣд. $AB + BD = AE + DH$ (1) и $AC = CG + AG = CH + AE$, а $AC + CD = DH + AE$ (2). Изъ (1) и (2) выходитъ, что $AB + BD = AC + CD$. Это и есть необходимое и достаточное условіе.

97. Равносторонній $\triangle ABC$ вписанъ въ кругъ O ; D и E середины дугъ AB и AC ; хорда DE пересѣкаетъ AB въ E и AC въ G . Дуги DB и EC равны, а потому $DE \parallel BC$ и $\triangle AFG$ есть равносторонній; также $\angle ADF = \angle FAD = \angle AEG = \angle GAE$; слѣдовательно $DF = AF = FG = AG = GE$.

98. $\angle EDF = \frac{1}{2} \angle EOF = \frac{1}{2} \left(180^\circ - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(90^\circ + \frac{A}{2} \right) = \frac{1}{4} (180^\circ + A)$. Также $\angle DEF = \frac{1}{4} (180^\circ + B)$ и $\angle EFD = \frac{1}{4} (180^\circ + C)$.

99. Въ $\triangle ABC$ (фиг. 20), кот. периметръ $2p$, вписанъ кругъ O , касающійся сторонъ AB , BC и AC въ точкахъ D , E и F , и внѣ вписаны круги O' , O'' и O''' . Кругъ O' касается BC въ G и продолженій сторонъ AB и AC въ H и K ; кругъ O''' касается стороны AB и продолженій сторонъ CB и CA въ S , N и V ; кругъ O'' касается продолженія стороны BC въ L .

1) По свойству касательныхъ, $AD=AF$, $BD=BE$ и $CE=CF$. По $2p=2AD+2BE+2CF$, а потому $AD+BE+CF=p$.

2) $p=AD+BE+CF=AF+BE+CF=BE+AC$; откуда $BE=p-AC$. $2p=AB+AC+BC=AS+BS+AC+BC=AV+BN+AC+BC=CV+CN=2CN$; откуда $p=CN=BC+BN$ или $BN=p-BC$.

3) $2p=AB+BC+AC=AB+BG+CG+AC=AB+BH+CK+AC=AH+AK=2AH=2AK$; откуда $AH=AK=p$.

4) $BE=p-AC$, а $CG=CK=AK-AC=p-AC$; слѣд. $BE=CG$ или $BG=CE$. Но $BN=p-BC$ (2°) и $CL=p-BC$, а потому $BN=CL$.

5) Пусть M середина бока BC . Имѣемъ: $BE=CG$ и $BM=CM$; откуда $BM-BE=CM-CG$ или $ME=MG$. Такъ же $BN=CL$ и $BM=CM$; откуда $BN+BM=CL+CM$ или $MN=ML$.

6) $EG=BG-BE=BH-BE=(p-AB)-(p-AC)=AC-AB$.

7) $NL=NB+BL=(p-BC)+p=2p-BC=AB+AC$ и

8) $EN=NB+BE=p-BC+p-AC=2p-BC-AC=AB$.

100. AO равнодѣлящая $\angle A$; $\angle ADG$ измѣряется $\frac{1}{2}\angle DG$, а $\angle GDE$ измѣряется $\frac{1}{2}\angle GE$; но $\angle DG=\angle GE$, а потому $\angle ADG=\angle GDE$; слѣдовательно, точка G будетъ центръ вписаннаго круга въ $\triangle ADE$.

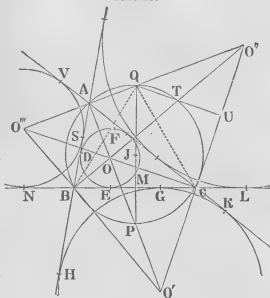
101. (Фиг. 20). $\angle ADF=\angle AFD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=\frac{1}{2}\angle DAV=\angle DAO''$; слѣдовательно, прямая $O''AO'' \parallel DF$. Также $O'O'' \parallel EF$ и $O'O'' \parallel DE$.

102. Въ $\triangle ABC$ вписанъ кругъ O , касающійся катетовъ AB и AC въ D и E и гипотенузы въ F . Тогда $OD=AD=AB-BD=AB-BF=AB-(BC-CF)=AB-BC+CF=AB-BC+CE=AB-BC+AC-AE$, или $OD=AB-BC+AC-OD$ или $2OD=AB+AC-BC$.

103. На основаніи пред. задачи, имѣемъ: $2OD+BC=AB+AC$, гдѣ $2OD$ и BC діаметры вписаннаго и описаннаго круговъ около $\triangle ABC$.

104. AB + діаметръ вписаннаго круга въ $\triangle AOB=AO+OB$ (II, 102); также и для остальныхъ \triangle . Слѣд. периметръ $\diamond ABCD$ + сумма 4 діаметровъ $=2(AC+BD)$; откуда сумма 4 радіусовъ вписанныхъ круговъ равна разности между $AC+BD$ и полупериметромъ $\diamond ABCD$.

Фиг. 20.



105. Изъ вершины A въ $\triangle ABC$ опустимъ $\perp AP$ на BC и означимъ діаметры вписанныхъ круговъ въ $\triangle APB$ и APC черезъ A_b и A_c ; тогда (II, 102) $A_b + AB = AP + BP$ и $A_c + AC = AP + PC$; откуда $A_b + A_c + AB + AC = 2AP + BC$. Опустимъ $\perp BQ$ на AC и означимъ діаметры вписанныхъ круговъ въ $\triangle BQC$ и AQB черезъ B_a и B_c ; получимъ $B_c + B_a + BC + AB = 2BQ + AC$. Опустимъ $\perp CR$ на AB и означимъ черезъ C_b и C_a діаметры вписанныхъ круговъ въ $\triangle ARC$ и BRC ; тогда $C_a + C_b + AC + BC = 2CR + AB$. Сложивъ найденныя равенства получимъ: $A_b + A_c + B_a + B_c + C_a + C_b + BC + AC + AB = 2(AP + BQ + CR)$.

106. (Фиг. 20, стран. 263). Положимъ $AB < BC < AC$ въ $\triangle ABC$. $BN = p - BC$, $BH = p - AB$ (II, 99); но $BC > AB$, а потому $BN < BH$. Отложимъ на BH часть $BK = BN$ и проведемъ прямую $KX \parallel OH$ до пересѣченія съ OB въ точкѣ Y ; тогда $\triangle BKY = \triangle O''NB$; слѣдовательно, $KY = O''N$ но $O'H > KY$, а потому $O'H > O''N$. Также можно показать, что $O'H < O'L$.

107. (Фиг. 20, стран. 263). $\angle UAO'' = \angle QCB$ и $\angle QAC = \angle QBC$; но $\angle UAO'' = \angle QAC$, а потому $\angle QCB = \angle QBC$ и слѣд. $QB = QC$. $\angle O''CO''' = d$ и $\angle O''BO''' = d$, а потому окружность, описанная на $O''O'''$, какъ діаметръ, пройдетъ чрезъ B и C и точка Q будетъ ея центромъ. слѣдовательно, Q отстоитъ равно отъ O'' , B , C и O''' .

108. $DE = 3BC$, а потому $AE = 3AC$ и $AD = 3AB$. Но $AF = AG = \frac{1}{2}$ периметра $\triangle ABC$ (II, 99). Кругъ будетъ вписаннымъ для $\triangle ADE$, а потому $AF + DE = \frac{1}{2}$ периметра $\triangle ADE = \frac{3}{2}$ периметра $\triangle ABC = 3AF$; откуда $DE = 2AF$.

109. Проведемъ равнодѣлящія AO , BO и CO угловъ равносторонняго $\triangle ABC$; тогда O будетъ центромъ вписаннаго круга. Изъ равенства $\triangle AOB$, BOC и COA слѣдуетъ, что $AO = BO = CO$, т.-е. O будетъ также центромъ описаннаго круга. Опустивъ $\perp OD$ на BC , найдемъ, въ $\triangle BOD$, что $\angle OBD = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2}d$, а $\angle BOD = \frac{2}{3}d$, т.-е. $\angle BOD = 2\angle OBD$; поэтому $OB = 2OD$ (I, 80).

110. $\angle COD = \angle OAC + \angle OCA = \frac{1}{2}(A + C)$ и $\angle BOE = d - \angle OBE = \frac{1}{2}(A + B + C) - \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}(A + C)$; откуда $\angle BOE = \angle COD$.

111. Проведемъ діаметръ BOF и продолжимъ равнодѣлящую $\angle B$ до встрѣчи съ AC въ G и съ окружностью въ E . По заданію, $\angle ABE = \angle CBE$, и слѣд. $\cup AE = \cup CE$; уголъ BGD измѣряется $\frac{1}{2}(\cup AB + \cup CE) = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup AE) = \frac{1}{2} \cup BAE$ и $\angle BFE$ измѣряется $\frac{1}{2} \cup BAE$; слѣд. $\angle BGD = \angle BFE$. Поэтому изъ $\triangle BDG$ и BEF , видимъ, что и $\angle DBG = \angle EBF$.

112. Въ кругѣ O вписать $\triangle ABC$; D — середина стороны BC . Проведемъ прямую OD , которая пересѣчетъ меньшую изъ $\cup BC$ въ E , а большую въ F и будетъ перпендикулярна къ BC ; $\cup BE = \cup CE$, а потому $\angle BAE = \angle CAE$; но $AF \perp AE$, а потому AF будетъ равнодѣлящею вѣншаго угла къ $\angle A$.

113. Центръ вписаннаго круга лежитъ на равнодѣлящей угла треугольника, а центръ вѣншаго на равнодѣлящей угла дополнительнаго къ этому углу, которая перпендикулярна къ первой равнодѣлящей.

114. Пусть, въ $\triangle ABC$, окружность J касается стороны BC и продолжений сторонъ AB и AC въ D , F и E . Тогда (II, 99) $JE = \frac{1}{2}$ периметра $\triangle ABC$; но $AE = AF$, $BD = BF$ и $CE = CD$; слѣдоват. $AE - \frac{1}{2}(AE + AF) = \frac{1}{2}$ периметра $\triangle ABC = JE = JF$; поэтому $EA = EJ$ и $\angle AEJ = d$, и слѣдовательно, $\angle EAJ = \frac{1}{2}d$, а $\angle EAF = d$, т.-е. $\triangle ABC$ прямоугольный.

115. O — центръ описаннаго круга около $\triangle ABC$; G — центръ вписаннаго круга въ томъ же \triangle ; равнодѣлящая угла A пересѣкаетъ дугу BC въ точкѣ D . $\cup BD = \cup CD$, а потому и хорда $BD = CD$; кромѣ того имѣемъ: $\angle BGD = \angle BAG + \angle ABG = \frac{1}{2}(A + B)$ и $\angle GBD = \angle GBC + \angle CBD = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(A + B)$; поэтому, въ $\triangle BDG$, сторона $DG = BD$.

116. Пусть O означаетъ центръ круга и D середина дуги BC . Тогда $\angle ADO = \angle ADC - \angle ODC = \angle B - \angle ODC = \angle B - \frac{1}{2}(2d - \angle DOC) = \angle B - d + \frac{1}{2}\angle A = \angle B - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) + \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

117. P ортоцентръ $\triangle ABC$; O центръ описанной окружности около $\triangle ABC$; Q пересѣченіе прямой BO съ окружностью. Опустимъ $\perp OD$ на BC и проведемъ прямыя AQ и CQ . Такъ какъ BQ діаметръ окружности, то $\angle BAQ$ прямой; P ортоцентръ $\triangle ABC$, а потому $CP \perp AB$ и слѣдовательно $\parallel AQ$; также $CQ \parallel AP$. Поэтому $\diamond ABCQ$ будетъ \square , въ которомъ $AP = CQ = 2OD$, такъ какъ $BQ = 2BO$.

118. O центръ описаннаго круга около $\triangle ABC$ (фиг. 21); AD , BE и CF высоты \triangle ; H пересѣченіе высотъ; M , K и L середины $АН$, BC и AC . Въ $\triangle OKL$ и ABH имѣемъ: $\angle OKL = \angle BAH$, $\angle OLK = \angle ABH$ и $KL = \frac{1}{2}AB$, а потому (I, 68) $OK = \frac{1}{2}AH = AM$ и $AM \parallel OK$; слѣд. $\triangle OKM$ будетъ \square , въ которомъ $KM = AO$.

119. Въ $\triangle ABC$ высоты AD , BE и CF пересѣкаются въ точкѣ H . На HA , HB и HC , какъ діаметрахъ, опишемъ окружности, которыя пройдутъ черезъ точки D , E и F . Имѣемъ: $\angle HFD = \angle HBD = \angle HAE = \angle HFE$, т.-е. высота CF дѣлитъ пополамъ $\angle EFD$. Точно то же имѣемъ и относительно другихъ высотъ.

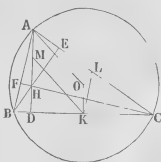
Слѣд. 1. Точка H есть центръ вписаннаго круга въ $\triangle DEF$.

Слѣд. 2. A , B и C центры вневписанныхъ круговъ въ $\triangle DEF$. Такъ, напримѣръ, C будетъ точкою пересѣченія равнодѣлящей $\angle DFE$ съ равнодѣлящею внѣшняго $\angle DEK$, гдѣ EK есть продолженіе FE .

120. Въ $\triangle ABC$ высоты AD , BE и CF пересѣк. въ H ; O центръ описан. круга; AM діаметръ его, пересѣк. EF въ N . На $АН$, какъ діаметръ, опишемъ окружность, кот. пройдетъ черезъ E и F , потому что $\angle AFH = \angle AEN = d$. $\angle AFE = \angle AHE = \angle C = \angle AMB$; слѣд. $\triangle AFN$ и ABM имѣютъ по два соотвѣтственно равныхъ угла и потому $\angle ANF = \angle ABM = d$.

121. AQ діаметръ окружности, описанной около $\triangle ABC$; AD , BE и CF высоты \triangle ; H ортоцентръ; K середина BC . $\angle QBF = d - \angle BFC$; слѣ-

Фиг. 21.



довательно $FC \parallel BQ$; также $CQ \parallel BE$; поэтому въ $\square BHCQ$, точка K середина HQ , т.-е. $KQ=KH$. Очевидно Q, K и H лежатъ на прямой.

122. H ортоцентр $\triangle ABC$. Тогда (II, 121) $HB'=2HE$, $HC'=2HF$; слѣд. $B'C'=2EF=BC$; также $C'A'=CA$ и $A'B'=AB$. Слѣд. $\triangle A'B'C'=\triangle ABC$.

123. O и J центры вписаннаго и описаннаго круговъ $\triangle ABC$, въ которомъ $AC > AB$. Прямая AO пересѣкаетъ окружность J въ P . Опишемъ изъ P окружность радиусомъ PB , кот. пройдетъ чрезъ O и C (II, 114). $\angle FOC = \angle OCB$; слѣд. $\sphericalangle OF = \sphericalangle OB$ и хорда $OF = \text{хордъ } OB$; $\angle FOP = \angle BOP$ и $\angle OPF = \angle OPB$. $\triangle AFP = \triangle ABP$; поэтому $AF = AB$. Также можно показать, что $AE = AC$; слѣд. $\triangle AFE = \triangle ABC$ и $\angle AFE = \angle ABC$. $\triangle AOF = \triangle AOB$, а потому $\angle AFO = \angle ABO = \frac{1}{2}\angle B$ и слѣд. $\angle OFE = \frac{1}{2}\angle B$. Опустимъ \perp -ы OD и OG на BC и EF ; $\triangle OGF = \triangle OBD$, а потому $OG = OD$. Но OD есть радиусъ окружности O , а потому OG есть также радиусъ окружности O . Такъ какъ $OG \perp EF$, то EF будетъ касательная къ окружности O .

124. Окружность можно провести черезъ четыре точки A, B, C и D , когда $\angle ABC + \angle ADC = 2d$ или $\angle BAD + \angle DCB = 2d$.

125. Въ равнобочной трапеціи сумма противоположныхъ угловъ равна $2d$.

126. E, F, G и H точки касанія сторонъ AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$, описаннаго около круга O . Тогда $AD = AH + HD = AE + DG$ и $BC = BF + FC = BE + CG$; откуда $AD + BC = (AE + BE) + (DG + CG) = AB + CD$.

127. Въ $\diamond ABCD$ дано: $AD + BC = AB + CD$. Опишемъ окружность O , касающуюся AB, AD и DC въ M, N и P и допустимъ, что она пересѣкаетъ BC . Проведемъ изъ B касательную къ кругу O въ P и пересѣкающую DC въ Q . Тогда (II, 126) $AD + BQ = AB + DQ$. Вычтя это равенство изъ даннаго, найдемъ: $BC - BQ = CD - DQ = CQ$, что невозможно, а потому BQ должна совпасть съ BC .

128. $ABCD$ описанная трапеція около круга O , гдѣ $AD \parallel BC$. Проведемъ чрезъ O прямую $\parallel BC$, которая пересѣчетъ AB и CD въ E и F . Такъ какъ EF отстоитъ равно отъ BC и AD , то $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$; но $AD + BC = AB + DC$, а потому $AD + BC = \frac{1}{2}$ периметра $\diamond ABCD$ и слѣдовательно, $EF = \frac{1}{4}$ периметра $\diamond ABCD$.

129. ABC, CDE, EFG, GHK, KLM и MNA стороны шестиугольника, касающагося круга O въ B, D, F, H, L и N . Тогда $AB + BC + EF + FG + KL + LM = AN + CD + DE + GH + HK + MN$; отсюда $AC + EG + KM = CE + GK + MA$.

130. Доказательство сходно съ предыдущимъ.

131. Въ $\diamond ABCD$ проведемъ діагонали AC и BD , которая пересѣкнутся въ E и опустимъ $\perp \perp OM$ и ON на AC и BD . $\diamond OMEN$ будетъ прямоугольникомъ и потому $OE = MN$.

132. $\diamond ABCD$ вписанъ въ кругъ. Продолжимъ DC до F и проведемъ равнодѣлящую $\angle BCF$, которая пересѣчетъ окружность въ E . $\angle BCF = 2d - \angle BCD = \angle BAD$ и $\angle BAE = \angle BCE = \frac{1}{2}\angle BCF = \frac{1}{2}\angle BAD$; слѣдовательно, AE будетъ равнодѣлящая $\angle BAD$. Итакъ, равнодѣлящія $\angle \angle BAD$ и BCF пересѣкаются въ точкѣ E на окружности.

133. $\diamond ABCD$ вписанъ въ кругъ O . Проведемъ равнодѣлящія $\angle \angle A$ и C , которыя пересѣкутъ окружность въ P и Q . $\angle BAP = \angle DAP$, а потому $\cup BP = \cup DP$; $\angle BCQ = \angle DCQ$, а потому $\cup BQ = \cup DQ$. Слѣдовательно $\cup PBQ = \cup PDQ$, т.-е. PQ диаметръ круга O .

134. $ABCD$ вписанный четырехугольникъ; AMB , BNC , CGD и DQA прилежащіе сегменты. Сумма угловъ, вписанныхъ въ эти сегменты, измѣряется полусуммою дугъ: $3AD$, $3CD$, $3BC$ и $3AB$ или суммою трехъ полуокружностей; но центральный \angle , соответствующій полуокружности, равенъ $2d$, а потому искомая сумма $= 3 \cdot 2d = 6d$.

135. $ABCD$ вписанный \diamond въ кругѣ O , въ кот. $\angle \angle A$ и C прямые; NAM , MBQ , QCP и PDN касательныя къ кругу O . Линія BOD прямая, а потому $MQ \parallel NP$, т.-е. $\diamond MNPQ$ трапеція. Она будетъ равнобочною, когда $AB = BC$.

136. Пусть $ABCD$ вписанная трапеція въ кругѣ, въ которой $BC \parallel AD$; NAM , MBQ , QCP и PDN касательныя къ кругу. $NA = ND$ (II, 23), а изъ равенства $\triangle \triangle AMB$ и CPD слѣдуетъ, что $AM = DP$; поэтому $NA + AM = ND + DP$ или $NM = NP$.

137. Сумма $\angle \angle DFG$ и GED измѣряется полусуммою дугъ DEC , AB и AD или полусуммою дугъ DEC , AC и AD , которыя вмѣстѣ составляютъ окружность; поэтому $\angle DFG + \angle GED = 2d$.

138. Въ $\diamond ABCD$ равнодѣлящія $\angle \angle A$ и B пересѣкаются въ точкѣ M ; равнодѣлящія $\angle \angle B$ и C въ N ; равнодѣлящія $\angle \angle C$ и D въ P и равнодѣлящія $\angle \angle A$ и D въ Q . $\angle MQP + \angle MNP = (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D) + (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C) = \frac{1}{2}(A + B + C + D) = 2d$. То же самое будетъ и для равнодѣлящихъ вышнихъ угловъ.

139. $\diamond ABCD$ вписанъ въ кругъ; E пересѣченіе діагоналей AC и BD . Опустимъ $\perp EF$ на CD и продолжимъ его до пересѣченія съ AB въ G . $\angle GEC = \angle ECF + \angle EFC$; но $\angle CEB = d = \angle EFC$ и $\angle GEB = d - \angle AEG = d - \angle FEC = \angle FCE = \angle ABD$, т.-е. $BG = EG$. Также $AG = EG$, т.-е. G середина AD .

140. Проведемъ прямыя: PQ , pq , rs и RS . Тогда $\angle PRS = 2d - \angle PQS = \angle Ppq = 2d - \angle rpq = \angle rsq = 2d - \angle rsS$ или $\angle rRS + \angle rsS = 2d$, т.-е. черезъ точки R , r , s и S можно провести окружность.

141. $OM \perp AB$ пересѣкаетъ AC и BD въ P и Q ; $ON \perp CD$ пересѣкаетъ AC и BD въ R и S . Тогда $\angle OQS = \angle BQM = d - \angle ABD$ и $\angle ORP = \angle NRC = d - \angle ACD$; но $\angle ABD = \angle ACD$, а потому $\angle PQS = PRO$, т.-е. около $\diamond PQSR$ можно описать окружность.

142. $ABCD$ данный четырехугольникъ; O , O' , O'' и O''' центры окружностей, касающихся AB , BC , CD и DA . $\angle AOB = 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}A) - (90^\circ - \frac{1}{2}B) = \frac{1}{2}(A + B)$; также $\angle CO''D = \frac{1}{2}(C + D)$. Слѣдовательно $\angle AOB + \angle CO''D = \frac{1}{2}(A + B + C + D) = 180^\circ$, т.-е. O , O' , O'' и O''' лежатъ на окружности.

143. $\angle ABE = \frac{1}{2}(\angle O'OO'' + \angle OO'O')$ и $\angle ADE = \angle OO'O'' + \angle O'AD = \angle OO'O'' + (d - \frac{1}{2}\angle OO'O'') = d + \frac{1}{2}\angle OO'O''$; слѣдоват. $\angle ABE + \angle ADE = d + \frac{1}{2}(\angle OO'O'' + \angle O'OO'' + \angle OO'O') = d + \frac{1}{2} \cdot 2d = 2d$.

144. Положимъ, что окружности, имѣющія хордами стороны $\diamond ABCD$, пересѣкаются послѣдовательно въ точкахъ: M , N , P и Q (внутри); $\angle QMN =$

$=4d - (\angle AMQ + \angle AMN)$; но $\angle AMQ = 2d - \angle ADQ$, а $\angle AMN = 2d - \angle ABM$, а потому $\angle QMN = \angle ADQ + \angle ABN$. Также $\angle NPQ = \angle QDC + \angle NBC$; откуда $\angle QMN + \angle NPQ = \angle ADC + \angle ABC = 2d$.

145. Пусть въ $\diamond ABCD$ точки E, F, G, H, K и L середины AB, BC, CD, DA, BD и AC . Опишемъ окружности FKG и ELF , кот. пересѣкутся въ M ; тогда $\angle EMF = \angle ELF = \angle ABC$, $\angle KMF = 2d - \angle KGF = 2d - \angle DBC$; слѣд. $\angle EMK = 2d - \angle ABD = 2d - \angle ENK$ и потому окружность, проходящая чрезъ E, H и K , пройдетъ чрезъ M . Также покажемъ, что окружность HGL пройдетъ черезъ M .

146. Опустимъ $\perp EF, EG, EH$ и EK на AB, BD, DC и CA . Соединивъ точки E и B , найдемъ, что $\triangle EBF = \triangle EBG$ и слѣд. $EF = EG$. Также докажемъ, что $EG = EH$ и $EH = EK$.

147. $\angle \angle K$ и N прямые, а потому можно описать окружность около $\diamond EKAN$; тогда $\angle NKE = \angle NAE = \angle DAC$. Также можно описать окружность около $\diamond EKBL$; тогда $\angle EKL = \angle EBL = \angle DAC$. Слѣдов. $\angle NKL = 2\angle DAC$. Также $\angle LMN = 2\angle BDA = 2(d - \angle DAC)$; откуда $\angle NKL + \angle LMN = 2d$ и потому около $\diamond KLMN$ можно описать окружность.

148. $\diamond ABCD$ вписанъ въ кругъ; продолжимъ стороны AB и DC до пересѣченія въ E и стороны AD и BC въ F . Равнодѣлящая $\angle E$ пересѣкаетъ окружн. въ точкахъ M и P , а равнодѣлящая $\angle F$ пересѣкаетъ окружн. въ точкахъ Q и N ; T — точка пересѣченія этихъ равнодѣлящихъ. Такъ какъ EP и FN суть равнодѣлящія $\angle \angle E$ и F , то $\cup AP - \cup BM = \cup DP - \cup MC$ и $\cup AN - \cup DQ = \cup BN - \cup CQ$; сложивъ почленно эти равенства, найдемъ, что $\cup NP - \cup BM - \cup DQ = \cup DP + \cup BN - \cup MQ$ или $\cup NP + \cup MQ = \cup PQ + \cup MN$. Отсюда слѣдуетъ, что $\angle TNP$ и NTM равны, какъ имѣющіе одинаковую мѣру, т.-е. $EP \perp FN$.

149. $\angle B + \angle DJE = 2d$ и $\angle C + \angle FJE = 2d$; слѣд. $\angle B + \angle C + \angle DJE + \angle FJE = 4d$. Но $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$, а потому $\angle DJE + \angle FJE = 2d + \angle A$. Также $\angle DJE + \angle FJE + \angle DJF = 4d$; тогда $2d + \angle A + \angle DJF = 4d$ или $\angle A + \angle DJF = 2d$, т.-е. A лежитъ на окружности O .

150. BD пересѣчетъ окружность AED въ F ; тогда $\angle DFE = 2d - \angle DAC = 2d - \angle ACB = 2d - \angle BFE$; слѣд. $\angle DFE + \angle BFE = 2d$, т.-е. BFD принявъ, а потому BD проходитъ чрезъ F .

151. ACB и BCD пересѣкающіяся окружности. Проведемъ въ первой окружности хорду CFH , пересѣкающую другую окружность въ F ; проведемъ хорду CEG во второй окружности подъ тѣмъ же угломъ къ BC , пересѣкающую первую окружность въ E . Такъ какъ $\angle BCH = \angle BCG$, то $BH = BE$ и $BF = BG$. Также $\angle BGE = \angle BFH$ и $\angle BEG = \angle FHB$, а потому $\triangle BFH = \triangle BEG$; откуда $FH = EG$.

152. $\angle BAD + \angle BCD = 2d$, но $\angle BAD = \angle PRD$ и $\angle BCD = \angle DRQ$; слѣдовательно, $\angle PRD + \angle DRQ = 2d$, т.-е. линія PRQ будетъ прямою.

153. $\angle AFC = \angle BKC = 2d - \angle AKC$; слѣдовательно, около $\diamond AFCK$ можно описать окружность. Тогда $\angle KFC = \angle BAC = \angle BCE$, т.-е. $KF \parallel BC$.

154. Продолжимъ AB до D и AC до E . Равнодѣлящія $\angle \angle DBC$ и ECB пересѣкаются въ G ; Q центръ окружности BCG . $\angle BGC = \frac{1}{2} \angle BQC$ и

$\angle BGC + \angle GCB + \angle CBG = 2d$; $\angle GCB = \frac{1}{2}\angle BCE$ и $\angle CBG = \frac{1}{2}\angle CBD$; слѣдовательно, $\angle BQC + \angle BCE + \angle CBD = 4d = (\angle BCE + \angle BCA) + (\angle CBD + \angle CBA)$. Откуда $\angle BQC = \angle BCA + \angle CBA = 2d - A$, а потому около $\diamond ABQC$ можно описать окружность, т.-е. Q лежитъ на окружности, описанной около $\triangle ABC$.

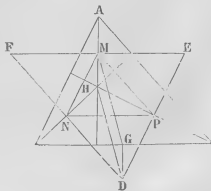
155. Равнодѣлящая острыхъ $\angle E$ и F пересѣкаются въ H . Пусть равнодѣлящая острого $\angle E \parallel$ равнодѣл. тупого $\angle F$; тогда $EH \perp FH$ и слѣд. $\angle FAE = \angle AKE + \angle AEK = \angle FLK + \angle KEC = \angle ELC + \angle LEC = \angle BCD$ и потому, въ $\diamond ABCD$, $\angle A + \angle C = 2d$, т.-е. около $ABCD$ можно описать окружн. Равнодѣлящая $\angle CGD$ пересѣкаетъ AB , EH и CD въ P , R и Q ; тогда $\angle EPQ = \angle BAG + \angle PGA = \angle BDC + \angle DGQ = \angle CQG$ и $\angle PER = \angle QER$; слѣд. PQ и ER взаимно-перпендикулярны и потому прямая PQ параллельна равнодѣлящей тупого $\angle E$.

156. Стороны AB , BC , CD и DA въ $\diamond ABCD$ касаются окружности O въ точкахъ E , F , G и H . Продолжимъ BA и CD до встрѣчи съ AD въ P и съ BC въ Q ; PE и PG касательныя къ кругу O , а потому $PE = PG$ и $EG \perp$ къ PO , т.-е. къ равнодѣлящей $\angle P$; также $FH \perp$ къ равнодѣлящей $\angle Q$; но равнодѣлящія $\angle P$ и Q взаимно-перпендикулярны (II, 148), а потому $EG \perp FH$.

157. Пусть три прямыя пересѣкаются въ A , B и C , а четвертая пересѣкаетъ прямыя AB , BC и CA въ F , D и E . Опишемъ окружности около $\triangle ABC$ и $\triangle DEC$, которыя пересѣкутся въ P ; тогда $\angle APC = \angle ABC$ и $\angle AFD = \angle ABC + \angle FDB = \angle ABC + \angle CDE = \angle APC + \angle CPE = \angle APE$. Слѣдовательно, окружность AFE пройдетъ черезъ P . Также $\angle PBC = \angle PAC$ и $\angle PFE = \angle PAE$; слѣд. $\angle PBC = \angle PFD$, т.-е. окружность, описанная около $\triangle BFD$, пройдетъ черезъ P .

158. Пусть периметръ $\diamond EFGH$, вписаннаго въ данный $\diamond ABCD$, будетъ наименьшій, гдѣ E , F , G и H лежатъ на AB , BC , CD и DA . На AB нельзя найти никакой другой точки P , для которой $HP + FP$ было менѣе $HE + FE$, потому что тогда бы периметръ $\diamond FEHG$ не былъ наименьшимъ; поэтому (I, 431) $\angle HEA = \angle FEB$. Также $\angle EFB = \angle CFC$, $\angle FGC = \angle HGD$ и $\angle GHD = \angle AHE$. Но сумма всѣхъ угловъ при E , F , G и H равна $8d$; сумма угловъ $\diamond EFGH = 4d$, а потому $2\angle AHE + 2\angle AEN + 2\angle CFG + 2\angle CGF = 4d$ или $\angle AHE + \angle AEN + \angle CFG + \angle CGF = 2d$. Но въ $\triangle AHE$ и $\triangle CFG$ сумма угловъ равна $4d$, а потому $\angle HAE + \angle GCF = 2d$, т.-е. около $\diamond ABCD$ можно описать окружность.

Фиг. 22.



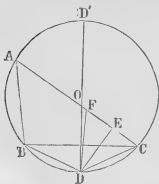
159. Фигуры $MNPE$ и $MNDP$ (фиг. 22) параллелограммы; слѣд. $EP = MN$ и $PD = MN$; но изъ $\triangle AHB$: $MN = \frac{1}{2}AB$, а потому $ED = AB$. Точно

такъ же $EF=BC$ и $DE=AC$; слѣд. $\triangle ABC=\triangle DEF$ и $\angle D=\angle A$, $\angle E=\angle B$ и $\angle F=\angle C$. 2) MH , NH и PH перпендикулярны, возставленные изъ серединъ сторонъ $\triangle DEF$, а потому H центръ описаннаго круга около $\triangle DEF$, и обратно. 3) Пусть R радиусъ описаннаго круга около $\triangle ABC$ или $\triangle DEF$ и G середина BC . Такъ какъ $AM=$ и $\parallel DG$, то $DH=GM=R$ (II, 118); N есть середина стороны BH въ $\triangle DBH$ и потому $DB=DH$; также P есть середина HC въ $\triangle DHC$, а потому и $DH=DC$. Слѣд. D центръ окружности, проходящей черезъ B , H и C , радиусъ которой равенъ радиусу описаннаго круга около $\triangle ABC$.

160. O центръ круга вписаннаго въ $\triangle ABC$. BE пересѣкаетъ DF въ K . $\angle ADF=\angle ACF=\frac{1}{2}\angle ACB$; также $\angle ADE=\frac{1}{2}\angle ABC$ и $BDE=\frac{1}{2}\angle BAC$. $\angle FKE$, внѣшній для $\triangle EKD$, равенъ $\angle ADF+\angle ADE+\angle BED=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC+\angle BAC)=d$, т. е. $BE \perp FD$. Также $AD \perp FE$ и $CF \perp DE$, т. е. точка. O будетъ ортоцентръ для $\triangle DEF$.

161. $\triangle ABC$ вписанъ въ кругъ (фиг. 23), котораго діаметръ $DD' \perp BC$;

Фиг. 23.



опустимъ $\perp DE$ на большую изъ сторонъ AB и AC , напр. AC , и отложимъ на ней часть $AF=AB$. $\angle CAD=\angle BAD$ и слѣд. $\triangle AFD=\triangle ABD$; откуда $FD=DB=DC$, а потому $EF=CE$ и $AC \perp AB=AC \perp AF=2AE$ или $2CE$. То же самое будетъ, если опустимъ \perp изъ D' на AC .

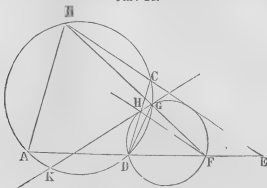
162. $\triangle BAB'=\triangle CAC'$; откуда $BB'=CC'$ и $\angle AB'B=\angle ACC'$. Точно такъ же $\triangle CBC'=\triangle ABA'$ и слѣд. $CC'=BB'=AA'$. Пусть G точка пересѣченія прямыхъ BB' и CC' , а M и N точки пересѣченія BB' съ AC и CC' съ AB . Соединивъ G съ A и A' , увидимъ въ $\triangle AMB'$ и GMC , что $\angle MGC=\angle B'AM=60^\circ$ и $\angle C'GB=60^\circ$, а потому, если опишемъ окруж. около $\triangle AB'C$ и $AC'B$, то онѣ пройдутъ черезъ точку G ; тогда $\angle AGB=180^\circ-\angle C'=120^\circ$ и $\angle AGC=180^\circ-\angle B'=120^\circ$, а потому и $\angle BGC=120^\circ$, т. е. окружность, описанная около $\triangle BA'C$, пройдетъ также черезъ точку G . Слѣд. $\angle BGA'=\angle BCA'=60^\circ$ и $\angle AGB'=\angle ACB'=60^\circ$; изъ равенства $\angle AGB'$ и BGA' заключаемъ, что линія AGA' будетъ прямою.

163. Въ кругъ вписанъ равносторонній $\triangle ABC$; проведемъ хорду BD , пересѣкающую бокъ AC , и хорду $CE \parallel DA$, которая пересѣчетъ BD въ F . $\triangle BEF$ и CDF равносторонніе, потому что $\angle BEC=\angle BAC=\frac{2}{3}d$, $\angle EBF=\angle EBA+\angle ABD=\angle DBC+\angle ABD=\angle ABC=\frac{2}{3}d=\angle ECD$ и $\angle FDC=\angle BAC=\frac{2}{3}d$; отсюда $BF=BE$ и $DF=DC$, $\cup AB=\cup AC$ и $\cup AE=\cup CD$; а потому $\cup BE=\cup AD$ и слѣд. хорда BE =хордѣ AD , а $BD=BF+FD=DA+DC$.

164. (Фиг. 24). $\angle GDH=\angle GBC=\angle GFH$; слѣд. $\diamond DHGF$ вписуемъ въ кругъ, а потому $\angle DGH$ или $\angle DGK=\angle DFH=\angle AEB$ постоянный, гдѣ

E точка пересѣченія продолженныхъ сторонъ AD и BC ; слѣд. и дуга DK будетъ та же, какъ бы ни брали точку F , т.-е. точка K неподвижна.

Фиг. 24.



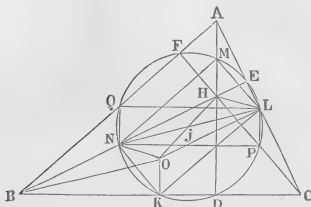
165. Сумма разстояній отъ D до E и F должна быть наименьшая, а потому (I, 431) $\angle FDB = \angle EDC$. Также $\angle DEC = \angle AEF$ и $\angle EFA = \angle BFD$. Отсюда слѣдуетъ, что равнодѣляющіе угловъ $\triangle DEF$ будутъ \perp къ сторонамъ $\triangle ABC$. Пусть O точка ихъ встрѣчи. Проведемъ OA , OB и OC и опишемъ окружность около $\diamond AFOE$ ($\angle \angle AEO$ и $\angle AFO$ прямые); тогда $\angle FAE = \angle OFE + \angle OEF = \frac{1}{2}(\angle DFE + \angle DEF) = \frac{1}{2}(2d - \angle FDE) = \angle EDC$. Также $\angle ECD = \angle EFA$. Но $\angle OAE = \angle OFE = d - \angle AFE = d - \angle ACB$; поэтому $OA \perp BC$ и слѣд. совпадаетъ съ OD , т.-е. линия AOD будетъ прямая. Также линии BOE и COF будутъ прямыми. Отсюда видимъ, что D , E и F будутъ основаниями \perp -въ изъ A , B и C на противоположныя стороны.

166. Въ $\triangle ABC$ опущены \perp -ы AL , BM и CN на стороны \triangle ; ND и MG \perp -ы на BC ; LE и NH \perp -ы на CA ; MF и LK \perp -ы на AB . Окружность, описанная на BC , какъ діаметръ, пройдетъ чрезъ M и N ; слѣд. $\angle AMN = \angle ABC$. Окружность, описан. на MN , какъ діаметръ, пройдетъ чрезъ F и H ; слѣд. $\angle AFH = \angle AMN = \angle ABC$ и потому $FH \parallel BC$. Также $DK \parallel CA$ и $EG \parallel AB$. Окружность, описан. на AL , какъ діаметръ, пройдетъ чрезъ K и E ; слѣд. $\angle AEK = \angle ALK = \angle ABC$, а потому $\angle AFH = \angle AEK$ и слѣд. около $\diamond FKEN$ можно описать окружность. Окружность, описанная на CN , какъ діаметръ, пройдетъ чрезъ H и D ; тогда $\angle CHD = \angle CND = \angle ABC$ и $\angle AHF = \angle ACB$; слѣд. $\angle FHD = \angle BAC$ и $\angle BKD = \angle BAC$, а потому окружность $FHEK$ также пройдетъ и черезъ D . Подобнымъ образомъ можно показать, что эта окружность пройдетъ и черезъ G . Слѣдовательно шесть точекъ: D , E , F , G , H и K лежатъ на окружности.

167. 1) Около $\triangle BCE$ и ADE (фиг. 25) опишемъ окружности, которыя пересѣкутся въ K ; тогда въ $\diamond BCEK$: $\angle KBC + \angle KEC = 2d$ и $\angle KBC + \angle KBF = 2d$; слѣд. $\angle KBF = \angle KEC$. Въ $\diamond ADEK$: $\angle KAD + \angle KEC = 2d$ и $\angle KAF + \angle KAD = 2d$; поэтому $\angle KAF = \angle KEC = \angle FVK$; слѣд. окружность, проходящая черезъ A , F и K , пройдетъ и черезъ B . Такъ же $\angle KDC = \angle KAE$ (или $\angle KAB$) $= \angle KFB$ и потому окруж., проходящая

точку F , потому что $\angle QFP$ есть прямой; эти окружности, имѣя общій діаметръ NL , совпадаютъ. Окружность, проходящая черезъ точки D, E, F, K, L, Q, M, N и P наз. *окружностью девяти точекъ*. Означимъ центръ этой окружности буквою J , т.-е. середину NL . Въ $\triangle \triangle ABH$ и

Фиг. 26.

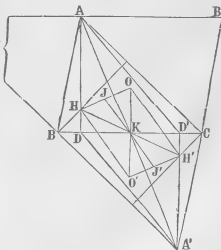


KOL углы, соответственно, равны и стороны $AB=2KL$ и слѣд. $BH=2OL$ или $OL=\frac{1}{2}BH=HN$. Кромѣ того $OL \parallel HN$ и слѣд. фигура $LONH$ будетъ параллелограммъ, гдѣ J середина его діагонали OH . Такъ какъ $OL = \frac{1}{2}BN$, то $NL=OB$ или $JN=\frac{1}{2}OB$.

169. O центръ круга описаннаго около $\triangle ABC$; P ортоцентръ; N середина OP и будетъ неподвижна. Радиусъ окружности девяти точекъ $= C' = \frac{1}{2}$ радиуса описаннаго круга (II, 168) и слѣд. величина постоянная, а потому окружность девяти точекъ будетъ та же для всѣхъ треугольниковъ. Но окружность девяти точекъ проходитъ чрезъ середины сторонъ \triangle , а потому середины сторонъ \triangle -въ лежатъ на одной и той же постоянной окружности.

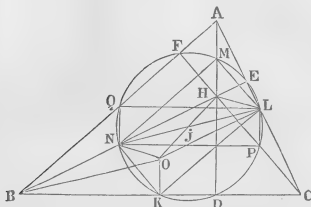
170. H и H' (фиг. 27) точки пересѣченія высотъ въ $\triangle \triangle ABC$ и $A'BC$; O и O' центры описанныхъ окружностей около $\triangle \triangle ABC$ и $A'BC$; K середина BC ; J

Фиг. 27.



точку F , потому что $\angle QFP$ есть прямой; эти окружности, имѣя общій діаметръ NL , совпадаютъ. Окружность, проходящая черезъ точки D, E, F, K, L, Q, M, N и P наз. *окружностью девяти точекъ*. Означимъ центръ этой окружности буквою J , т.-е. середину NL . Въ $\triangle \triangle ABH$ и

Фиг. 26.

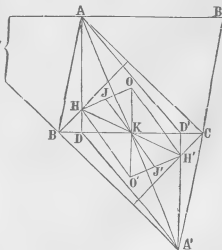


KOL углы, соответственно, равны и стороны $AB=2KL$ и слѣд. $BH=2OL$ или $OL=\frac{1}{2}BH=HN$. Кромѣ того $OL \parallel HN$ и слѣд. фигура $LONH$ будетъ параллелограммъ, гдѣ J середина его діагонали OH . Такъ какъ $OL = \frac{1}{2}BN$, то $NL=OB$ или $JN=\frac{1}{2}OB$.

169. O центръ круга описаннаго около $\triangle ABC$; P ортоцентръ; N середина OP и будетъ неподвижна. Радиусъ окружности девяти точекъ $= \frac{1}{2}C'$ радиуса описаннаго круга (II, 168) и слѣд. величина постоянная, а потому окружность девяти точекъ будетъ та же для всѣхъ треугольниковъ. Но окружность девяти точекъ проходитъ чрезъ середины сторонъ \triangle , а потому середины сторонъ \triangle -въ лежатъ на одной и той же постоянной окружности.

170. H и H' (фиг. 27) точки пересѣченія высотъ въ $\triangle \triangle ABC$ и $A'BC$; O и O' центры описанныхъ окружностей около $\triangle \triangle ABC$ и $A'BC$; K середина BC ; J

Фиг. 27.



и J' середины OH и $O'H'$, т.-е. центры окружностей 9-ти точек для $\triangle ABC$ и $A'BC$. Фигура $ADA'D'$ параллелограммъ; слѣд. $KD = KD'$. $\triangle ABC = \triangle A'BC$; слѣд. $HD = H'D'$, $OK = O'K$ и $\angle HDK = \angle H'D'K$; откуда $HK = H'K$ и слѣд. $\diamond OHO'H'$ будетъ параллелограммъ, по свойству котораго точки J , K и J' лежатъ на прямой, а потому окружности девяти точекъ для $\triangle ABC$ и $A'BC$ проходятъ чрезъ K и касаются между собою въ этой точкѣ.

171. $A'P = AO$, $B'P = BO$ и $C'P = CO$ (II, 159); слѣд. P будетъ центръ окружности $A'B'C'$; но $A'P = A'C$ и $B'P = B'C$; слѣд. $\diamond A'PB'C$ будетъ ромбъ, а потому $PC \perp A'B'$ и $A'B' \parallel AB$. Также $B'C' \parallel BC$ и $C'A' \parallel CA$. Слѣд. $A'O \perp B'C'$, $B'O \perp A'C'$ и $C'O \perp A'B'$, а потому O будетъ ортоцентромъ $\triangle A'B'C'$. Такъ какъ $CA' = CB' = CP$, то C будетъ центръ окружн., описан. около $\triangle A'PB'$. Также A и B центры окружн., описан. около $\triangle B'PC'$ и $C'PA'$. Рассмотримъ $\triangle BPC$, въ кот. точка A ортоцентръ его и A' центръ описаннаго круга около него; поэтому $AO = \frac{1}{2}A'B'$ и слѣдовательно, AA' дѣлитъ OP пополамъ; поэтому окружность 9 точекъ имѣть центръ въ серединѣ AA' или OP , а радиусъ $= \frac{1}{2}A'P = \frac{1}{2}R$, гдѣ R радиусъ описаннаго круга около $\triangle ABC$. Рассмотримъ $\triangle B'OC'$. Его ортоцентръ A' ; A центръ описанной окружности около него; поэтому центръ окружности 9-ти точекъ будетъ въ серединѣ OP и радиусъ ея $= \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}R$. Наконецъ рассмотримъ $\triangle A'B'C'$. Ортоцентръ его O ; центръ описаннаго круга около $\triangle A'B'C'$ будетъ P и радиусъ $= A'P = R$. Итакъ, 8 треугольниковъ имѣютъ ту же окружность девяти точекъ.

172. 1) Центры O и O' (фиг. 20) круговъ лежатъ на равнодѣлящей $\angle A$, кот. пересѣкаетъ окружность J въ точкѣ P . $\triangle OCO'$ прямоугольный, гдѣ $\angle OCO' = d$; $\angle BCP = \angle BAP = \frac{1}{2}A$ и слѣд. $\angle OCP = \angle OCB + \angle BCP = \frac{1}{2}(A + C)$; $\angle POC = \angle OAC + \angle OCA = \frac{1}{2}(A + C)$; откуда $\angle POC = \angle OCP$ и $\angle PO'C = \angle PCO'$, а потому $OP = PC = O'P$, т.-е. P середина OO' .

2) $\angle OBO'$ и OCO' прямые; поэтому $\angle BOC + \angle BO'C = 2d$, т.-е. $\diamond BOCO'$ вписуемый въ кругъ, котораго центръ въ P , потому что $OP = O'P$ (1°).

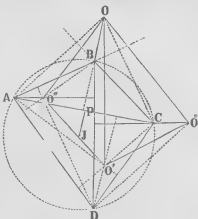
3) Продолжимъ PJ до пересѣченія съ окружностью описаннаго круга въ Q ; прямая BO'' пересѣкаетъ эту окружность въ T , а прямая QT пересѣкаетъ $O'O''$ въ U . $\angle O''TU = \angle QCB = \angle QPC = \angle APC - \angle APQ = B - \frac{1}{2}(B - C) = \frac{1}{2}(B + C)$; $\angle BO''C = 2d - \angle O''BC - \angle BCO'' = 2d - \frac{1}{2}B - (d + \frac{1}{2}C) = d - \frac{1}{2}(B + C)$; откуда $\angle O''TU + \angle TO''U = d$ и слѣд. $\angle TUO'' = d$, т.-е. $QU \perp CO''$. Такъ какъ $TO'' = TC$ (2°), то U есть середина CO'' и слѣдовательно $QO'' = QC = QB$. Точно такъ же докажемъ, что $QC = QB = QO'''$, и слѣд. окружность, описанная изъ Q радиусомъ QC , пройдетъ черезъ O''' , B , C и O'' .

173. A , B , C и D точки на окружности J (фиг. 28); O , O' , O'' и O''' точки пересѣченія высотъ въ $\triangle ABC$, ACD , ABD и CBD . Опустимъ $\perp JP$ на AC ; тогда (II, 118) $OB = 2JP = O'D$ и слѣд. $\diamond OBDO'$ будетъ параллелограммъ, а потому $OO' = \frac{1}{2}BD$ и $\parallel BD$. Подобнымъ образомъ покажемъ, что $O'O'' = \frac{1}{2}AC$ и $\parallel AC$; слѣд. въ $\diamond \diamond ABCD$ и $OO'O''O'''$ діагонали равны и бока соответственно параллельны, а потому эти $\diamond \diamond$ равны между собою;

◇ $ABCD$ вписуемъ въ кругъ, а потому и ◇ $OO'O''O'''$ также вписуемъ въ кругъ.

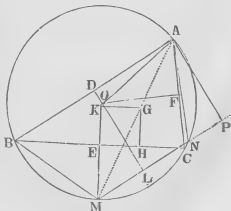
174. На окружности даны четыре точки: A, B, C и D ; E, F, G и H центр' вписанныхъ круговъ въ $\triangle BCD, CDA, DAB$ и BAC . Раздѣлимъ пополамъ дуги: AB, BC, CD и DA въ K, L, M и N . Точки A, G, H и B лежатъ на окружности (II, 115), которой центръ K ; также L центръ окружности $BHEC$; M окружности $CEFD$ и N окружности $DFGA$. $\sphericalangle AK = \sphericalangle BK$, а потому MK будетъ равнодѣлящая $\sphericalangle AMB$; также MK будетъ равнодѣлящая $\sphericalangle LKH$ и $\sphericalangle LKG$; но $KG = CH$, а потому KM дѣлитъ пополамъ HG и перпендикулярна къ ней. Также KM дѣлитъ EF пополамъ и перпендикулярна къ ней; LN дѣлитъ пополамъ FG и EH и перпендикулярна къ нимъ. Слѣд. $EFGH$ прямоугольникъ и точка O пересѣченія KM съ LN равно отстоитъ отъ E, F, G и H .

Фиг. 28.



175. Около $\triangle ABC$ (фиг. 29) опишемъ кругъ O ; опустимъ $\perp \perp OD, OE$ и OF на AB, BC и AC ; $\perp OE$ продолжимъ до пересѣченія съ окружностью въ M . Пусть G центръ вписаннаго круга.

Фиг. 29.

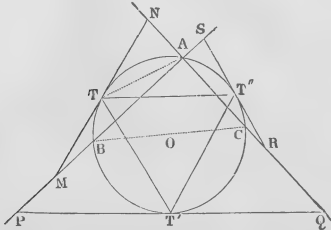


Опустимъ $\perp \perp GH$ и GK на BC и OM ; проведемъ хорду $MN \parallel BA$; опустимъ $\perp \perp AP$ и OL на MN . $\triangle OML = \triangle OFA$, потому что $OM = OA$ и $\sphericalangle AOF = \sphericalangle B = \sphericalangle MOL$; отсюда $OL = OF$. $\triangle KMG = \triangle ANP$, потому что $MG = MB = AN$; $\sphericalangle KMG = \sphericalangle ANP = \frac{1}{2}(C - B)$ (II, 116) и $\sphericalangle NAP = \sphericalangle ANM - d = \sphericalangle C + \frac{1}{2}\sphericalangle A - d = \frac{1}{2}(C - B)$; слѣдовательно, $AP = KM$. Но $AP = DL = OD + OL = OD + OF$ и $KM = KE + EM = GH + OM - OE$; слѣд. $OD + OF = GH + OM - OE$ или $OD + OE + OF = GH + OM$, гдѣ GH есть радиусъ вписаннаго круга, а OM радиусъ описаннаго.

176. Около $\triangle ABC$ (фиг. 30) описанъ кругъ, кот. центръ J ; O, O', O'', O''' центры вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ; R, r, r_a, r_b, r_c радиусы

$\cup TB = \frac{1}{2} \cup TB$, или $\cup TB = \frac{1}{2} \cup AT$ или $\cup AT = \frac{2}{3} \cup AB$. Точно такъ же $\cup AT'' = \frac{2}{3} \cup AC$ и $\cup AT + \cup AT'' = \cup TT'' = \frac{2}{3} (\cup AB + \cup AC) = \frac{2}{3} \cup BC = \frac{2}{3} \cdot 180^\circ = 120^\circ$; слѣд. хорда TT'' будетъ бокомъ равносторонняго \triangle , вписан-

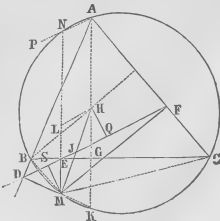
Фиг. 31.



наго въ кругѣ. Точно такъ же хорды TT' и TT'' будутъ бока равносторонняго $\triangle TT'T''$.

178. $\triangle ABC$ (фиг. 32) вписать въ кругъ. Изъ точки M дуги BC опустимъ $\perp \perp MD$, ME и MF на AB , BC и AC ; ME продолжимъ до пересѣченія съ окружн. въ N ; проведемъ прямую ANP . $\diamond MEFC$ и $MNAC$ вписуемы въ кругъ, а потому $\angle ACM + \angle MEF = 2d$ и $\angle ACM + \angle MNA = 2d$; откуда $\angle MEF = \angle MNA$, т.-е. $EF \parallel AN$. $\diamond MDBE$ вписуемый въ кругъ, а потому $\angle MED = \angle MBD = 2d - \angle MBA = 2d - \angle MNA$ или $\angle MED = \angle MNP$ и слѣд. $DE \parallel NP$. Отсюда выходить, что ED и EF параллельны AP или, другими словами, линия DEF будетъ прямая.

Фиг. 32.



179. ABC данный \triangle ; O'' и O''' центры вневписанныхъ круговъ, противолечащихъ B и C ; $O''D$ и $O''E \perp$ -ы на BA и BC ; $O'''F$ и $O'''G \perp$ -ы на CA и CB . Положимъ прямыя ED и GF пересѣкаются въ A' . Тогда

$\angle BDE = \angle BO''E = 90^\circ - \frac{B}{2}$; слѣд. $\angle ADA' = 90^\circ + \frac{B}{2}$; также $\angle AFA' = 90^\circ + \frac{C}{2}$;

поэтому $\angle A' = 360^\circ - (180^\circ + \frac{B+C}{2} + A) = 90^\circ - \frac{A}{2}$,

также $\angle A'' = 90^\circ - \frac{A'}{2} = 45^\circ + \frac{A}{4}$; $\angle B'' = 45^\circ + \frac{B}{4}$ и $\angle C'' = 45^\circ + \frac{C}{4}$;

$\angle A''' = 90^\circ - \frac{A''}{2} = 67\frac{1}{2}^\circ - \frac{A}{8}$, $\angle B''' = 67\frac{1}{2}^\circ - \frac{B}{8}$, $\angle C''' = 67\frac{1}{2}^\circ - \frac{C}{8}$;

.....
 $\angle A_n = K + (-1)^n \cdot \frac{A}{2^n}$, $\angle B_n = K + (-1)^n \cdot \frac{B}{2^n}$ и $\angle C_n = K + (-1)^n \cdot \frac{C}{2^n}$,

гдѣ K постоянная величина.

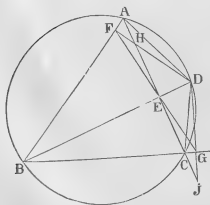
Если n станемъ увеличивать до ∞ , то $\frac{A}{2^n}$, $\frac{B}{2^n}$ и $\frac{C}{2^n}$ будутъ стремиться къ нулю и когда $n = \infty$, то $A_n = K$, $B_n = K$ и $C_n = K$, т.-е. \triangle будетъ равноугольнымъ и каждый изъ его угловъ $= 60^\circ$.

180. Пусть Q на дугѣ AB описанной окружности около $\triangle ABC$. Опустимъ $\perp QD$ на BC ; M точка пересѣченія прямой PQ съ окружностью 9-ти точекъ; проведемъ прямую DM , которая пересѣчетъ продолженіе CA въ E ; соединимъ P съ A и продолжимъ AP до пересѣченія съ BC въ G . Пусть U точка пересѣченія AP съ окружностью 9-ти точекъ; тогда (II, 167) U середина AP и M середина PQ ; поэтому $MG = MD$ и $\angle MGU = \angle MDQ = \angle QCA$; слѣдовательно, около $\diamond QDCE$ можно описать окружность; поэтому $\angle QEC$ прямой и слѣд. E основание \perp -а, опущеннаго изъ Q на CA . Отсюда видимъ, что прямая DE дѣлитъ пополамъ PQ .

181. PL, PM и PN \perp -ы изъ P , а QL', QM' и QN' \perp -ы изъ Q на стороны BC, CA и AB . Точки L, M и N лежатъ на одной прямой (II, 178); точно такъ же и точки L', M' и N' лежатъ на прямой. $\angle PNM = \angle PAM$ и $\angle QN'M' = \angle QAM'$; но $PN \parallel QN'$ и MAM' прямая; слѣдовательно, NM составляетъ съ $N'M'$ такой же уголъ, какой PA составляетъ съ AQ . Но $\angle PAQ$ прямой, такъ какъ PQ диаметръ окружности; слѣд. $NM \perp N'M'$.

182. Опустимъ \perp -ы QL, QM, QN, PL', PM' и PN' на стороны BC, CA и AB . Пусть S пересѣченіе прямыхъ LMN и $L'N'M'$; тогда $\angle SL'L = d - \angle PL'S = d - \angle ABP$ и $\angle SLL' = d - \angle QLS = d - \angle QBA$; слѣдовательно $\angle S = 2d - (d - \angle ABP) - (d - \angle QBA) = \angle ABP + \angle QBA = \angle QBP = \angle PDQ - \angle PQC = \angle PDQ - \angle BAC$.

Фиг. 33.



183. 1) F , E и G (фиг. 33) можно рассматривать, какъ основанія \perp -въ опущенныхъ изъ точки окружности на бока вписаннаго \triangle , а потому (II, 178) точки F , E и G лежатъ на прямой.

2) $\angle DCE = \angle ABD = \angle DHE$, какъ съ \perp -ми сторонами, а потому изъ $\triangle CDH$ выходитъ, что $DH = DC$. Точно такъ же изъ $\triangle ADJ$ найдемъ, что $DJ = DA$.

184. Пусть P и P' ортоцентры $\triangle ABC$ и $A'BC$; D середина BC . Соединимъ A съ P' и A' съ P ; тогда $AP = 2OD = A'P'$; $AP \parallel A'P'$ и потому AP' и $A'P$ дѣлятъ пополамъ другъ друга въ Q . Но прямая, проходящая чрезъ основанія \perp -въ изъ A на стороны $\triangle A'BC$, дѣлитъ пополамъ $A'P$ (II, 180); также прямая, проходящая чрезъ основанія \perp -въ, опущенныхъ изъ A' на стороны $\triangle ABC$, дѣлитъ AP' пополамъ; слѣдовательно, эти прямыя пересѣкаются въ Q . Пусть N середина OP ; тогда N будетъ центромъ окружности 9-ти точекъ для $\triangle ABC$. Но $NP = NO$ и $PQ = QA'$, а потому $NQ = \frac{1}{2}OA' =$ радиусу окружности 9-ти точекъ для $\triangle ABC$ и слѣдовательно эта окружность проходитъ черезъ Q . Также покажемъ, что окружность 9-ти точекъ для $\triangle A'BC$ проходитъ черезъ Q .

185. Опустимъ (фиг. 25) $\perp\perp KM$, KN , KP и KQ на стороны AD , BC , AB и CD въ $\diamond ABCD$. Рассматривая $\triangle ADE$, вписанный въ кругъ O , видимъ (II, 178), что точки M , P и Q лежатъ на одной прямой, а рассматривая $\triangle CDF$, вписанный въ кругъ O' , видимъ, что и точки M , N и Q лежатъ на прямой. Прямыя MPQ и MNQ , имѣя двѣ общихъ точки, сливаются, т.-е. линія $MNPQ$ будетъ прямая.

186. Пусть H означаетъ точку пересѣченія высотъ $\triangle ABC$ (фиг. 32). Продолжимъ AH до пересѣченія съ BC и окружн. въ точкахъ G и K ; тогда (II, 73) $GK = GH$. На прямой MN отложимъ $EL = ME$; $\diamond ELHC = \diamond EMKG$ и слѣд. $\angle ELH = \angle EMK = \angle MNA$, т.-е. $LH \parallel AN \parallel DEF$. Изъ $\triangle MLH$ видимъ, что черезъ середину бока ML проведена прямая $DEL \parallel$ сторонѣ LH , которая раздѣляетъ MH пополамъ въ точкѣ J .

187. Проведемъ прямую черезъ точки A и O , которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ B и C . Тогда AB и AC будутъ искомыми разстоянiя.

188. Опустимъ $\perp OA$ на прямую MN , который пересѣчетъ окружность въ точкѣ B , и продолжимъ его до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ C . AB будетъ наименьшее, а AC — наибольшее разстоянiе.

189. Проведемъ прямую OO' , которая пересѣчетъ окружности въ точкахъ A , B , C и D ; BC будетъ наименьшее, а AD — наибольшее разстоянiе.

190. Пусть O центръ полукруга. Изъ точки O возставимъ \perp до пересѣченія съ полуокружностью ACB въ точкѣ D , которая и будетъ искомою.

191. Изъ точки A окружности опишемъ дугу радиусомъ OA , кот. пересѣчетъ окружность въ B ; изъ B опишемъ дугу тѣмъ же радиусомъ, который пересѣчетъ окруж. въ C , и изъ C еще опишемъ дугу тѣмъ же радиусомъ, кот. пересѣчетъ окружность въ D . Точки A и D будутъ искомыми.

192. Изъ точки C опишемъ дугу радиусомъ, равнымъ хордѣ AB , которая пересѣчетъ окружность въ точкѣ D . Дуга CD будетъ искомая.

193. Изъ точки B опишемъ дугу радиусомъ, равнымъ хордѣ AB , которая пересѣчетъ данную окружность въ точкѣ C ; тогда $\cup AC$ будетъ

равна $2 \odot AB$. Точно такъ же можно опредѣлить дугу, взятую три раза и т. д.

194. Изъ A и B опишемъ дуги равными радиусами и точку ихъ пересѣченія соединимъ прямою, которая пересѣчетъ дугу въ C ; точка C будетъ середина AB . Повторивъ то же построение для каждой изъ полученныхъ дугъ AC и CB , найдемъ четыре равныя дуги, составляющія данную дугу AB , и т. д.

195. Чтобы раздѣлить окружность на двѣ равныя части, проведемъ діаметръ данной окружности. Чтобы раздѣлить окружность на четыре равныя части, проведемъ два взаимно перпендикулярные діаметра. Чтобы раздѣлить на восемь частей, каждую четвертую часть дуги раздѣлимъ пополамъ, и т. д. Для полученія третьей части окружности проведемъ діаметръ AOB и на OB построимъ равносторонній $\triangle COB$; тогда дуга AC будетъ равна третьей части окружности. Раздѣливъ пополамъ дугу AC , получимъ шестую часть, и т. д.

196. Окружность, описанная изъ A радиусомъ r .

197. Изъ A опишемъ дугу радиусомъ r , кот. пересѣчетъ MN въ O и O' . Окружность, описанная изъ O или O' радиусомъ r , будетъ искомая.

198. Окружность, описанная изъ O радиусомъ $R+a$, гдѣ R радиусъ данной окружности.

199. Опишемъ изъ A и B двѣ дуги радиусами $r+k$ и $r+l$, получимъ въ пересѣченіи дугъ центръ искомой окружности.

200. Съ той стороны, гдѣ A , проведемъ прямую $XU \parallel MN$ на разстояніи $r+l$, а изъ A опишемъ дугу радиусомъ $r+k$, которая пересѣчетъ прямую XU въ точкахъ O и O' . Окружность, описанная изъ O или O' радиусомъ r , будетъ искомая.

201. Прямая, перпендикулярная къ AB и проходящая чрезъ середину ея.

202. Изъ середины AB возставимъ къ ней \perp , который пересѣчетъ MN въ C . Окружность, описанная изъ C радиусомъ CB , будетъ искомая. Задача не возможна, если $MN \perp AB$.

203. Изъ A и B опишемъ дуги радиусомъ r , которыя пересѣкнутся въ O и O' . Окружность, описанная изъ O или O' радиусомъ r , будетъ искомая.

204. Изъ серединъ AB и AC возставимъ \perp -ы, которые пересѣкнутся въ точкѣ O . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OA , будетъ искомая.

205. Возьмемъ на окружности три какія-либо точки A , B и C и найдемъ центръ O окружности, проходящей чрезъ A , B и C (II, 204), который и будетъ центромъ данной окружности.

206. Накладываемъ линейку на окружность и проводимъ карандашомъ прямую около краевъ линейки; такимъ образомъ получимъ двѣ \parallel хорды AD и BC . Продолжимъ BA и CD до встрѣчи въ P и проведемъ прямыя AC и BD , которыя пересѣкнутся въ Q ; на прямой PQ лежитъ центръ искомой окружности. Точно такъ же онъ лежитъ и на прямой $P'Q'$, полученной подобно прямой PQ . Точка O пересѣченія прямыхъ PQ и $P'Q'$ будетъ центромъ данной окружности.

207. Цанъ $\triangle DEF$ и сторона BC другого \triangle . Построимъ на BC равно-

сторонній $\triangle ABC$ и опишемъ окружность около $\triangle DEF$ и ABC ; пусть G и H центры ихъ. Изъ точки G опишемъ окружность радіусомъ GA , которая пересѣчетъ FD въ K и L ; DE въ M и N и EF въ P и Q . $\triangle PKM$ и QLN будутъ искомыя.

208. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

209. Черезъ точку A проведемъ прямую \perp къ AO , которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ B и C . Хорда BC будетъ искомая.

210. Хорда, проходящая чрезъ точку $A \perp AO$, будетъ искомая.

211. Проведемъ прямую $HOY \parallel MN$ и на ней отложимъ части: $OA = OB = \frac{1}{2}a$ и чрезъ точки A и B проведемъ прямыя, перпендикулярно XY , кот. пересѣкутъ окружность въ точкахъ C и C' , D и D' . Хорды CD и $C'D'$ будутъ искомыя. Если хорду надо провести $\perp MN$, то прямую HOY надо провести $\perp MN$ и поступить далѣе такъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

212. Проведа прямую MN подъ угломъ α къ хордѣ AB , опустимъ $\perp OX$ на MN , который пересѣчетъ AB въ C . Хорда, проходящая чрезъ точку C , перпендикулярно къ OX , будетъ искомая.

213. Чрезъ C проведемъ прямую XY подъ $\angle \alpha$ къ AB и изъ D , середины AB , возставимъ $\perp DE$; также проведемъ прямую $CF \perp XY$, которая пересѣчетъ прямую DE въ O . Окружность, описанная изъ O радіусомъ OA , будетъ искомая.

214. Проведемъ въ окружности O хорду $AB=a$ и опустимъ $\perp OC$ на AB . Окружность, описанная изъ O радіусомъ OC , будетъ искомое геом. мѣсто.

215. Проведемъ произвольно въ кругѣ O хорду CD данной длины и опустимъ $\perp OE$ на CD ; опишемъ изъ O окружность радіусомъ OE , которая пересѣчетъ хорду AB въ точкахъ G и G' . Хорда, проходящая чрезъ $G \perp OG$, и хорда, проходящая чрезъ $G' \perp OG'$, будутъ искомыя.

216. Уголъ OAO' раздѣлимъ пополамъ и чрезъ точку A проведемъ прямую MN , перпендикулярно равнодѣлящей. Прямая MN будетъ искомая.

217. Раздѣлимъ прямую OO' пополамъ въ точкѣ S и чрезъ A проведемъ прямую $MN \perp AS$. Прямая MN будетъ искомая.

218. Опишемъ изъ точки O окружность радіусомъ OA и въ полученной окружности проведемъ хорду AB , равную данной разности; продолжимъ прямую AB , въ обѣ стороны, до встрѣчи съ данною окружностью въ точкахъ D и E . Хорда DE будетъ искомая.

219. Искомое геометрическое мѣсто есть полуокружность, описанная на гипотенузѣ, какъ діаметрѣ.

220. На AO , какъ діаметрѣ, опишемъ окружность и въ ней проведемъ хорду $AB=a$. Діаметръ, проходящій чрезъ точку B , будетъ искомымъ.

221. На BC , какъ діаметрѣ, опишемъ окружность и изъ B опишемъ дугу радіусомъ l , которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ D и D' . Прямая, проходящая чрезъ A , параллельно DC и $D'C$, будутъ искомыя.

222. На AB , какъ діаметрѣ, опишемъ окружность, а изъ A — дугу радіусомъ a , кот. пересѣчетъ окружность, въ точкахъ C и C' . Прямая BC и ей параллельная AX будутъ искомыя; точно такъ же прямая BC' и ей параллельная AY будутъ тоже искомыя.

223. На AO опишемъ окружность, а изъ точки O дугу радиусомъ a , которая пересѣчетъ проведенную окружность въ точкахъ B и B' . Хорда, проходящая чрезъ точки A и B или A и B' , будетъ искома.

224. На AO , какъ діаметръ, опишемъ окружность, которая пересѣчетъ BC въ точкахъ D и D' . Хорда, проходящая чрезъ A и D или A и D' , будетъ искома.

225. Отложимъ на касательной часть $BC=AB$. Точка C будетъ искома.

226. Отложимъ на MN часть $AB=a$ и изъ C , середины AB , воставимъ къ ней $\perp CK$; изъ A опишемъ дугу радиусомъ r , которая пересѣчетъ CK въ точкѣ D и чрезъ D проведемъ прямую $XU \parallel MN$. Прямая XU будетъ искомое геометрическое мѣсто.

227. Проведемъ прямую XU , какъ указано въ пред. зад., кот. пересѣчетъ KL въ O . Окружность, описанная изъ O радиусомъ r , будетъ искома.

228. Проведемъ прямую XU , какъ указано въ 226 зад., а изъ A опишемъ дугу радиусомъ r , которая пересѣчетъ прямую XU въ O . Точка O будетъ центръ искомой окружности.

229. Задача рѣшается на основаніи 226 зад. этого отд.

230. Опишемъ изъ A дугу радиусомъ $\frac{1}{2}k$, кот. пересѣчетъ другую окружность въ точкѣ B . Прямая, проходящая чрезъ A и B , будетъ искома.

231. O центръ окружностей. Проведемъ радиусъ OA внутренней окружности и, продолживъ его, отложимъ $AO'=AO$; изъ O' опишемъ окружность радиусомъ $O'A$, кот. пересѣчетъ наружную окружность въ B и C . Хорда внѣшней окружности, проходящая черезъ A и B или A и C , будетъ искома.

232. Проведемъ прямую XOY , параллельно данному направленію, и на ней отложимъ часть $OB=a$. Окружность, описанная изъ B радиусомъ r , будетъ искомое геометрическое мѣсто.

233. Построимъ $\angle QAX = \angle PAO$ и на AX отложимъ $AO'=AO$. $\angle OAO' = \angle PAQ$ есть величина постоянная и слѣд. положеніе точки O' постоянное. $\triangle QAO' = \triangle PAO$; откуда $O'Q=OP$, т.-е. точка Q лежитъ на окружности, описанной изъ O' радиусомъ OP .

234. 1) C и D середины OB и PB ; слѣд. $OD \perp PB$ и потому D лежитъ на окружности, описанной на OB , какъ діаметръ. 2) Проведемъ прямую $AECF$, пересѣкающую окружность ODB въ E и F . AD будетъ максимумъ тогда, когда D лежитъ въ F и minimum когда въ E ; слѣд. діагональ, кот. $=2AD$, имѣетъ max. $=2(AC + CB)$, а min. $=2(AC - CB)$.

235. C середина AO . Продолжимъ BA и DL до пересѣченія въ T . Такъ какъ $LA=LD$ то $\angle LDA = \angle LAD$; также $\angle DAT$ прямой, а потому $LD=LT$ и слѣд. $AM=MN$ или $AM=\frac{1}{2}AN$; поэтому $MC \parallel NO$. Но $\angle ANO$ прямой, а потому и $\angle AMC$ прямой. Слѣд. геометрическое мѣсто M есть окружность, описанная на AC , какъ діаметръ.

236. Проведемъ прямую $OX \parallel MN$ и отложимъ на ней часть $OA=a$. Изъ A опишемъ окружн. радиусомъ, равнымъ радиусу окружн. O , кот. пересѣчетъ окружн. O' въ B и C ; проведемъ прямыя BK и $CL \parallel MN$, которыя пересѣкутъ окружн. O въ D и E . Отрѣзки BD и CE будутъ искомыя.

237. Окружность, описанная изъ центра данной окружности радиусомъ,

равнымъ катету \triangle , у кот. гипотенуза r , а другой катетъ радиусъ данной окружности.

238. Въ данной окружности проведемъ діаметръ $BC \perp$ къ OA . Окружность, описанная изъ A радиусомъ AB , будетъ искомая.

239. Проведемъ прямую $XU \parallel OA$ на разстояніи $\frac{1}{2}a$, которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ B и C . Окружность, описанная изъ A радиусомъ AB или AC , будетъ искомая.

240. Проведемъ прямую $OX \perp MN$ и изъ середины AB возставимъ \perp , который пересѣчетъ прямую OX въ G . Окружность, описанная изъ G радиусомъ GA , будетъ искомая.

241. Проведемъ въ окружности хорду $AB=a$ и прямую $OX \perp AB$; изъ A опишемъ дугу радиусомъ r , которая пересѣчетъ OX въ C . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OC , будетъ искомое geometr. мѣсто.

242. Центръ искомой окружности лежитъ въ пересѣченіи прямой MN съ окружностью, найденной какъ указано въ 241 задачѣ.

243. Опишемъ изъ O окружность радиусомъ OC (II, 241), а изъ точки A дугу радиусомъ r , кот. пересѣчетъ проведенную окружность въ точкѣ D . Окружность, описанная изъ точки D радиусомъ r , будетъ искомая.

244. Центръ искомой окружности лежитъ на пересѣченіи геометрическихъ мѣстъ, найденныхъ какъ указано въ 226 и 241 зад. этого отдѣла.

245. Проведемъ въ окружности O хорду $AB=a$ и прямую $OX \perp AB$; изъ точки A опишемъ дугу радиусомъ r , которая пересѣчетъ прямую OX въ C , и изъ O окружность радиусомъ OC . То же самое сдѣлаемъ и для окружности O' , гдѣ только хорду надо провести равную b . Точки пересѣченія начерченныхъ окружностей будутъ центрами искомыхъ окружностей.

246. Въ окружностяхъ проведемъ параллельныя хорды AB и CD , равныя a и b ; начертимъ прямую $OX \perp AB$ и изъ середины BD возставимъ къ ней \perp , кот. пересѣчетъ OX въ E . Опишемъ изъ O окружность радиусомъ OE , а изъ P — дугу радиусомъ r , кот. пересѣчетъ описанную окружность въ точкахъ O' и O'' . Точка O' или O'' будетъ центромъ искомой окружности.

247. Опустимъ $\perp OE$ на AB и, принявъ точку E за центръ, опишемъ дугу MN радиусомъ $=\frac{1}{2}s$; изъ O опишемъ дугу радиусомъ OE , кот. пересѣчетъ дугу MN въ F и G , а изъ A и B проведемъ прямыя, параллельно EF . до встрѣчи съ окружностью въ C и D . Хорды AC и BD будутъ искомыя.

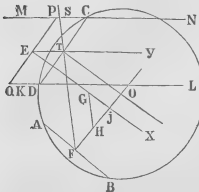
248. На продолженіи OA отложимъ часть $AB=OA$; изъ B опишемъ дугу радиусомъ, равнымъ радиусу окружности O , кот. пересѣчетъ другую окружность въ точкахъ C и D . Прямыя AC и AD будутъ искомыя.

249. Опустимъ $\perp OA$ на MN и проведемъ прямую $O'X \parallel MN$, которая пересѣчетъ OA въ B ; изъ B опишемъ дугу радиусомъ, равнымъ радиусу окружности O' , кот. пересѣчетъ окружн. O въ C и D . Прямая CD искомая.

250. Пусть G и H точки пересѣченія прямой MN съ боками угла. Раздѣлимъ GH пополамъ въ точкѣ V и опустимъ $\perp PC$ на MN , который пересѣчетъ прямую AB въ точкѣ D . Проведемъ прямую $DX \parallel MN$, которая пересѣчетъ бока угла въ точкахъ E и F . Окружность, описанная изъ точки P радиусомъ PE , будетъ искомая.

251. Проведемъ (фиг. 34) между MN и KL прямую $PQ=AB$ и изъ E , середины PQ , возставимъ $\perp EX$; проведемъ прямую $EY \parallel MN$ и изъ середины AB возставимъ \perp , который пересѣчетъ EX въ J . На JE и JF отложимъ равныя, но произвольныя, части JG и JH ; проведемъ прямую $FS \parallel HG$, которая пересѣчетъ прямую EY въ точкѣ T ; наконецъ, изъ T проведемъ прямую, параллельно EJ , которая пересѣчетъ FJ въ O . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OA , будетъ искомая.

Фиг. 34.



252. Прямая, проходящая чрезъ $A \perp AO$, будетъ искомая касательная.

253. 1) Опустимъ $\perp OB$ на MN , который пересѣчетъ окружность въ A . Прямая, проходящая чрезъ $A \parallel MN$, будетъ искомая касательная.

2) Чтобы получить касательную $\perp MN$, надо прямую OB провести $\parallel MN$ и чрезъ A , точку пересѣченія OB съ окружностью, провести прямую $AX \perp MN$. Прямая AX будетъ искомая касательная.

254. Начертимъ прямую KL подъ угломъ α къ MN . Касательная, проведенная параллельно KL , будетъ искомая.

255. Проведемъ касательную AB къ кругу O и другую касательную CD подъ угломъ α къ AB . Прямая AB и CD будутъ искомыми касательными.

256. Опишемъ изъ A дугу произвольнымъ радиусомъ, кот. пересѣчетъ окружность въ B и C . Прямая, проходящая чрезъ $A \parallel BC$, будетъ искомая.

257. Хорда BC , проходящая чрезъ $A \perp AO$, будетъ искомая.

258. Прямая AX , перпендикулярная къ MN , будетъ искомая.

259. Опустимъ $\perp AB$ на MN . Окружность, описанная изъ A радиусомъ AB , будетъ искомая.

260. Возставимъ $\perp AK$ къ MN и на немъ отложимъ часть $AO=r$. Окружность, описанная изъ O радиусомъ OA , будетъ искомая.

261. Опустимъ $\perp PE$ на CD и проведемъ равнодѣлящую $\angle EPB$, которая пересѣчетъ CD въ F ; проведемъ прямую $FX \parallel EP$, кот. пересѣчетъ AB въ O . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OP , будетъ искомая.

262. Возставимъ $\perp BX$ къ MN и еще \perp изъ середины AB , кот. пересѣкутся въ O . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OA , будетъ искомая.

263. Изъ C , середины AB , опустимъ $\perp CD$ на MN и изъ середины AD возставимъ \perp , который пересѣчетъ CD въ O . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OA , будетъ искомая.

264. Геом. мѣсто будетъ прямая $XY \parallel MN$ на разстояніи r отъ нея.

265. Проведемъ прямую $XY \parallel KL$ на разстояніи r , кот. пересѣчетъ MN въ точкѣ O . Окружность, описанная изъ O радиусомъ r , будетъ искомая.

266. Проведемъ прямую $XY \parallel MN$ на разстояніи r и изъ A опишемъ

дугу радиусомъ r , которая пересѣчетъ прямую XU въ O . Точка O будетъ центръ искомой окружности.

267. Проведемъ прямую $XU \parallel MN$ на разстояніи r , а на прямой KL отложимъ часть $AB=a$; изъ C , середины AB , возставимъ $\perp CD$, а изъ A опишемъ дугу радиусомъ r , которая пересѣчетъ CD въ E ; чрезъ E проведемъ прямую $\parallel KL$, которая встрѣтитъ прямую XU въ O . Точка O будетъ центръ искомой окружности.

268. Прямая, равноотстоящая отъ данныхъ прямыхъ (I, 216).

269. Проведемъ прямую, равноотстоящую отъ MN и KL , которая пересѣчетъ PQ въ O . Точка O будетъ центръ искомой окружности.

270. A и B данныя точки; XU данная прямая; r данный радиусъ. На AB , какъ діаметрѣ, опишемъ окружность; изъ B опишемъ окружность радиусомъ $2r$, которая пересѣчетъ первую окружность въ E . Черезъ середины AB и BE проведемъ прямую FG и прямую $HK \parallel XU$ на разстояніи r , кот. пересѣчетъ FG въ O . Точка O центръ искомой окружности.

271. Изъ точки B прямой MN опустимъ $\perp BC$ на KL и раздѣлимъ его пополамъ въ D ; чрезъ D проведемъ прямую $XU \parallel MN$, а изъ A опишемъ дугу радиусомъ BD , которая пересѣчетъ прямую XU въ точкахъ O и O' . Окружность, описанная изъ O или O' радиусомъ BD , будетъ искома.

272. Прямая (I, 260).

273. Пусть центръ долженъ лежать на сторонѣ BC треугольника ABC . Проведемъ равнодѣлящую $\angle A$, которая пересѣчетъ сторону BC въ O ; опустимъ $\perp OD$ на сторону AB . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OD , будетъ искома.

274. Проведемъ равнодѣлящую угла, составленнаго данными прямыми, и прямую $XU \parallel MN$ на разстояніи r , которая пересѣчетъ равнодѣлящую въ O . Точка O будетъ центръ искомой окружности.

275. Даны прямые MN и KL и точка A на MN . Проведемъ равнодѣлящую XU угла между данными прямыми и возставимъ $\perp AB$ къ MN , который пересѣчетъ прямую XU въ O . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OA , будетъ искома.

276. 1) Данныя прямые пересѣкаются попарно. Проведемъ равнодѣлящія угловъ, составленныхъ одною изъ прямыхъ съ двумя другими прямыми; напр. MN съ KL и PQ , кот. пересѣкнутся въ O ; опустимъ $\perp OD$ на прямую MN . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OD , будетъ искома.

2) Двѣ изъ данныхъ прямыхъ параллельны, напр. KL и PQ . Тогда поступаемъ такъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

3) Данныя прямые параллельны. Задача не возможна.

277. Рѣшеніе одинаково съ рѣшеніемъ предыдущей задачи, I случай.

278. Положимъ, что искома окружность должна касаться стороны BC . Проведемъ равнодѣлящую $\angle A$ и равнодѣлящую угла дополнительнаго къ $\angle B$ или $\angle C$; изъ O , пересѣченія равнодѣлящихъ, опустимъ $\perp OD$ на BC . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OD , будетъ искома.

279. Проведемъ къ данной окружности двѣ касательныя, составляющія уголъ α (II, 255), которыя пересѣкнутся въ точкѣ A . Окружность, описанная изъ O радиусомъ OA , будетъ искомое геометрическое мѣсто.

280. Опишемъ изъ точки O такую окружность, изъ точекъ которой эта окружность видна подъ угломъ α (II, 279); также изъ точки O' опишемъ окружность, изъ точекъ которой эта окружность видна подъ угломъ β . Точки пересѣченія проведенныхъ окружностей будутъ искомыми.

281. Опишемъ изъ точки B окружность радиусомъ, равнымъ гипотенузѣ прямоугол. \triangle , построеннаго по катету r и противолежащему углу $\frac{1}{2}\alpha$; изъ точки A опишемъ дугу радиусомъ r , которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ O и O' . Окружность, описанная изъ O или O' радиусомъ r , будетъ искоюма.

282. Проведемъ прямую AO , кот. пересѣчетъ окружность въ B и C . Окружность, описанная изъ A радиусомъ AB или AC , будетъ искоюма.

283. Искомое геометрическое мѣсто центровъ будетъ окружность, концентрическая съ данною и описанная радиусомъ, равнымъ $R+r$ или $R-r$, гдѣ R радиусъ данной окружности.

284. Соединимъ прямою A и B и на ней возьмемъ какую-либо точку C ; изъ точки A опишемъ окружность радиусомъ AC , а изъ точки B — радиусомъ BC . Полученныя окружности будутъ искомыми.

285. На продолженіи AB возьмемъ какую-либо точку C . Описавъ изъ точки A окружность радиусомъ AC , а изъ точки B — радиусомъ BC , получимъ искомыя окружности.

286. Искомое геометрическое мѣсто центровъ будетъ прямая OA .

287. На прямой OA отложимъ часть $AO'=r$. Точка O' будетъ центромъ искомой окружности.

288. Изъ O опишемъ дугу радиусомъ, равнымъ $R+r$, гдѣ R радиусъ данной окружности, которая пересѣчетъ прямую MN въ точкахъ B и C . Точка B или C будетъ центромъ искомой окружности.

289. Изъ O опишемъ дугу радиусомъ, равнымъ $R+r$, гдѣ R радиусъ даннаго круга; проведемъ прямую $XY \parallel MN$ на разстояніи r , которая пересѣчетъ дугу въ точкахъ B и C . Точка B или C будетъ центромъ искомой окружности.

290. Означимъ радиусъ даннаго круга буквою R . Изъ точки A опишемъ окружность радиусомъ r и изъ O — радиусомъ $R+r$. Точки пересѣченія окружностей будутъ центрами искомыхъ окружностей. Задача возможна, когда разстояніе данной точки до центра данной окружности $<$ или $= R+r$.

291. Пусть R и R' радиусы данныхъ окружностей O и O' . Изъ O опишемъ окружность радиусомъ $R+r$, а изъ O' радиусомъ $R'+r$. Точки пересѣченія проведенныхъ окружностей будутъ центрами искомыхъ окружностей.

292. Проведемъ прямую OA и изъ середины AB возставимъ \perp , который пересѣчетъ OA въ O' . Точка O' будетъ центръ искомой окружности.

293. Изъ точки A возставимъ $\perp AK$ къ MN и на немъ отложимъ часть AB , равную радиусу даннаго круга; изъ середины OB возставимъ перпендикуляръ до встрѣчи съ AK въ точкѣ O' . Точка O' будетъ центръ искомой окружности. Вопросъ допускаетъ два рѣшенія.

294. Черезъ точку A проведемъ касательную къ окружности до встрѣчи съ прямою MN въ точкѣ B ; проведемъ прямую OA , кот. пересѣчетъ равнодѣляющую угла ABM въ точкѣ O' . Эта точка будетъ центръ искомой окруж-

ности, кот. радиусъ равенъ прямой $O'A$. Задача допускаетъ два рѣшенія.

295. R радиусъ большаго круга O ; R' — радиусъ круга O' ; A точка данная на окружн. O . Отложимъ на OA часть $OB=R-R'$ и изъ середины OB возставимъ \perp до встрѣчи съ OA въ O'' . Точка O'' будетъ центръ искомой окружности, которой радиусъ равенъ $O''A$. Задача допускаетъ два рѣшенія.

296. Пусть R означаетъ радиусъ данной окружности. Проведемъ прямую $KL \parallel MN$, какъ указано въ 226 задачѣ, а изъ O опишемъ окружность радиусомъ $R+r$, которая пересѣчетъ прямую KL въ точкахъ O' и O'' . Точки O' и O'' будутъ центрами искомыхъ окружностей.

297. R радиусъ окружности O и a данная длина. Опишемъ изъ O окружность радиусомъ $R+r$, а изъ O' окружность, какъ указано въ 241 задачѣ. Точки пересѣченія проведенныхъ окружностей будутъ центры искомыхъ окружностей.

298. Въ окружностяхъ построимъ центральные $\angle AOB$ и $CO'D$, равные φ ; внутри окружности опишемъ концентрическія окружн., касающіяся хордъ AB и CD и проведемъ къ нимъ общую касательную, которая пересѣчетъ данныя окружности въ E , F , G и H . Прямая OF и $O'G$ пересѣкнутся въ O'' , кот. и будетъ центрѣмъ искомой окружн. Также и прямая EO и HO' пересѣкнутся въ O''' , которая будетъ то же центрѣмъ другой искомой окружности.

299. Центръ S круга, описаннаго около $\triangle OO'O''$, будетъ центрѣмъ искомаго круга. Чтобы опредѣлить радиусъ этого круга, проведемъ прямую чрезъ S и O , которая пересѣчетъ окружность O въ A и B . Отрѣзокъ SA или SB будетъ искомымъ радиусъ.

300. Черезъ середину дуги AB проведемъ касательную, которая встрѣтитъ продолженія радиусовъ OA и OB въ точкахъ S и D . Кругъ, вписанный въ равнобедренный $\triangle COD$, будетъ искомымъ.

301. Опустимъ $\perp CD$ на діаметръ AB и точку C соединимъ съ O , центрѣмъ даннаго полукруга; изъ точки E , пересѣченія равнодѣлящей $\angle DCO$ съ діаметромъ, возставимъ къ AB перпендикуляръ, кот. пересѣчетъ OC въ точкѣ O' . Точка O' будетъ центрѣмъ, а $O'C$ — радиусъ искомаго круга.

302. Данную окружность раздѣлимъ на три равныя части (II, 195) и полученные точки дѣленія: A , B и C соединимъ съ O . Въ каждый изъ полученныхъ секторовъ AOB , BOC , COD впишемъ круги, кот. и будутъ искомыя.

303. Сначала надо поступить такъ, какъ въ предыдущей задачѣ, а потомъ въ секторы AOB , BOC и COD вписать круги (II, 278, 300).

304 и 305. Раздѣливъ окружность на 4 части, поступаемъ такъ же, какъ въ 302 и 303 задачахъ этого отдѣла.

306. Въ $\triangle ABC$ впишемъ кругъ, кот. коснется AC , AB и BC въ M , N и P ; тогда опишемъ изъ C окружность радиусомъ CM ; изъ A — радиусомъ AM и изъ B — радиусомъ BN . Эти окружности будутъ искомыя.

307. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность, описанная изъ O радиусомъ $\frac{1}{2}a$.

308. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность, описанная изъ середины BC радиусомъ, равнымъ $\frac{1}{2}a$.

309. Искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность, описанная радиусомъ, равнымъ $\frac{1}{2}d$, изъ середины BC .

310. Возьмемъ одинъ изъ треугольниковъ ABC , который имѣетъ данное основаніе BC и въ кот. прямая, соединяющая B съ M , серединою стороны AC , равна прямой k . Проведемъ прямую $AD \parallel MB$, до встрѣчи съ продолженіемъ BC въ O ; тогда $AO=2MB=2k$, а $OB=BC$; слѣд. O отстоитъ отъ постоянной точки O на $2k$, а потому точка A принадлежитъ окружн., описанной изъ O радиусомъ $2k$, кот. и будетъ искомое геом. мѣсто.

311. Положимъ точка A на окружности O . На OA , какъ діаметръ, опишемъ окружность, кот. пересѣчетъ окружность O' въ точкахъ B и B' . Хорда окружности O , проходящая чрезъ A и B или A и B' , будетъ искомая.

312. На прямой OA отложимъ часть $AB=AO$ и на AB , какъ діаметръ, опишемъ окружность, кот. пересѣчетъ данную въ точкахъ C и C' . Хорда данного круга, проходящая чрезъ точки A и C или A и C' , будетъ искомая.

313. Возьмемъ на меньшей окружности точку A и поступимъ такъ, какъ въ предыдущей задачѣ.

314. Изъ A опишемъ дугу радиусомъ, равнымъ діаметру окружности, кот. пересѣчетъ ее въ C и C' ; проведемъ діаметръ CB данного круга. Сѣкущая AB будетъ искомая. Задача допускаетъ два рѣшенія.

315. Раздѣлимъ OA пополамъ въ B и на AB опишемъ окружность, кот. пересѣчетъ данную въ C и C' . Прямые AC и AC' будутъ искомыми.

316. Опишемъ на OO' , какъ діаметръ, окружность и проведемъ въ ней хорду $OC=\frac{1}{2}s$. Прямая $AD \parallel OC$ будетъ искомая.

317. Прямая $AD \parallel OO'$ будетъ искомая.

318. A и B точки на данной окружности O . Опустимъ $\perp OP$ на AB , продолживъ его, отложимъ часть $PQ=PO$; изъ Q радиусомъ QA опишемъ окружность. Проведемъ сѣкущую EAC , кот. пересѣчетъ окружности O' и O въ E и C , и въ окружности хорду $BD \parallel AC$; пусть F середина CE . Тогда $AC \cdot BD = AC \cdot AE = (EF+AF)(EF-AF) = EF^2 - AF^2$. Произведеніе $AC \cdot BD$ будетъ наибольшимъ тогда, когда разность $EF^2 - AF^2$ наибольшая, т.-е. когда $AF=0$; другими словами, когда точки A и F совпадаютъ. Это будетъ тогда, когда $EAC \parallel OQ$. Слѣд. искомыя хорды \perp -ы къ AB .

319. 1) На OO' , какъ діаметръ, опишемъ окружность, а изъ O — дугу радиусомъ $\frac{1}{2}s$, которая пересѣчетъ проведенную окружность точкахъ въ B и B' . Прямая $AX \parallel BO$ будетъ искомая.

2) Продолживъ прямую $O'A$, отложимъ часть $AO''=AO'$. На $O''O$, какъ діаметръ, опишемъ окружность, а изъ O дугу радиусомъ $\frac{1}{2}s$, кот. пересѣчетъ проведенную окружность въ B и B' . Прямая $AU \parallel OB$ будетъ искомая.

320. Опустимъ $\perp OA$ на MN и проведемъ прямую $O'X \parallel MN$, кот. пересѣчетъ OA въ B ; отложимъ на BO' часть $BC=\frac{1}{2}s$ и изъ точки C опишемъ окружность радиусомъ, равнымъ радиусу окружности O' , кот. пересѣчетъ окружность O въ точкахъ D и D' . Прямая, проходящая чрезъ D или D' , параллельно MN , будетъ искомая.

321. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

322. Построимъ $\triangle ACE$, въ кот. гипотенуза $AC=k$ и катетъ $CE=h_b$; на AC , какъ діаметръ, опишемъ окружн., а изъ A — дугу радиусомъ h_a ,

кот. пересѣчеть окружн. въ F и F' . Проведемъ прямую CE , кот. пересѣчеть AE въ D ; проведемъ прямую $CY \parallel EA$ и прямую $AZ \parallel FC$, кот. пересѣкутся въ B . $\square ABCD$ будетъ искомымъ.

323. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

324. Отложимъ на прямой XY часть $EC=2m$, и изъ D , середины CE , опишемъ окружность радіусомъ DC ; изъ C опишемъ дугу радіусомъ h_a , кот. пересѣчеть окружность въ F , а изъ E дугу радіусомъ h_b , кот. пересѣчеть окружность въ G ; проведемъ прямыя CG и EF , кот. пересѣкутся въ точкѣ A , и на прямой AD отложимъ часть $DB=DA$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

325. Опишемъ полуокружность на AB и изъ B опишемъ дугу радіусомъ a , кот. пересѣчеть полуокружность въ E ; проведемъ прямую $BF \parallel AE$, а изъ C и D проведемъ прямыя CG и $DH \perp$ къ AE . Тогда въ пересѣченіи прямыхъ: AE , BF , CG и DH получимъ искомый прямоугольникъ.

326. Пусть h раавстоініе между прямыми MN и KL . Опишемъ на AB полуокружность, а изъ B дугу радіусомъ h , кот. пересѣчеть полуокружность въ C ; проведемъ прямую $BD \parallel AC$. Тогда въ пересѣченіи прямыхъ: MN , KL , AC и BD получимъ искомый ромбъ.

327. Искомое геометр. мѣсто будетъ окружность, описанная на OA .

328. Проведемъ радіусъ $OE \perp AB$; тогда $\triangle OEM = \triangle OCD$, а потому $\angle OME = \angle ODC$, т. е. будетъ прямой. Слѣд. геометр. мѣсто точекъ M будетъ окружность, описанная на OE , какъ діаметръ.

329. Въ $\triangle ADB$ (I, 78) $AM = \frac{2}{3}AC$ и $\angle ACB$ прямой. Проведемъ прямую $MX \parallel CB$, кот. пересѣчеть AB въ E ; тогда $AE = \frac{2}{3}AB$ и $\angle AME$ прямой, а потому искомое геометрическое мѣсто точекъ M будетъ окружность, описанная на AE (II, 219).

330. 1) На OA , какъ діаметръ, опишемъ окружность, кот. пересѣчеть данную окружн. въ B и B' . AB и AB' будутъ искомыя касательныя.

2) Опишемъ дугу изъ A радіусомъ AO , а изъ O — окружность радіусомъ, равнымъ діаметру круга O , кот. пересѣчеть дугу въ C и C' . Прямыя AB и AB' , \perp -ны къ OC и OC' , будутъ искомыя касательныя.

331. Проведемъ хорду $BC=a$ и $\perp OD$ на BC ; опишемъ окружность изъ O радіусомъ OD , а изъ A проведемъ къ ней касательную, кот. пересѣчеть данную окружность въ E и F . Хорда EF будетъ искома.

332. Рѣшеніе то же, что и въ предыдущей задачі.

333. Опустимъ $\perp OD$ на хорду BC и опишемъ окружность изъ O радіусомъ OD . Касательныя къ внутренней окружности, проведенныя изъ точки A , будутъ искомыя прямыя.

334. Отложимъ на произвольной прямой часть $AB=k$ и изъ середины AB опишемъ окружность радіусомъ r ; изъ A и B проведемъ касательныя къ окружности, кот. въ пересѣченіи дадутъ искомый ромбъ.

335. $ABCD$ данный четырехугольникъ; O данный кругъ. Изъ произвольной точки E внутри четырехугольника опустимъ \perp -ы EG , EH , EK и EL на стороны AB , BC , CD и DA четырехугольника. Въ кругѣ, при O , построимъ $\angle L$, равные \angle -мъ, составленнымъ \perp -ми и чрезъ точки пересѣ-

ченія проведенныхъ прямыхъ съ окружностью проведемъ къ ней касательныя, кот. въ пересѣченіи дадутъ искомый \diamond .

336. Пусть s данная сумма. Изъ середины BC опишемъ окружность радіусомъ $\frac{1}{2}s$, а изъ A проведемъ къ ней касательную, кот. будетъ искомая.

337. Пусть d данная разность. Опишемъ изъ C окружность радіусомъ d и проведемъ къ ней касательную BD . Прямая $AE \parallel BD$ будетъ искомая.

338. Пусть l данная длина. Изъ точки B одной окружности опишемъ дугу радіусомъ $\frac{1}{2}l$, кот. пересѣчетъ другую окружность въ C и C' ; продолживъ BC , опустимъ $\perp OD$ на BC , а изъ O опишемъ окружность радіусомъ OD и къ ней проведемъ изъ A касательную AE , кот. будетъ искомая.

339. На AB опишемъ полуокружность, а изъ точки B опишемъ дугу радіусомъ a , кот. пересѣчетъ полуокружность C . Окружность, описанная изъ A радіусомъ AC , будетъ искомая.

340. Пусть a длина касательной. Изъ B опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ \triangle , у кот. катеты a и r , а изъ A дугу радіусомъ r , кот. пересѣчетъ первую дугу въ точкахъ O и O' . Окружность, описанная изъ O или O' радіусомъ r , будетъ искомая.

341. Опишемъ изъ точки A дугу радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ \triangle , у кот. катеты a и r , а изъ точки B — дугу радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ \triangle , у кот. катеты b и r . Точки O и O' пересѣченія дугъ будутъ центрами искомыхъ окружностей.

342. Пусть R радіусъ данной окружности и a данная длина. Искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность, описанная изъ O радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ \triangle , у кот. катеты a и R .

343. Черезъ точку A окружности проведемъ касательную и отложимъ на ней часть AB , равную данной длинѣ; изъ O опишемъ окружность радіусомъ OB , кот. пересѣчетъ MN въ C и C' . Точки C и C' будутъ искомыя.

344. Черезъ точку A окружн. O проведемъ къ ней касательную, на кот. отложимъ часть $AB=a$ и изъ O опишемъ окружн. радіусомъ BO . То же построеніе сдѣлаемъ и для окружн. O' , гдѣ только касательная должна равняться b . Точки пересѣченія проведенныхъ окружн. будутъ искомыя.

345. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и проведемъ прямую $MN \parallel AX$ на разстояніи h_a , кот. пересѣчетъ прямую AY въ C ; изъ A опишемъ дугу радіусомъ h_a , а изъ C проведемъ къ ней касательную, кот. пересѣчетъ AX въ B . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

346. Проведемъ прямую MN и ей параллельную KL на разстояніи h_b ; изъ точки A прямой MN опишемъ дугу радіусомъ $2m_a$, кот. пересѣчетъ KL въ D ; изъ A опишемъ еще дугу радіусомъ h_a и къ ней изъ E , середины AD , проведемъ касательную, кот. пересѣчетъ прямыя MN и KL въ точкахъ A и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

347. Построимъ $\angle XBY = \angle (m_b, a)$ и проведемъ прямую $MN \parallel BY$ на разстояніи h_a , кот. пересѣчетъ прямую BX въ E ; изъ B опишемъ дугу радіусомъ h_b и изъ середины BE проведемъ къ ней касательную, кот. пересѣчетъ прямыя MN и BY въ точкахъ A и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

348. Опустимъ $\perp AC$ на прямую XY и, продолживъ его, отложимъ часть $CD=CA$; изъ D опишемъ окружность радіусомъ DC , а изъ B про-

ведемъ къ ней касательную, кот. пересѣчетъ прямую XU въ M . Точка M будетъ искомая.

349. O данная точка; G и H центры данныхъ окружностей ABC и DEF . Построимъ равносторонній $\triangle OGG'$ и изъ G' опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ окружности G , кот. пересѣчетъ окружность H въ точкахъ K' и L' ; построимъ $\angle \angle OGG'$ и OGL , равные $\angle \angle OG'K'$ и $OG'L'$. $\triangle \triangle OKK'$ и OLL' будутъ искомыя.

350. Задача можетъ быть рѣшена двумя способами:

1) O и R — центръ и радіусъ большаго круга, а O' и r — центръ и радіусъ меньшаго. Изъ O опишемъ окружность радіусомъ $R-r$, а изъ O' проведемъ къ ней касательныя $O'A$ и $O'A'$, гдѣ A и A' точки касанія; проведемъ радіусы OA и OA' и продолжимъ ихъ до встрѣчи съ окружностью O въ точкахъ B и B' . Проведемъ прямую $BC \perp OB$ и $B'C' \perp OB'$, получимъ искомыя касательныя: BC и $B'C'$. 2) Опишемъ изъ O окружность радіусомъ $R+r$ и изъ O' проведемъ къ ней касательныя $O'A$ и $O'A'$, гдѣ A и A' точки касанія; проведемъ радіусы OA и OA' , которые пересѣкутъ окружность радіуса R въ B и B' . Прямая $BC \perp OB$ и прямая $B'C' \perp OB'$ будутъ искомыя касательныя. Задача имѣетъ четыре рѣшенія, когда окружности не пересѣкаются; три — когда онѣ внѣшние касаются; двѣ — когда онѣ пересѣкаются; одно — когда онѣ внутренне касаются, и ни одного — когда одна окружность лежитъ внутри другой.

351. Изъ A и B опишемъ окружности радіусами a и b и проведемъ къ нимъ общую касательную, кот. и будетъ искомая.

352. Изъ O , середины AB , опишемъ окружн. радіусомъ OA и проведемъ къ ней касательную $\parallel MN$; опустимъ $\perp \perp AC$ и BD на KL . Окружности, описан. изъ A радіусомъ AC и изъ B радіусомъ BD , будутъ искомыя.

353. Въ кругѣ O проведемъ хорду $AB=a$ и опишемъ изъ его центра окружность, касающуюся AB . Общая касательная къ кругу O и начерченному будетъ искомая сѣкущая.

354. Въ кругѣ O проведемъ хорду, равную a , и начертимъ концентрическую окружность, касающуюся этой хорды; то же построение сдѣлаемъ и въ кругѣ O' , гдѣ хорда должна быть равной b . Общая касательная къ начерченнымъ кругамъ будетъ искомая сѣкущая.

355. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

356. Изъ середины AB опишемъ окружность радіусомъ $\frac{1}{2}s$ и проведемъ общую касательную къ окружностямъ, кот. и будетъ искомая.

357. Проведемъ въ кругѣ O хорду CD данной длины и опустимъ $\perp OE$ на CD ; опишемъ изъ O окружн. радіусомъ OE , а изъ середины AB — радіусомъ $\frac{1}{2}s$. Хорда, полученная на общей касательной къ начерченнымъ окружностямъ, будетъ искомая.

358. Опустимъ $\perp OA$ на MN и, продолживъ его, отложимъ часть $AO''=AO$; изъ O'' опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ радіусу окружности O , и проведемъ общую касательную къ окружностямъ O и O'' . Точка пересѣченія касательной съ MN будетъ искомая. Задача допускаетъ четыре рѣшенія,

359. O и O' центры окружностей. Пусть A искомая точка на окружности. Тогда, проведя касательныя AD и AE къ O' , гдѣ D и E точки касанія, продолжимъ ихъ до встрѣчи съ окружностью O въ C и B , найдемъ, что DE , по условію, равняется BC . Тогда $\angle BOC = \angle DO'E$; $\angle ADO' = \angle AEO' = d$ и слѣд. $\angle DO'E + \angle DAE = 2d$; но $\angle DO'E = \angle BOC = 2\angle BAC$, $\angle DAE = \angle BAC$, а потому $3\angle BAC = 2d$, а $\angle BAC = \frac{2}{3}d$. Продолжимъ $O'D$ на $DG = DO'$; тогда $AG = AO'$ и $\angle GAO' = 2\angle DAO' = \angle DAE = \angle BAC = \frac{2}{3}d$; слѣд. $\triangle AGO'$ равносторонній.

Рѣшеніе. Изъ O' опишемъ окружность радіусомъ = двойному радіусу этой окружности, кот. пересѣчетъ окружность O въ A . Точка A искомая. Задача возможна, когда $OO' > OD$ и $< 3O'D$.

360. Построимъ на AB , при точкѣ A , уголъ BAC , равный данному φ , и изъ D , середины AB , возставимъ $\perp DX$; также возставимъ $\perp AY$ къ AC , кот. пересѣчетъ DX въ O , и изъ точки O опишемъ окружность радіусомъ OA . Часть окружности, внѣ $\angle BAC$, будетъ искомая.

361. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ дуга кругового сегмента, описаннаго на AB и вмѣщающаго уголъ φ .

362. 1) Точка M внутри круга O . $\angle AMB = \angle ADB + \angle DBC = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle COD)$; но $\angle AOB = \angle COD$ ($AB = CD$); слѣд. $\angle AMB = \angle AOB$, т.-е. M лежитъ на окружности, описанной около $\triangle AOB$.

2) Точка M внѣ круга O . Продолжимъ CM до Q ; $\angle AMQ = \angle ACB + \angle DAC = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle DOC) = \angle AOB$; слѣд. точки O, M лежатъ по разнымъ сторонамъ AB и $\diamond AOBM$ вписуемый въ кругъ, а потому M лежитъ на окружности, описанной около $\triangle AOB$.

363. E внутри окружности O' . $\angle BEA = \angle EDB + \angle DBE = \angle ADB + \frac{1}{2}\angle DBC = \angle ADB + \frac{1}{2}(2d - \angle BCA - \angle ADB) = d - \frac{1}{2}\angle BCA + \frac{1}{2}\angle ADB$; но $\angle BCA$ и $\angle ADB$ постоянные, какъ бы не проводили CD , а потому $\angle BEA$ постоянный, т.-е. иском. геом. мѣсто E будетъ окружность, описанная на AB .

364. $\angle PCQ = 2d - \frac{1}{2}(\angle CPQ + \angle CQP) = 2d - (\angle OAP + \angle O'DQ) = \angle OAO'$; но $\angle OAO' = \angle OBO'$, а потому геом. мѣсто C будетъ дуга сегмента OBO' .

365. Проведемъ прямую $XY \perp BC$, на кот. отложимъ $CD = CD' = BC$. Искомое геометрическое мѣсто будетъ окружности, описанныя на CD и CD' , какъ діаметрахъ.

366. Опишемъ на AB сегментъ, вмѣщающій $\angle \varphi$, котораго дуга пересѣчетъ MN въ C и C' . Точки C и C' будутъ искомыя.

367. Если точки A и B по одну сторону MN , то опишемъ на AB сегментъ, вмѣщающій уголъ $180^\circ - \varphi$, дуга котораго пересѣчетъ MN въ C и C' . Точки C и C' будутъ искомыя.

Если же точки A и B по разнымъ сторонамъ MN , то опустимъ $\perp BD$ на MN и, продолживъ его, отложимъ часть $DB' = DB$ и относительно точекъ A и B' поступимъ такъ, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

368. Точки пересѣченія дуги сегмента, описаннаго на AB и вмѣщающаго $\angle \varphi$, съ дугою сегмента, описаннаго на CD и вмѣщающаго $\angle \psi$, будутъ искомыя.

369. Опустимъ $\perp AB$ на MN и построимъ $\angle XAB = \angle \varphi$. Положимъ AX пересѣчетъ MN въ точкѣ C . Дуга окружности, описанной изъ A радіу-

сомъ AC и находящаяся по одну сторону съ A относительно MN , будетъ искомая.

370. Отложимъ на MN часть $DE=a$ и на DE , съ той стороны, гдѣ точка A , опишемъ сегментъ DFE , вмѣщающій $\angle \varphi$; проведемъ прямую $AX \parallel MN$, кот. пересѣчетъ дугу DFE въ G и G' . Прямая AB и AC , параллельныя GD и GE , будутъ искомыя. Задача допускаетъ два рѣшенія.

371. Проведемъ въ кругѣ хорды DB и DC , которыя образовали бы $\angle \varphi$, и опустимъ $\perp OE$ на хорду BC ; изъ O опишемъ окружность радіусомъ OE . Касательная, проведенная изъ A къ описанному кругу, будетъ искомая сѣкущая для круга O .

372. Изъ произвольной точки B окружности опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ радіусу данной окружности, которая пересѣчетъ окружность въ C ; изъ O опишемъ окружность, касающуюся хорды BC , а изъ A проведемъ къ ней касательную. Эта касательная будетъ искомая прямая.

373. Впишемъ въ окружности $\angle EDF = \angle \alpha$ и опустимъ $\perp OG$ на хорду EF ; изъ O опишемъ окружность радіусомъ OG , а изъ A проведемъ къ ней касательную, которая пересѣчетъ данную окружность въ точкахъ K и L ; прямая KB пересѣчетъ окружность въ M . $\triangle KLM$ будетъ искомымъ.

374. На AB и BC опишемъ внутри \triangle сегменты, вмѣщающіе углы въ 120° , дуги кот. пересѣкутся въ точкѣ G . Точка G будетъ искомая.

375. Проведемъ въ окружности хорду $BC=a$ и на BC опишемъ сегментъ BDC , вмѣщающій $\angle \varphi$; опишемъ изъ O окружность радіусомъ OA , которая пересѣчетъ дугу сегмента въ D и D' ; изъ A опишемъ дуги радіусами DB и DC , которыя пересѣкутъ данную окружность въ E и F . Хорда EF будетъ искомая.

376. Изъ произвольной точки B прямой KL опишемъ дугу радіусомъ a , кот. пересѣчетъ MN въ C ; на BC опишемъ сегментъ BDC , вмѣщающій $\angle \varphi$, и проведемъ прямую $AX \parallel MN$, кот. пересѣчетъ дугу сегмента въ D . Изъ точки A проведемъ прямыя, параллельно DB и DC , кот. пересѣкутъ прямыя MN и KL въ E и F . Отрѣзокъ EF будетъ искомымъ.

377. Изъ произвольной точки B меньшей окружности опишемъ дугу радіусомъ a , кот. пересѣчетъ большую окружность въ C ; на BC опишемъ сегментъ BDC , вмѣщающій $\angle \varphi$, и изъ O опишемъ окружность радіусомъ OA , кот. пересѣчетъ дугу сегмента въ D . Изъ A опишемъ дугу радіусомъ DB , кот. пересѣчетъ меньшую окружность въ E , и еще дугу радіусомъ DC , кот. пересѣчетъ большую окружность въ F . Отрѣзокъ EF будетъ искомымъ.

378. Изъ середины хорды AB возставимъ \perp , который пересѣчетъ дугу въ C . Точка C будетъ искомая.

379. Уголь ACB будетъ искомымъ, гдѣ C точка касанія.

380. Опишемъ окружность O' , проходящую чрезъ O и A и пересѣкающую данную окружность въ P и Q ; возьмемъ на $\cup PQ$, внутри окружности O' , точку D и продолжимъ CD до пересѣченія съ окружностью O' въ E . Тогда $\angle ODA > \angle OEA$ и $\angle OPA$; слѣдовательно, $\angle OPA$ будетъ наибольшимъ тогда, когда D и E совпадаютъ, т.-е. когда окружность O' касается окружности O . Въ этомъ случаѣ, точки O, O' и точка B касанія

лежать на прямой и $\angle OAB$ будет прямой, т.-е. искомая точка лежитъ на пересѣченіи окружности O съ \perp , возставленнымъ изъ A къ OA .

381. $\angle BOC = 2d - (\angle OBC + \angle OCB) = 2d - (\angle OCA + \angle OCB) = 2d - \angle C$; также $\angle AOB = 2d - \angle B$. Слѣдовательно, надо на BC и AC описать сегменты, вмѣщающіе углы $2d - C$ и $2d - B$. Точка O пересѣченія сегментовъ будетъ искомая.

382. 1) Искомая точка P внутри $\triangle ABC$. Тогда $\angle ABP = \angle ACP$, $\angle BAP = \angle BPC$ и $\angle CBP = \angle CAP$; слѣдовательно $\angle ACP + \angle BCP + \angle CAP = d$, т.-е. $AP \perp BC$. Также $BP \perp AC$ и $PC \perp AB$, т.-е. P орто-центръ для $\triangle ABC$.

2) Точка P внѣ $\triangle ABC$. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

383. На AB и BC , внѣ $\triangle ABC$, опишемъ сегменты, вмѣщающіе $\angle D$ и E ; проведемъ къ нимъ сѣкущую MBN такъ, чтобы сумма полученныхъ на ней хордъ NB и MB равнялась сторонѣ DE данного \triangle (II, 316). Продолжимъ MA и NB до ихъ встрѣчи въ P и получимъ искомый $\triangle MNP$.

384. Пусть M , N и P точки пересѣченія данныхъ прямыхъ; O данная окружность. Опустимъ $\perp OD$ на NP и построимъ $\angle DOX = \angle NMP$; прямая OX пересѣчетъ окружность въ B ; проведемъ хорду $BC \parallel NP$ и хорду $BA \parallel NM$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

385. Рѣшеніе то же, что въ 383 задачѣ.

386. Пусть въ $\triangle ABC$ уголъ B меньшій. На сторонахъ \triangle и внѣ его опишемъ сегменты: AMB , BNC и APC , вмѣщающіе углы въ 60° , и чрезъ B проведемъ въ сегментахъ AMB и BNC сѣкущую DBE , параллельно прямой, соединяющей центры этихъ дугъ, гдѣ D на $\cup AMB$, а E на $\cup BNC$. Проведя прямая DA и EC до встрѣчи ихъ въ точкѣ F , получимъ искомый $\triangle DEF$.

387. Въ большей окружности построимъ вписанный $\angle DME = \angle B$ и на хордѣ DE опишемъ дугу, вмѣщающую уголъ $= 2d - C$, кот. пересѣчетъ меньшую окружность въ F и G ; проведемъ прямая EF и EG до встрѣчи съ большою окружностью въ H и K . $\triangle DFH$ и EGK будутъ искомыя.

388. Если A и B по разнымъ сторонамъ MN , то опишемъ на AB сегментъ, вмѣщающій уголъ $2d - \varphi$, кот. дуга пересѣчетъ прямую MN въ C ; точка C будетъ искомая. Если же A и B по одну сторону MN , то, опустивъ $\perp BD$ на MN и отложивъ $DB' = DB$, опишемъ на AB' сегментъ, вмѣщающій уголъ $2d - \varphi$, котораго дуга пересѣчетъ MN въ точкѣ C . Точка C будетъ искомая.

389. Означимъ буквою ψ острый уголъ, составленный прямыми AB и MN . Опустимъ $\perp BD$ на MN и, продолживъ его, отложимъ часть $DE = DB$; на AE опишемъ сегментъ, вмѣщающій уголъ $2d - (\varphi + 2\psi)$, дуга котораго пересѣчетъ MN въ C . Точка C будетъ искомая.

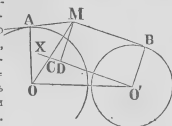
390. На OO' опишемъ сегментъ, вмѣщающій уголъ $2d - \frac{1}{2}\varphi$, кот. дуга пересѣчетъ касательную въ точкахъ M и M' . Точки M и M' будутъ искомыя.

391. Опустимъ $\perp O'A$ на касателн. и, продолживъ его, отложимъ часть $AO' = AO'$ и поступимъ относительно окружн. O и O' какъ въ 390 задачѣ.

392. Положимъ, что задача рѣшена и M (фиг. 35) искомая точка, т.-е. касательная MA къ кругу O равна a и касательная MB къ кругу O' со-

составляетъ съ MA уголъ $\angle AMB = \angle \varphi$. Въ $\triangle AOM$ катеты даны, а потому гипотенуза OM и $\angle AMO$ извѣстны. Проведемъ $OX \parallel BM$ до встрѣчи съ OM въ X и опустимъ $\perp MD$ на $O'C$; тогда въ $\triangle CDM$ катетъ MD равенъ радиусу окружности O' и $\angle CMD = \varphi - d - \angle AMO$, т.-е. извѣстенъ, а слѣдовательно извѣстна гипотенуза CM и $OC = OM - CM$, т.-е. точка C лежитъ на окружности, описанной изъ O радиусомъ OC . Также $\angle OSC' = \angle OMB$ извѣстенъ, т.-е. точка C лежитъ на дугѣ сегмента, описаннаго на OO' и вмѣщающаго $\angle OSC'$, равный $\varphi - \angle AMO$. Рѣшеніе очевидно.

Фиг. 35.



393. $\odot CA = \odot CB$; слѣдовательно, $CA = CB$ и $\angle CBA = \angle CAB = \angle CPB$; $\angle CBQ = \angle QPB$, а потому окружность, описанная около $\triangle BQP$ касается BC въ B ; слѣд. ея центръ лежитъ на прямой $BX \perp BC$. И такъ, искомое геометрическое мѣсто будетъ прямая BX .

394. Данъ кругъ O ; точки A и B и сторона a . Проведемъ въ кругѣ хорду $CD = a$ и на AB опишемъ сегментъ, вмѣщающій \angle , равный вписанному \angle , опирающемуся на хорду CD . Пусть G и H точки пересѣченій дуги сегмента съ окружностью O ; проведемъ прямыя AG, BG, AH и BH , которыя пересѣкутъ окружность O въ F, E, K и L . $\triangle GEF$ и HKL будутъ искомыя.

395. Пусть N точка пересѣченія прямыхъ AQ и BP . $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} d$; $\angle PBM = d$, а потому $\angle PMB = \frac{3}{2} d$ и, слѣдовательно, $BM = BP$; $\angle MAN = d = \angle MBN$, а потому около $\diamond MBNA$ можно описать окружность; тогда $\angle BMN = \angle BAN = \angle BPQ$. Слѣдовательно, $\triangle BMN = \triangle BPQ$; откуда $MN = PQ$, т.-е. искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность, равная данной и проходящая чрезъ A и B .

396. На гипотенузѣ BC построимъ $\triangle ABC$ и пусть M центръ вписаннаго круга; D пересѣченіе прямыхъ AM и BC . Тогда $\angle BMD = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} A$ и $\angle CMD = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} A$; слѣд. $\angle BMC = \frac{1}{2} (B + C) + A$; но $B + C = 90^\circ$ и $\angle A = 90^\circ$, а потому $\angle BMC = 135^\circ$, т.-е. точка M лежитъ на дугѣ сегмента, описаннаго на BC и вмѣщающаго уголъ въ 135° .

397. Пусть $\triangle ABC$ одинъ изъ построенныхъ на BC . Опустимъ \perp -ы BE и CF на стороны AC и AB , кот. пересѣкутся въ M . $\angle BMC = 180^\circ - A$ будетъ одинаковъ для всѣхъ \triangle -въ, а потому искомое geometr. мѣсто будетъ дуга сегмента, построеннаго на BC и вмѣщающаго уголъ $180^\circ - A$.

398. Пусть $\triangle ABC$ одинъ изъ построенныхъ на BC . Уголъ $A = 180^\circ - \varphi$, а потому искомое геометрическое мѣсто будетъ дуга сегмента, построеннаго на BC и вмѣщающаго уголъ, равный $180^\circ - \varphi$.

399. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 396 задачи этого отдѣла.

400. Дуга сегмента, описаннаго на AB и вмѣщающаго уголъ въ 45° .

401. Дуга сегмента, описаннаго на AB и вмѣщающаго уголъ въ 135° .

402. Дуга сегмента, описаннаго на OA и вмѣщающаго уголъ въ 45° или 135° , смотря по тому, куда возставленъ $\perp DM$.

403. Въ $\triangle BFC$ видимъ, что AB и DF суть высоты его, а потому CM будетъ тоже высота его и $\angle BMC=90^\circ$. Слѣдовательно, искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность, описанная на BC .

404. P середина $\cup AB$, противъ C , равно отстоитъ отъ A , B и центра вѣнчанаго круга (II, 115, 119), а потому геометрическое мѣсто центровъ будетъ окружность, описанная изъ P радиусомъ PA .

405. На прямой $BC=a$ опишемъ сегментъ BEC , вмѣщающій $\angle A$, и проведемъ прямую $MN \parallel BC$ на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ дугу BEC въ A и A' . $\triangle ABC$ и $A'BC$ будутъ искомые.

406. На прямой $BC=a$ опишемъ сегментъ BEC , вмѣщающій $\angle A$, и изъ середины BC опишемъ дугу радиусомъ m_a , которая пересѣчетъ дугу BEC въ A и A' . $\triangle ABC$ и $A'BC$ будутъ искомые.

407. На AB опишемъ дугу AEB , вмѣщающую $\angle \varphi$, которая пересѣчетъ прямую MN въ точкахъ C и C' . $\triangle ABC$ и ABC' будутъ искомые.

408. Рѣшеніе то же, что въ 407 задачѣ этого отдѣла.

409. На произвольной прямой отложимъ часть $AD=m_a$ и на AD построимъ съ одной стороны сегментъ ABD , вмѣщающій $\angle B$, а съ другой — сегментъ AND , вмѣщающій $\angle C$. Черезъ D , точку пересѣченія дугъ сегментовъ, проведемъ сѣкущую BDC такъ, чтобы $BD=CD$ (II, 217). $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

410. На прямой $BC=a$ опишемъ окружность $BECF$ такъ, чтобы дуга BEC вмѣщала $\angle A$; чрезъ середину дуги BFC и точку D проведемъ прямую, которая пересѣчетъ дугу BEC въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

411. На прямой $BC=a$ опишемъ сегментъ BDC , вмѣщающій уголъ $2d-\varphi$, и проведемъ прямую $MN \parallel BC$ на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ дугу сегмента въ точкахъ A и A' . $\triangle ABC$ и $A'BC$ будутъ искомые.

412. На прямой $BC=a$ опишемъ сегментъ BEC , вмѣщающій $\angle A$; раздѣлимъ BC пополамъ въ точкѣ D и на DC опишемъ сегментъ DFC , вмѣщающій уголъ $d-\varphi$. Означивъ буквою A точку пересѣченія дугъ сегментовъ, получимъ искомый $\triangle ABC$.

413. Начертимъ прямую MN и проведемъ прямую $KL \parallel MN$ на разстояніи h_a ; изъ произвольной точки B прямой MN опишемъ дугу радиусомъ $2m_b$, кот. пересѣчетъ прямую KL въ D . Раздѣлимъ BD въ точкѣ E пополамъ и на BE опишемъ дугу, вмѣщающую $\angle A$, кот. пересѣчетъ прямую KL въ точкѣ A ; проведемъ прямую AE и отложимъ $CE=AE$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

414. На прямой $CD=m_c$ опишемъ дугу CED , вмѣщающую $\angle A$, и на CD отложимъ часть CF , равную $\frac{2}{3}m_c$; изъ точки F опишемъ дугу радиусомъ $\frac{2}{3}m_a$, которая пересѣчетъ дугу CED въ A , а на продолженіи AD отложимъ часть $DB=DA$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

415. Отложимъ прямую $AE=2m_a$ и раздѣлимъ ее въ точкѣ D пополамъ; на DE опишемъ сегментъ DGE , вмѣщающій $\angle B$; отложимъ на AE часть $AF=\frac{2}{3}m_a$ и изъ точки F опишемъ дугу радиусомъ $\frac{2}{3}m_c$, которая пересѣчетъ дугу DGE въ точкѣ C ; продолжимъ CD на длину $DB=DC$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

416. Изъ точки D прямой XU возставимъ $\perp DH$, на которомъ отложимъ часть $DA=h_a$; изъ A опишемъ дуги радиусами l_a и m_a , которыя пересѣкутъ прямую XU въ E и F ; возставимъ $\perp FK$ къ XU , который пересѣчетъ продолженіе AE въ G . Изъ середины AG возставимъ \perp , который пересѣчетъ FK въ O , и изъ O опишемъ окружность радиусомъ OA , которая пересѣчетъ прямую XU въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

417. Пусть D , E и F основанія высотъ. Въ $\triangle DEF$ проведемъ равнодѣляющія угловъ, которыя пересѣкутся въ O , и прямыя: $DH \perp DO$, $EY \perp EO$ и $FZ \perp FO$, которыя въ пересѣченіи дадутъ искомымъ $\triangle ABC$.

418. На $AC=k$ опишемъ дугу AEC , вмѣщающую $\angle \varphi$, а изъ O , середины AC , опишемъ окружность радиусомъ $\frac{1}{2}l$, которая пересѣчетъ дугу въ B . Продолживъ BO на длину $OD=OB$, получимъ искомымъ параллелограммъ $ABCD$.

419. Построимъ $\triangle ABC$, въ которомъ $AB=a$, $BC=b$ и $AC=k$; на сторонѣ AC опишемъ (въѣ треугольника) дугу AEC , вмѣщающую $\angle D$, а изъ B опишемъ другую дугу радиусомъ l , которая пересѣчетъ дугу AEB въ D . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

420. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

421. На прямой $AC=k$ опишемъ на разныхъ сторонахъ ея двѣ дуги AEC и AFC , вмѣщающія углы B и D ; изъ A опишемъ дугу радиусомъ a , которая пересѣчетъ дугу AEC въ B , а изъ C опишемъ дугу радиусомъ c , которая пересѣчетъ дугу AFC въ D . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

422. Построимъ $\triangle ABD$, въ которомъ $AB=a$, $AD=d$ и $\angle BAD=\angle A$; на BD , въѣ $\triangle ABD$, опишемъ дугу BKD , вмѣщающую $\angle C$, а изъ точки A опишемъ дугу радиусомъ k , которая пересѣчетъ дугу BKD въ точкѣ C . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

423. Построимъ $\triangle ABC$, въ которомъ $AB=a$, $BC=b$ и $AC=k$. На AB и BC опишемъ дуги, вмѣщающія $\angle \angle \varphi$ и ψ , которыя пересѣкутся въ точкѣ D . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

424. Построимъ $\triangle ABC$, въ которомъ $AC=a$, $BC=b$ и $\angle ABC=\angle B$; на AC опишемъ дугу AKC , вмѣщающую $\angle D$, а изъ точки C опишемъ дугу радиусомъ c , которая пересѣчетъ дугу AKC въ D . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

425. Построимъ $\square BEDF$, въ кот. $BE=k$, $BD=l$ и $BF=2g$. На BE и DF , внутри параллелограмма, опишемъ сегменты, вмѣщающіе $\angle \angle B$ и D , которыхъ дуги пересѣкутся въ точкѣ C ; проведемъ прямую $CX \parallel EB$ и отложимъ на ней часть $CA=k$. $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

426. Прямая AB раздѣлитъ кругъ O на два сегмента: ADB и AEB . Опишемъ на AB сегментъ ACB , вмѣщающій половину угла, вписаннаго въ сегментъ ADB , а изъ A опишемъ дугу радиусомъ s , которая пересѣчетъ дугу ACB въ F ; прямой AF пересѣчетъ дугу ADB въ M . Точка M будетъ искомаю.

427. Прямая AB раздѣлитъ кругъ O на два сегмента: ADB и AEB ; означимъ уголъ, вписанный въ сегментъ ADB , буквою φ . На AB , внутри сегмента ADB , опишемъ дугу ACB , вмѣщающую уголъ, равный $90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$, а изъ A опишемъ дугу радиусомъ d , кот. пересѣчетъ дугу ACB въ F . Точка M пересѣченія данной окружности съ прямою AF будетъ искомаю.

и хорду $AC=k$; изъ точки C опишемъ дугу радіусомъ e , которая пересѣчетъ окружность въ D . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

441. Опишемъ окружность O радіусомъ R и проведемъ хорду $AB=a$ и хорду $AC=k$; изъ B опишемъ дугу радіусомъ l , которая пересѣчетъ окружность въ D . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

442. Опишемъ окружность O радіусомъ R и проведемъ хорду $AB=a$; на AB построимъ $\angle BAX=\angle A$, котораго бокъ AX пересѣчетъ окружность въ D , а изъ D опишемъ дугу радіусомъ e , которая пересѣчетъ окружность въ C . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

443. Опишемъ окружность радіусомъ R и проведемъ хорду $AB=a$; на AB построимъ $\angle ABX=180^\circ-D$ и $\angle BAY=180^\circ-C$; прямая BX и AY пересѣкутъ окружность въ C и D . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

444. Опишемъ окружность радіусомъ R и проведемъ хорду $AB=a$ и хорду $BC=b$; построимъ $\angle BAY=\angle A$, котораго бокъ AY пересѣчетъ окружность въ D . $\diamond ABCD$ будетъ искомымъ.

445. Проведемъ прямую и отложимъ на ней часть $BC=a$; изъ точекъ B и C опишемъ дуги радіусами $2R$ и $2R'$, которыя пересѣкутся въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

446. Проведемъ прямую и отложимъ на ней часть $AD=m_a$; чрезъ середину AD проведемъ прямую $XY \perp AD$; изъ A опишемъ дугу радіусомъ R , кот. пересѣчетъ XY въ точкѣ O и изъ O опишемъ окружность AMD радіусомъ R ; опишемъ изъ A еще дугу радіусомъ R' , кот. пересѣчетъ XY въ точкѣ O' и изъ O' опишемъ окружность AND радіусомъ R' . Чрезъ точку D проведемъ сѣкущую такъ, чтобы хорды BD и DC , полученные на ней въ окружностяхъ O и O' , были равны (II, 217). $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

447. Изъ точки D , взятой на прямой XY , возставимъ $\perp DE$; въ $\angle XDE$ и YDE опишемъ окружности O и O' радіусами r и r' , касающіяся боковъ, и на прямой OO' опишемъ сегментъ, вмѣщающій $\frac{1}{2}\angle A$, котораго дуга пересѣчетъ DE въ точкѣ A ; изъ A проведемъ касательныя къ кругамъ O и O' , кот. пересѣкутъ прямую XY въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

448. Опишемъ окружность радіусомъ r и чрезъ произвольную точку D окружности проведемъ касательную, на которой отложимъ часть $DB=DC=\frac{1}{2}a$; проведемъ касательныя изъ B и C къ окружности, которыя пересѣкутся въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

449. Опишемъ окружность радіусомъ R и въ ней проведемъ хорду $BC=a$; изъ середины BC возставимъ перпендикуляръ, который пересѣчетъ окружность въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

450. Опишемъ окружность O радіусомъ R и въ ней проведемъ діаметръ BC ; изъ точки C опишемъ дугу радіусомъ b , которая пересѣчетъ окружность въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

451. Пусть ABC искомымъ \triangle . Тогда $AB+AC=2r+BC$ (II, 102), а потому, отложивъ на произвольной прямой часть $BC=a$, опишемъ на BC сегментъ BDC , вмѣщающій уголъ $\frac{1}{2}d$ и изъ B опишемъ дугу радіусомъ $2r+a$, которая пересѣчетъ дугу сегмента въ D . Изъ C опустимъ $\perp CA$ на BD и получимъ искомымъ $\triangle ABC$.

452. Опишем окружность O радиусомъ R и проведемъ въ ней диаметръ BC ; возставимъ $\perp OE$ къ BC , который пересѣчетъ окружность въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

453. Опишемъ окружность радиусомъ r и чрезъ какую-либо точку ея D проведемъ касательную EDF ; проведемъ еще къ окружн. двѣ касательныя подъ углами A и B къ EF . Эти три касательныя составятъ искомый \triangle .

454. Опишемъ окружность радиусомъ R и построимъ въ ней вписанный $\angle BMC = \angle A$; на BC построимъ $\angle XBC = \angle B$, сторона котораго BX пересѣчетъ окружность въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

455. (II, 454). 456. (II, 453).

457. Искомый \triangle получимъ въ пересѣченіи двухъ внѣшнихъ касательныхъ и одной внутренней къ даннымъ кругамъ.

458. Искомый \triangle получимъ въ пересѣченіи двухъ внутреннихъ касательныхъ и одной внѣшней къ даннымъ кругамъ.

459. Соединимъ прямыми центры круговъ и изъ вершинъ полученнаго \triangle опустимъ перпендикуляры на противоположныя стороны. Основанія этихъ перпендикуляровъ будутъ вершинами искомага треугольника.

460. Дана A вершина \triangle ; P ортоцентръ и O центръ описанной окружности. Опишемъ изъ O окружность радиусомъ OA и проведемъ прямую AP , которая пересѣчетъ окружность въ D . Проведемъ хорду $BC \perp AD$ и проходящую чрезъ середину PD . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

461. Пусть A вершина; J и O центры вписаннаго и описаннаго круговъ. Опишемъ изъ O окружность радиусомъ OA и проведемъ прямую AJ , кот. пересѣчетъ окружность въ F ; изъ F опишемъ окружность радиусомъ FJ , кот. пересѣчетъ окружность O въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

462. Опишемъ окружность радиусомъ R и проведемъ въ ней хорду $BC = a$; изъ середины BC опишемъ дугу радиусомъ m_a , которая пересѣчетъ окружность въ A и A' . $\triangle ABC$ и $A'BC$ будутъ искомыя.

463. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и проведемъ равнодѣлящую угла, на которой отложимъ часть $AD = l_a$. Опишемъ окружность радиусомъ r , касающуюся боковъ $\angle XAY$ (II, 274), и чрезъ D проведемъ касательную къ этой окружности, кот. пересѣчетъ бока угла въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

464. Пусть $a + b = s$. Опишемъ окружн. радиусомъ R и впишемъ въ ней $\angle BDC = \angle A$; на продолженіи хорды BC отложимъ $BE = s$ и изъ C опишемъ дугу радиусомъ CE , которая пересѣчетъ $\cup BDC$ въ A . $\triangle ABC$ искомый.

465. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

466. Опишемъ окружность изъ O радиусомъ R и проведемъ въ ней хорду $AB = c$. Проведемъ касательную AD къ кругу и построимъ $\angle DAE = \angle B - \angle A$ (E на окружности); проведемъ равнодѣлящую $\angle EAB$, которая пересѣчетъ окружность въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

467. Начертимъ окружн. радиусомъ R и построимъ вписанный $\angle BDC = \angle A$; проведемъ прямую $XU \parallel$ хордѣ BC на разстояніи h_a , кот. пересѣчетъ окружность въ точкахъ A и A' . $\triangle ABC$ и $A'BC$ будутъ искомыя.

468. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и опишемъ окружность радиусомъ r , касающуюся боковъ угла (II, 274); изъ A опишемъ окружность радиусомъ

h_a и проведемъ къ этимъ окружностямъ касательную, которая пересѣчетъ бока $\angle XAY$ въ точкахъ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

469. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и опишемъ окружность радіусомъ r_a , касающуюся боковъ угла; изъ A опишемъ окружность радіусомъ h_a и проведемъ внутреннюю касательную къ этимъ окружностямъ, которая пересѣчетъ бока $\angle XAY$ въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

470. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и опишемъ окружность радіусомъ r_b , касающуюся стороны AY и продолженія стороны XA ; изъ A опишемъ окружность радіусомъ h_a и проведемъ внѣшнюю касательную къ окружностямъ, кот. пересѣчетъ бока $\angle XAY$ въ точкахъ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

471. Опишемъ окружность радіусомъ R и проведемъ въ ней хорду $BC = a$. На продолженіи CB отложимъ часть $BE = BC$ и изъ E опишемъ дугу радіусомъ $2m_b$, кот. пересѣчетъ окружность въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

472. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

473. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и опишемъ окружности радіусами r и r_a , касающіяся сторонъ угла; проведемъ къ нимъ внутреннюю касательную, которая пересѣчетъ бока $\angle XAY$ въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

474. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и опишемъ окружн. O радіусомъ r_a , касающуюся боковъ угла, и окружн. O' радіусомъ r_b , касающуюся AY и продолженія прямой XA ; проведемъ прямую OO' , кот. пересѣчетъ AY въ C , а изъ C проведемъ касательную къ кругу O , кот. пересѣчетъ прямую AX въ B . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

475. Построимъ $\triangle ADO$, въ которомъ катетъ $AD = \frac{1}{2}(b+c-a)$ и $\angle OAD = \frac{1}{2}A$. Изъ O опишемъ окружность радіусомъ OD , а изъ A окружность радіусомъ h_a ; проведемъ къ окружностямъ общую касательную MN и изъ A касательную къ окружности O , которая пересѣчетъ MN въ B . Продолживъ AD до встрѣчи съ MN въ C , получимъ искомый $\triangle ABC$.

476. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и на сторонѣ AY отложимъ часть $AD = \frac{1}{2}(b+c-a)$. Проведемъ AE равнодѣлящую $\angle XAY$ и возставимъ $\perp DK$ къ AY , кот. пересѣчетъ AE въ O ; изъ O опишемъ окружность радіусомъ OD и отложимъ на AE часть $AF = l_a$; проведемъ изъ F касательную къ окружности, кот. пересѣчетъ бока $\angle XAY$ въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

477. Построимъ $\angle XAY = \angle A$ и проведемъ равнодѣлящую его AE . На AY отложимъ часть $AD = \frac{1}{2}(b+c-a)$ и возставимъ $\perp DF$ къ AY , который пересѣчетъ AE въ O ; изъ O опишемъ окружность радіусомъ OD и еще окружн. O' радіусомъ r_a , касающуюся боковъ $\angle A$. Къ этимъ окружностямъ проведемъ внутреннюю касательную, которая пересѣчетъ бока $\angle XAY$ въ точкахъ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

478. На произвольной прямой XU отложимъ часть $DE = a$ и, по одну ея сторону, опишемъ окружности радіусами r и r_a , касающіяся прямой XU въ точкахъ D и E ; проведемъ къ этимъ окружностямъ внѣшнюю касательную MN , которая пересѣчетъ прямую XU въ A ; проведемъ къ нимъ внутреннюю касательную, которая пересѣчетъ прямыя XU и MN въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

479. На произвольной прямой XU отложимъ часть $DE=a$ и по разнымъ сторонамъ ея опишемъ окружности O и O' радиусами r_b и r_c , касающіяся прямой XU въ точкахъ D и E ; изъ A пересѣченія прямыхъ OO' и XU проведемъ касательную AK къ кругу O и внѣшнюю касательную къ кругамъ O и O' , которая пересѣчетъ прямые AK и XU въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

480. На произвольной прямой XU отложимъ часть $FG=b-c$ и по разнымъ сторонамъ ея опишемъ окружности O и O' радиусами r и r_a , касающіяся прямой XU въ F и G ; проведемъ внѣшнія касательныя къ кругамъ O и O' , которыя пересѣкутъ прямую XU въ B и C , а сами пересѣкутся въ точкахъ A и A' . $\triangle ABC$ или $\triangle A'BC$ будетъ искомымъ.

481. На произвольной прямой XU отложимъ часть $FG=b+c$; возставивъ $\perp FK$ къ XU , отложимъ на немъ $FO=r_b$ и изъ O опишемъ окружн. радиусомъ OF . Возставимъ $\perp GL$ къ XU и на немъ отложимъ $GO'=r_c$ и изъ O' опишемъ окружн. радиусомъ $O'G$; далѣе поступимъ какъ въ 480 задачѣ.

482. Построимъ $\angle XKY=\frac{1}{2}(B-C)$ и проведемъ по одну сторону KX двѣ параллельныя ей прямыя, на разстояніи r_c и r_b , которыя пересѣкутъ прямую KX въ точкахъ O и O' ; изъ O опишемъ окружность радиусомъ r_c , а изъ O' радиусомъ r_b . Къ этимъ кругамъ проведемъ двѣ внутреннихъ касательныхъ, которыя пересѣкутся въ точкѣ A и пересѣкутъ прямую KY въ точкахъ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

483. Построимъ $\angle XAY=\angle A$ и отложимъ на AX часть $AD=p$ и изъ точки D возставимъ \perp къ AX , который пересѣчетъ равнодѣлящую $\angle XAY$ въ точкѣ O ; опишемъ изъ O окружность радиусомъ OD , а изъ A радиусомъ h_a , и проведемъ къ нимъ внутреннюю касательную, которая пересѣчетъ бока $\angle XAY$ въ точкахъ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

484. На произвольной прямой XU отложимъ часть $AD=p$ и изъ точки D возставимъ \perp къ XU , на которомъ отложимъ часть $DO=r_a$; изъ точки O опишемъ окружность радиусомъ r_a , а изъ A проведемъ къ ней касательную AE . Опишемъ окружность радиусомъ r , касающуюся боковъ $\angle EAY$, и проведемъ внутреннюю касательную къ этимъ окружностямъ, которая пересѣчетъ AD и AE въ точкахъ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

485. Построимъ $\angle XAY=\angle A$ и опишемъ окружность радиусомъ r , касающуюся боковъ угла; на AX отложимъ часть $AD=p$ и изъ точки D возставимъ \perp къ AX , который пересѣчетъ равнодѣлящую $\angle XAY$ въ точкѣ O' . Дальнѣйшее построеніе то же, что и въ предыдущей задачѣ.

486. Построимъ $\angle XAY=\angle A$ и опишемъ окружн. O радиусомъ r , касающуюся AY въ D ; отложимъ на DY часть $DE=a$ и изъ D возставимъ \perp къ AY , кот. пересѣчетъ равнодѣлящую $\angle XAY$ въ O' ; изъ O' опишемъ окружн. радиусомъ $O'D$ и проведемъ внутреннюю касательную къ описаннымъ окружн, кот. пересѣчетъ бока $\angle XAY$ въ B и C . $\triangle ABC$ искомымъ.

487. Опишемъ окружность радиусомъ R и впишемъ въ него $\angle BDC=\angle A$; проведемъ прямую $MN \parallel$ хордѣ BC на разстояніи r съ той стороны, гдѣ точка D , и изъ E , середины дуги BC , противолежащей $\angle D$, опишемъ дугу радиусомъ EB , кот. пересѣчетъ прямую MN въ точкѣ O . Продолживъ EO до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ A , получимъ искомымъ $\triangle ABC$.

Во второмъ случаѣ, надо, описавъ окружность радіусомъ R , провести въ ней хорду $BC=a$ и далѣе поступить, какъ въ первомъ случаѣ.

488. Пусть $b+c=s$. Опишемъ окружность радіусомъ R и проведемъ въ ней хорду $BC=a$; на этой окружности опредѣлимъ такую точку A чтобы $AB+AC=s$ (II, 426). $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

489. (II, 488). 490. (II, 488). 491. (II, 488).

492. На произвольной прямой XU отложимъ часть $AD=\frac{1}{2}(b+c-a)$ и $AE=\frac{1}{2}(b+c+a)$; изъ D возставимъ перпендикуляръ къ AD и отложимъ на немъ часть $DO=r$; изъ O опишемъ окружность радіусомъ r и къ ней проведемъ касательную AF ; изъ E возставимъ \perp къ AE , который пересѣчетъ прямую AO въ O' и изъ O' опишемъ окружность радіусомъ $O'E$. Проведемъ внутреннюю касательную къ окружностямъ, которая пересѣчетъ прямые XU и AF въ точкахъ B и C , получимъ искомымъ $\triangle ABC$.

493. Пусть $b-c$ равняется d . На прямой XU отложимъ $BD=\frac{1}{2}(a-d)$ и $DC=\frac{1}{2}(a+d)$; возставимъ $\perp DE$ къ BC и на DE отложимъ $DO=r$; изъ O опишемъ окружность радіусомъ OD ; проведемъ изъ B и C касательныя къ кругу O , получимъ въ пересѣченіи ихъ точку A . $\triangle ABC$ искомымъ.

494. Опишемъ окружн. O радіусомъ R и въ ней проведемъ хорду $BC=a$; изъ O опишемъ окружн. радіусомъ d и раздѣлимъ пополамъ въ E дугу BC , кот. лежитъ по другую сторону хорды BC , относительно O ; изъ E опишемъ дугу радіусомъ EB , кот. пересѣчетъ меньшую окружн. въ O' и O'' . Изъ O' или O'' опишемъ окружн., касающуюся хорды BC , а изъ B и C проведемъ къ ней касательныя, кот. пересѣкнутся въ точкѣ A , лежащей на о. окружн. радіуса R . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ. Если бы окружность радіуса d пересѣкла хорду BC , то точку E надо взять въ серединѣ другой дуги BC окружности O .

495. На произвольной прямой отложимъ часть $OO'=d$ и на OO' , какъ діаметръ, опишемъ окружность; проведемъ въ ней хорду $BC=a$ и построимъ $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle B$, гдѣ точка O на окружности. Построимъ $\angle ABO=\angle OBC$ и $\angle ACO=\angle OCB$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

496. $ABCD$ данный \diamond . Положимъ, что задача рѣшена и $\square SPQR$ искомымъ, гдѣ SP , PQ , QR и RS проходятъ чрезъ A , B , C и D . Діагональ PR дѣлитъ пополамъ $\angle APB$ и, слѣдовательно, проходитъ чрезъ E , середину $\cup AB$ окружности, описанной на AB , какъ діаметръ. Точно такъ же PR проходитъ чрезъ F середину $\cup CD$ окружности, описанной на CD , какъ діаметръ.

Рѣшеніе. На AB и CD , какъ діаметрахъ, опишемъ окружности O и O' и дуги AB и CD раздѣлимъ пополамъ въ E и F . Прямая, проходящая чрезъ E и F , пересѣчетъ окружности O и O' въ P и R . Тогда, проведя прямые PA , PB , RC и RD , получимъ въ ихъ пересѣченіи искомымъ квадратъ. Задача допускаетъ 6 рѣшеній.

497. На AU отложимъ часть $AD=p$ и опишемъ окружность O , касающуюся бока AX и бока AU въ точкѣ D ; изъ M проведемъ касательную къ окружности, которая пересѣчетъ бока угла XAU въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

2) Число сторон четное. Тогда от какой-либо точки M' окружности опишем ломаную линию $M'A'P'Q'T'S'$, которой стороны параллельны данным прямым, и из A проведем стѣкшую къ данному кругу, параллельно прямой $S'M'$, кот. пересѣчетъ окружность въ S и M . Точка M будетъ одна изъ вершинъ искомага многоугольника. Построеніе очевидно.

503. На OA построимъ $\angle OAX = \angle \psi$, котораго сторона AX пересѣчетъ прямую OB въ D ; чрезъ три точки A , B и D опишемъ окружность, которая пересѣчетъ данную окружность въ C . Радиусъ OC будетъ искомымъ.

504. На AB опишемъ дугу, вмѣщающую $\angle AOB + \varphi$, которая пересѣчетъ данную окружность въ C . Радиусъ OC будетъ искомымъ.

505. Отложимъ часть $CD = a$ и построимъ $\angle EDC = \delta$ и $\angle GCD = \alpha$. Тогда вершина B четырехугольника лежитъ на окружности O , проходящей чрезъ C и D и касающейся DE въ D ; вершина A четырехугольника лежитъ на окружности O' , проходящей чрезъ C и D и касающейся CG въ C . Продолжимъ ED до F и GC до H и построимъ $\angle FDA' = \gamma$; тогда $\angle FDA' = \angle A'BD = \gamma$ и точка A должна лежать на $\cup BA'$ окружности O , такъ какъ $\angle DBA = \gamma$. Построимъ $\angle HCB' = \beta$; тогда B лежитъ на $\cup AB'$, такъ какъ $\angle CAB = \beta$, а потому точки A и B лежатъ на прямой $A'B'$ (Задача Hansen'a).

506. Искомое geometr. мѣсто точекъ будетъ меньшая изъ дугъ окружности, проходящей чрезъ A , B и C , заключенная внутри $\angle BAC$.

507. Въ $\triangle ABC$ данъ $\angle A$ и сумма s его сторонъ AB и AC . Пусть O центръ описаннаго круга около $\triangle ABC$. Проведемъ равнодѣлящую $\angle A$, которая пересѣчетъ $\cup BC$ въ D ; тогда $BD = CD$. Опустимъ \perp -ы DE и DF на AB и AC . $\triangle EBD = \triangle CDF$; поэтому $BE = CF$. $\triangle AED = \triangle AFD$, а потому $AE = AF$ и $s = AB + AC = AE - BE + AF + FC = 2AE$; откуда $AE = \frac{1}{2}s$. Слѣд. D лежитъ на пересѣченіи двухъ неподвижныхъ прямыхъ AD и ED , а потому она неподвижна. Точка O должна быть на \perp , восставленномъ изъ середины AD , а потому geometr. мѣсто O будетъ прямая.

508. Въ $\diamond ABMC$ видимъ, что $\angle BMC = \angle BMD + \angle CMD$; но $\angle BMD = \angle BFD$ и $\angle CMD = \angle AEF$, а потому $\angle BMC = \angle BFD + \angle AEF = 2d - A$. Слѣд. $\angle BMC$ дополнительный до $2d$ углу A , а потому искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность, описанная около $\triangle ABC$.

509. $\angle FPF' = \angle AHP - \angle HHP' = (\angle BAF - \angle AGH) - (\angle BAF - \angle AG'H) = \angle AG'H - \angle AGH = \angle FGF' - \angle FGC = \angle FEF' - \angle FDC =$ постоянному углу. Слѣдовательно, геометрическое мѣсто точки P будетъ сегментъ, описанный на FF' и вмѣщающій уголъ равный $\angle FEF' - \angle FDC$.

510. (Фиг. 26, стран. 273). $QL = \frac{1}{2}BC$ величина постоянная; $\angle QJL = 2\angle QDL = 2\angle A$ есть величина постоянная; но $JQ = JL$, а потому $\angle JOL = \angle QLJ = 90^\circ - A$; слѣдов. $\triangle QJL$ одинъ и тотъ же при всякомъ положеніи вершины A треугольника. Также $KJ = JQ$ есть величина постоянная, а потому точка J лежитъ на окружности, описанной изъ K радиусомъ JQ .

511. $k - r = 4,5$ саж. и $k + r = 5,1$ саж. 512. $a - (R + r) = 3\frac{35}{39}$ арш. и $a + R + r = 8\frac{19}{38}$ арш. 513. $47^\circ 33' 24''$; $240^\circ 1' 10''$. 514. $42^\circ 6' 52''$. 515. $28^\circ 48''$. 516. $106^\circ 27' 30''$. 517. $82^\circ 30'$ и $97^\circ 30'$. 518. $64^\circ 18' 52''$ и $91^\circ 52' 40''$.

519. $33^{\circ}45'$, $56^{\circ}15'$ и 90° . 520. $68^{\circ}1'12''$. 521. $182^{\circ}20'4''$. 522. $74^{\circ}59'48''$, 5.
 523. $98^{\circ}39'8''$ 524. $55^{\circ}59'36''$. 525. $54^{\circ}25'31''$, 5. 526. $11^{\circ}51'24''$, 5.
 527. $170^{\circ}42'22''$. 528. $173^{\circ}46'13''$ и $186^{\circ}13'47''$. 529. $137^{\circ}57'59''$, 2. 530. 40° .
 531. 30° . 532. $18^{\circ}8'$ и $14^{\circ}30'24''$. 533. 84° и 12° . 534. 51° , 54° и 75° .
 535. $52^{\circ}48'$, $57^{\circ}36'$ и $69^{\circ}36'$. 536. 5, 7 и 9. 537. 13,6 арш. 538. $3\frac{19}{20}$ фута.
 539. 24 саж. 540. $6\frac{5}{9}$ саж.

ОТДѢЛЪ ТРЕТИЙ. 1. По заданію, $MA:MB=M'A:M'B=m:n$; откуда $(MA+MB):MA=(m+n):m$ или $a:MA=(m+n):m$; откуда $MA=\frac{ma}{m+n}$, а $MB=\frac{n}{m}MA=\frac{na}{m+n}$. При $m>n$, $(MA'-M'B):M'A=(m-n):m$ или $a:M'A=(m-n):m$; откуда $M'A=\frac{ma}{m-n}$, а $M'B=\frac{n}{m}M'A=\frac{na}{m-n}$.

2. $MA:MB=M'A:M'B$ или $MA \cdot M'B=MB \cdot M'A$; но $MA=OA+OM$, $MB=OA-OM$, $M'A=OM'+OA$ и $M'B=OM'-OA$; замѣнивъ въ предыдущемъ равенствѣ MA , $M'B$, MB и $M'A$ ихъ величинами, найдемъ: $OA^2=OM \cdot OM'$.

Также $MA=JA-JM$, $MB=JM-JB$, $M'A=JA+JM'$ и $M'B=JM'+JB$; замѣнивъ въ равенствѣ $MA \cdot M'B=MB \cdot M'A$ множители ихъ величинами и сдѣлавъ упрощеніе, найдемъ: $JM^2=JA \cdot JB$.

3. $AM:BM=AM':BM'$, или $AM \cdot BM'=BM \cdot AM'$, или $AM(AM'-AB)=AM'(AB-AM)$; откуда $2AM \cdot AM'=AM \cdot AB+AM' \cdot AB$. Раздѣливши всѣ члены этого равенства на $AM \cdot AM' \cdot AB$, найдемъ: $\frac{2}{AB}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AM'}$.

4. Положивъ, что D между B и C , найдемъ: $AD-BD=AC+CD-BD=CD+BC-BD$, или $AD-BD=2CD$. Возвысивъ въ квадратъ обѣ части этого равенства, получимъ: $AD^2-2AD \cdot BD+BD^2=4CD^2$; откуда $AD^2+BD^2=2AD \cdot BD+4CD^2$.

5. 1) Изъ подобія $\triangle EOB$ и DOC : 2) изъ подобія $\triangle ABD$ и ACE ; 3) изъ подобія $\triangle ABD$ и DOC и 4) изъ подобія $\triangle ACE$ и BOE .

6. $AB \parallel PQ$, а потому $OA:AP=OB:OQ$; также $BC \parallel QR$, а потому $OB:OQ=OC:OR$. Слѣд. $OA:AP=OC:OR$, т.-е. $AC \parallel PR$.

7. Въ $\triangle ABC$ прямые BD и CE суть высоты. $\triangle ABD \sim \triangle ACE$; слѣдовательно, $AE:AD=AC:AB$, т.-е. стороны $\triangle ADE$ и ABC пропорціональны; кромѣ того они имѣютъ общій $\angle A$.

8. Пусть $\triangle ABC$ и DBC имѣютъ одинакія высоты, т.-е. $AD \parallel BC$. Проведемъ прямую $XY \parallel BC$, пересѣкающую AB , AC , DB и DC въ точкахъ M , N , P и Q . $\triangle AMN \sim \triangle ABC$; слѣд. $MN:BC=AM:AB$... (1); $\triangle DPQ \sim \triangle DBC$ и слѣд. $PQ:BC=DB:DP$... (2). Но $MP \parallel AD$, а потому $AM:AB=DB:DP$; тогда изъ (1) и (2) $MN:BC=PQ:BC$ или $MN=PQ$.

9. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$, гдѣ AD и $A'D'$ ихъ высоты, дано: $\angle B=\angle B'$ и $BC:B'C'=AD:A'D'$. $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ и потому $AD:A'D'=AB:A'B'$. Сравнивъ эту пропорцію съ данною, найдемъ $AB:A'B'=BC:B'C'$; кромѣ того $\angle B=\angle B'$, т.-е. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

10. Пусть AD и CE высоты $\triangle ABC$, а $A'D'$ и $C'E'$ высоты $\triangle A'B'C'$. Дано, что $\angle B=\angle B'$ и $AD:A'D'=CE:C'E'$. $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ и потому

$AB : A'B' = AD : A'D'$; $\triangle BCE \sim \triangle B'C'E'$ и потому $BC : B'C' = CE : C'E'$; откуда $AB : A'B' = BC : B'C'$ и $\angle B = \angle B'$. Слѣд. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

11. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$, гдѣ AD и $A'D'$ ихъ высоты, а E и E' середины сторонъ BC и $B'C'$, дано, что $BC : B'C' = AD : A'D' = AE : A'E'$. Слѣдовательно, $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$ и потому $\angle AEB = \angle A'E'B'$; но, по заданію, $\frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}B'C' = AE : A'E'$, или $BE : B'E' = AE : A'E'$, а потому $\triangle ABE \sim \triangle A'B'E'$; откуда $AB : A'B' = BE : B'E' = BC : B'C'$. Кромѣ того $\angle B = \angle B'$; слѣд. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

12. 1) D и D' середины сторонъ AC и $A'C'$ въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$. Дано: $AB : A'B' = AC : A'C' = BD : B'D'$; откуда $AB : A'B' = \frac{1}{2}AC : \frac{1}{2}A'C' = BD : B'D'$, т.-е. $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ и $\triangle BDC \sim \triangle B'D'C'$ и потому $\angle A = \angle A'$ и $\angle C = \angle C'$; слѣд. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. 2) Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$, точки D и D' середины сторонъ BC и $B'C'$; продолжимъ AD на $DE = AD$ и $A'D'$ на $D'E' = A'D'$; тогда $CE = AB$ и $C'E' = A'B'$, $\angle BAD = \angle E$ и $\angle B'A'D' = \angle E'$. Изъ данной пропорціи выходитъ, что $CE : C'E' = AC : A'C' = 2AD : 2A'D' = AE : A'E'$, т.-е. $\triangle ACE \sim \triangle A'C'E'$ и потому $\angle CAE = \angle C'A'E'$. Итакъ, $\angle A = \angle A'$, а стороны, ихъ содержащія, пропорціональны; слѣд. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

13. 1) Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$, точки D и E середины сторонъ AC и AB ; D' и E' середины сторонъ $A'C'$ и $A'B'$; точка O пересѣченіе BD съ CE и O' пересѣченіе $B'D'$ съ $C'E'$. Дано: $BC : B'C' = BD : B'D' = CE : C'E'$. Знаемъ (I, 78), что $OB = \frac{2}{3}BD$ и $OC = \frac{2}{3}CE$; поэтому изъ данной пропорціи выходитъ, что $BC : B'C' = OB : O'B' = OC : O'C'$, т.-е. $\triangle OBC \sim \triangle O'B'C'$, слѣд. $\angle OBC$ и OCB будутъ, соответственно, равны $\angle O'B'C'$ и $\angle O'C'B'$. Въ $\triangle BOE$ и $B'O'E'$, $\angle BOE = \angle B'O'E'$ и, по заданію, $\frac{2}{3}BD : \frac{2}{3}B'D' = \frac{2}{3}CE : \frac{2}{3}C'E'$ или $OB : O'B' = OE : O'E'$, т.-е. $\triangle BOE \sim \triangle B'O'E'$ и $\angle EBO = \angle E'B'O'$; слѣд. $\angle B = \angle B'$. Также покажемъ, что и $\angle C = \angle C'$. 2) Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$, точки D , E , D' и E' середины сторонъ BC , AC , $B'C'$ и $A'C'$; O пересѣченіе BE съ AD и O' пересѣченіе $B'E'$ съ $A'D'$. Дано: $BC : B'C' = AD : A'D' = BE : B'E'$. Изъ данной пропорціи выходитъ, что $\frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}B'C' = \frac{1}{2}AD : \frac{1}{2}A'D' = \frac{2}{3}BE : \frac{2}{3}B'E'$ или $BD : B'D' = OD : O'D' = OB : O'B'$, т.-е. $\triangle OBD \sim \triangle O'B'D'$ и слѣд. $\angle ODB = \angle O'D'B'$ и $\angle ODC = \angle O'D'C'$. Изъ данной пропорціи имѣемъ: $\frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}B'C' = AD : A'D'$, а потому $\triangle ADB \sim \triangle A'D'B'$ и $\triangle ADC \sim \triangle A'D'C'$; слѣдовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

14. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$, точки D , E и F середины сторонъ BC , AC и AB ; D' , E' и F' середины сторонъ $B'C'$, $A'C'$ и $A'B'$; O пересѣченіе AD съ BE и O' пересѣченіе $A'D'$ съ $B'E'$. Дано: $AD : A'D' = BE : B'E' = CF : C'F'$. Изъ этой пропорціи слѣдуетъ, что $\frac{2}{3}AD : \frac{2}{3}A'D' = \frac{1}{3}BE : \frac{1}{3}B'E' = \frac{2}{3}CF : \frac{2}{3}C'F'$ или $AO : A'O' = OE : O'E' = OC : O'C'$, т.-е. (III, 13) $\triangle AOC \sim \triangle A'O'C'$. Дальнѣйшее доказательство сходно съ предыдущимъ.

15. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$ дано, что $\angle B = \angle B'$ и $BC : B'C' = (AB + AC) : (A'B' + A'C')$. Продолжимъ BA на $AD = AC$ и точку D соединимъ съ C ; продолжимъ также $B'A'$ на $A'D' = A'C'$ и точку D' соединимъ съ C' . Видимъ, что $\triangle DBC \sim \triangle D'B'C'$ и потому $\angle D = \angle D'$; но $\angle BAC = \angle D + \angle ACD = 2\angle D$ и $\angle B'A'C' = \angle D' + \angle A'C'D' = 2\angle D'$; откуда $\angle BAC = \angle B'A'C'$, т.-е. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

16. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$, BD и $B'D'$ будутъ перпендикулярны на AC и $A'C'$. Дано: $BC : B'C' = AD : A'D' = (AB + AC) : (A'B' + A'C')$. Изъ пропорціи $BC : B'C' = AD : A'D'$ выходитъ, что $\triangle BCD \sim \triangle B'C'D'$, то-есть $\angle C = \angle C'$. Такимъ образомъ приходимъ къ предыдущей теоремѣ.

17. O и O' центры вписан. круговъ въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$; OD и $O'D' \perp$ на BC и $B'C'$. Дано: $\angle B = \angle B'$ и $OD : O'D' = BC : B'C'$. $\triangle BOC \sim \triangle B'O'C'$ (III, 9); слѣд. $\angle OCB = \angle O'C'B'$ или $\frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle C'$, т.-е. $\angle C = \angle C'$.

18. O и O' центры описанныхъ круговъ около $\triangle ABC$ и $A'B'C'$; OD и $O'D' \perp$ на BC и $B'C'$. Дано: $\angle B = \angle B'$ и $BC : B'C' = OB : O'B'$. Изъ данной пропорціи имѣемъ: $\frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}B'C' = OB : O'B'$ или $BD : B'D' = OB : O'B'$, т.-е. $\triangle OBD \sim \triangle O'B'D'$. Слѣд. $\angle BOD = \angle B'O'D'$ или $\angle A = \angle A'$.

19. Имѣемъ: $AR : CR = BP : CP$ и $AQ : BQ = CP : BP$; перемноживъ эти равенства, найдемъ: $AR \cdot AQ : CR \cdot BQ = 1$ или $PQ \cdot PR = CR \cdot BQ$.

20. Продолжимъ CN до пересѣченія съ MD въ G . Тогда $MD : AE = ND : NE = DG : EG$; но $AE = EC$, а потому $MD = DG$ и $BD = DC$. Слѣдовательно, $BM \parallel CN$.

21. $\triangle AMP \sim \triangle CNQ$; откуда $AM : CQ = AP : CN$ или $AM \cdot CN = CQ \cdot AP$, т.-е. постоянному.

22. Проведемъ $DG \parallel EF$ до пересѣченія съ AB въ G . Тогда $AE : ED = AF : FG = 2AF : 2FG = 2AF : FB$; откуда $AE \cdot BF = 2AF \cdot ED$.

23. $\triangle DEG \sim \triangle AEB$; откуда $EG : AE = DE : BE$. $\triangle AED \sim \triangle BEF$; слѣд. $DE : BE = AE : EF$, а потому $EG : AE = AE : EF$.

24. $\triangle ABD \sim \triangle BDE$; откуда $BE : BD = BD : AB$; но $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$; а потому $BE = BD^2 : AB = \frac{1}{4}AB$. Слѣд. $AE = AB - BE = \frac{3}{4}AB$.

25. $\triangle ABM \sim \triangle EFM$; поэтому $AM : EM = AB : EF$. $\triangle CDN \sim \triangle FEN$, а потому $DN : EN = CD : EF$; откуда $AM : EM = DN : EN$ и слѣд. въ $\triangle MEN$ сторона $AD \parallel MN$.

26. $\triangle ABC \sim \triangle MPC$; слѣд. $MP : AB = MC : AC \dots (1)$. Также $\triangle ADC \sim \triangle AQM$; слѣд. $MQ : CD = AM : AC \dots (2)$. Сложивъ (1) и (2) равенства, найдемъ: $(MP : AB) + (MQ : CD) = (AM + MC) : AC = 1$.

27. $ABCD$ данный параллелограммъ. Изъ точки P , взятой на AC , опустимъ \perp на PE и PE на AB и AD ; проведемъ прямую $PK \parallel CB$ и прямую $PL \parallel CD$. $\triangle PEK \sim \triangle PFL$; слѣд. $PE : PF = PK : PL \dots (1)$; $\triangle AKP \sim \triangle ABC$ и слѣд. $PK : AK = BC : AB \dots (2)$. Изъ (1) и (2) равенствъ найдемъ, что $PE : PF = BC : AB = AD : AB$.

28. Проведемъ прямую $OX \parallel AB$, кот. пересѣчетъ AD и BC въ E и F , и прямую $OY \parallel BC$, кот. пересѣчетъ AB и CD въ G и H . $\angle BGO = \angle BAD = \angle OED$ и $\angle OBG = \angle ODE$; слѣд. $\triangle OBG \sim \triangle OED$; откуда $BG : DE = OG : OE$. Но $BG = CH$, $DE = OH$ и $OG = AE$, а потому $CH : OH = AE : OE$ и $\angle AEO = \angle OHC$; слѣд. $\triangle AEO \sim \triangle CHO$ и потому $\angle AOE = \angle OCH$.

29. О пересѣченіи AA' съ BB' . Положимъ, что прямая, проходящая чрезъ O и C' , не пройдетъ чрезъ C , а пересѣчетъ BC въ D . По заданію: $AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$; а изъ подобія $\triangle AOB$ и $A'O'B'$, BOD и $B'O'C'$, имѣемъ: $AB : A'B' = BO : B'O = BD : B'C'$; сравнивъ эту пропорцію съ предыдущей, найдемъ, что $BC : B'C' = BD : B'C'$; откуда $BC = BD$, т.-е. C и D совпадаютъ.

30. Пусть въ $\triangle ABC$ прямые DL , EM и FN пересѣкаютъ стороны AB и AC , BC и BA , CA и CB , соответственно, такъ, что $\angle ADL = \angle BEM = \angle CFN$; A' , B' и C' точки пересѣченія прямыхъ DL , EM и FN . Разсматривая $\triangle DMC'$ и BME , видимъ, что $\angle C' = \angle B$; точно такъ же изъ другихъ \triangle найдемъ, что $\angle B' = \angle A$ и $\angle A' = \angle C$. Слѣдовательно $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

31. Въ трапеціи $ABCD$, сторона BC параллельно AD и $< AD$. Проведемъ хорду $BE \parallel CD$; тогда $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ и слѣд. $AB : AE = AD : CD$ или $AB : (AD - BC) = AD : AB$.

32. F пересѣченіе AO съ BC и K пересѣченіе AC съ DE . Изъ подобія $\triangle BOF$ и KOE , AFC и AKE слѣдуетъ, что $BF : KE = BO : EO \dots (1)$ и $CF : KE = AC : AE \dots (2)$. Изъ подобія $\triangle ABC$ и ADE , BOC и DOE , выходитъ, что $AC : AE = BC : DE$ и $BO : EO = BC : DE$ или $BO : EO = AC : AE$. Слѣд. (1) и (2) $BF : KE = CF : KE$ или $BF = CF$.

33. AD и BC суть основанія трапеціи $ABCD$ и E точка пересѣченія діагоналей AC и BD ; F середина BC и G пересѣченіе EF съ AD . Изъ подобія $\triangle AED$ и BEC , DEG и BEF , AEG и CEF имѣемъ: $AE : CE = DE : BE$, $DG : BF = DE : BE$ и $AG : CF = AE : CE$; откуда $DG : BF = AG : CF$. Но $BF = CF$, а потому $DG = AG$.

34. $\triangle ACD \sim \triangle EFD$; слѣдоват. $AC : EF = CD : FD$; откуда $AC \cdot FD = EF \cdot CD \dots (1)$. $\triangle EFC \sim \triangle BDC$; слѣд. $EF : BD = CF : CD$; откуда $EF \cdot CD = BD \cdot CF \dots (2)$. Изъ (1) и (2) равенствъ найдемъ: $AC \cdot FD = BD \cdot CF$ или $AC : BD = CF : FD$; слѣдовательно $\triangle ACF \sim \triangle BDF$, а потому $\angle AFC = \angle BFD$.

35. Изъ точки H проведемъ прямую $HX \parallel CB$ до пересѣченія съ AC въ M ; тогда $\triangle CMH$ будетъ тоже равносторонній. Сверхъ того $HM : CJ = AM : AC$; откуда $(HM + AM) : (CJ + AC) = HM : CJ$ или $(CM + AM) : (EC + AC) = HC : CE$ или $AC : (AC + EC) = HC : EC$.

36. Пусть $AD = h_a$, $BE = h_b$ и $CF = h_c$. $\triangle ADB \sim \triangle BFC$ и $\triangle ADC \sim \triangle BEC$; откуда $AB : BC = AD : CF$ или $c : a = h_a : h_c$ и $AC : BC = AD : BE$ или $b : a = h_a : h_b$. Взявъ произведеніе крайнихъ и среднихъ членовъ, найдемъ, что $ah_a = ch_c$ и $ah_a = b \cdot h_b$ или $ah_a = bh_b = ch_c$.

37. Имѣемъ (III, 36) $ah_a = bh_b = ch_c$ или $a : \frac{1}{h_a} = b : \frac{1}{h_b} = c : \frac{1}{h_c}$; откуда $(a + b + c) : \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = a : \frac{1}{h_a} = ah_a \dots (1)$. Также: $h_a : \frac{1}{a} = h_b : \frac{1}{b} = h_c : \frac{1}{c}$; откуда $(h_a + h_b + h_c) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = h_a : \frac{1}{a} = ah_a \dots (2)$. Изъ (1) и (2) равенствъ найдемъ требуемое.

38. $\triangle CDE \sim \triangle ABC$, а потому $CE : CB = CD : CA$ или $CE \cdot CA = CD \cdot CB = \frac{1}{2} CB \cdot CB = \frac{1}{2} CB^2$.

39. $\triangle BDG \sim \triangle ABC$ и $\triangle CEF \sim \triangle ABC$, а потому $DG : AC = BD : AB$ и $EF : AB = CE : AC$; слѣдовательно $DG \cdot EF : AB \cdot AC = BD \cdot CE : AB \cdot AC$; откуда $DG \cdot EF = BD \cdot CE$; но $DG = EF$ и потому $EF^2 = BD \cdot CE$.

40. Опустимъ $\perp AF$ на BC , кот. пересѣчетъ DE въ G ; изъ P и Q возставимъ \perp къ BC до пересѣченія съ AC и AB , соответственно, къ K

и L . Изъ подобія $\triangle AIQ$ и ABE , AQP и AED , AKP и ACD имѣемъ:
 $LQ : BE = AQ : AE = PQ : DE = AP : AD = KP : CD$; но $BE = DE = CD$, а по-
 тому и $LQ = PQ = KP$, т.-е. фигура $KLQP$ будетъ квадратъ.

41. Доказательство сходно съ предыдущимъ.

42. Стороны описаннаго и вписаннаго квадратовъ, соотвѣствующихъ
 боку a , будутъ: $x = \frac{ah_a}{a+h_a}$ и $x_1 = \frac{ah_a}{a-h_a}$; откуда $\frac{1}{x} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{a}$ и $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{h_a} - \frac{1}{a}$. Точно

такъ же можно вывести и другія отношенія.

43. Проведемъ прямую $C'D$ къ основанію $A'B'$ подъ угломъ $C'DB'$, рав-
 нымъ $\angle C'B'D$; тогда въ $\triangle B'C'D$ сторона $C'D = C'B'$. Теперь $\triangle ABC \sim$
 $\triangle A'C'D$ и потому $AC : A'C' = BC : C'D$ или $AC : A'C' = BC : B'C'$.

44. $\angle ACE = \angle CAD + \angle ADC = \angle BAD + \angle DAE = \angle BAE$; слѣдовательно
 $\triangle BAE \sim \triangle CAE$; откуда $BE : AE = AE : CE$ или $BE : DE = DE : CE$.

45. DF равнодѣлящая $\angle D$ въ $\triangle ADB$, а потому $AF : BF = AD : DB \dots (1)$;
 DE равнодѣлящая $\angle D$ въ $\triangle ADC$, а потому $AE : EC = AD : DC \dots (2)$.
 Изъ (1) и (2) получимъ: $AF : BF = AE : EC$, т.-е. $EF \parallel CB$.

46. $ED = \frac{1}{2}(BD - DC)$ и $EB = \frac{1}{2}(BD + DC)$; но $BD : CD = BA : CA$ или
 $(BD - CD) : (BD + CD) = (BA - CA) : (BA + CA)$ или $ED : EB = (BA - CA) :$
 $: (BA + CA)$.

47. Въ $\triangle ABC$ продолжимъ сторону BA до F и проведемъ равнодѣ-
 лящую внѣшнюю $\angle FAC$, которая пересѣчетъ продолженіе BC въ D ;
 проведемъ $CE \parallel DA$ до пересѣченія съ AB въ E . $\triangle CAE$ равнобедренный
 и слѣд. $AE = AC$; но $CE \parallel DA$ и потому $BD : CD = AB : AE$ или $BD : CD =$
 $= AB : AC$.

48. Равнодѣлящая $\angle \angle A$ и C пересѣкаются въ E на BD ; равнодѣля-
 щая $\angle ABC$ пересѣкаетъ AC въ F . Имѣемъ: $AB : AD = BE : ED = BC : CD$;
 откуда $AB : BC = AD : CD$. Но $AB : BC = AF : FC$, а потому $AD : CD =$
 $= AF : FC$; слѣд. равнодѣлящая $\angle ADC$ проходитъ чрезъ F , т.-е. равно-
 дѣлящая $\angle \angle B$ и D пересѣкаются на AC .

49. Положимъ, что AB лежитъ по одну сторону прямой XY . Изъ точекъ
 A и C проведемъ прямыя, параллельно XY , которыя пересѣкутъ CC'
 въ точкѣ D и BB' въ E ; тогда $CD : BE = m : n$ или $(CC' - AA') : (BB' - CC') =$
 $= m : n$; откуда $CC' \cdot (m + n) = n \cdot AA' + m \cdot BB'$.

Примѣчаніе 1. Если точка C на продолженіи AB , то $CC' \cdot (m - n) =$
 $= m \cdot BB' - n \cdot AA'$.

Примѣчаніе 2. Если точки A , B и C расположены не по одну сторону
 прямой, то условимся ставить $+$ передъ длинами перпендикуляровъ,
 опущенныхъ изъ точекъ, лежащихъ по одну сторону прямой, и $-$ пе-
 редъ длинами перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ, лежащихъ
 по другую сторону прямой; тогда знакъ передъ длиною перпендикуляра,
 опущеннаго изъ искомой точки, покажетъ, съ какой стороны прямой XY
 находится эта точка. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что точки A и B ле-
 жатъ по разнымъ сторонамъ прямой XY и точка C находится по одну
 сторону съ A . $\triangle ADC \sim \triangle CBE$ (чертежъ предыд.) и слѣд. $DC : BE =$
 $= AC : BC = m : n$ или $(AA' - CC') : (BB' + CC') = m : n$; откуда $(m + n) \cdot CC' =$

$= n \cdot AA' - m \cdot BB'$ или $(m+n) \cdot CC' = n \cdot AA' + m \cdot (-BB')$. Когда же точка C по одну сторону съ B , то $(m+n) \cdot (-CC') = n \cdot AA' + m \cdot (-BB')$.

Слѣдствіе. Если точка C лежитъ на серединѣ AB , то $CC' = \frac{1}{2}(AA' + BB')$, когда точки A и B по одну сторону прямой XY , и $\pm CC' = \frac{1}{2}[AA' + +(-BB')]$, когда точки A и B лежатъ по разнымъ сторонамъ прямой XY .

50. Это предположеніе доказано для двухъ точекъ (III, 49); поэтому допустимъ, что оно справедливо для n точекъ: $A, B, C, \dots K$ и докажемъ, что оно будетъ справедливо и для $n+1$ точекъ: $A, B, C, \dots K$ и L . Пусть J будетъ искомая точка для точекъ $A, B, C, \dots K$; опустимъ $\perp \perp AA', BB', CC', \dots, KK'$ и JJ' на прямую XY ; тогда, по условію, $n \cdot JJ' = AA' + BB' + CC' + \dots + KK'$.

Раздѣлимъ прямую JL въ O на двѣ части такъ, чтобы $JO : LO = 1 : n$; опустимъ $\perp \perp OO'$ и LL' на прямую XY . Тогда (III, 49)

$$(n+1) \cdot OO' = n \cdot JJ' + LL' \text{ и}$$

$$\text{слѣд. } (n+1) OO' = AA' + BB' + \dots + LL' \text{ или } OO' = \frac{AA' + BB' + \dots + LL'}{n+1}.$$

Точка O называется *центромъ среднихъ разстояній* для точекъ A, B, C, \dots

Замѣчаніе. Чтобы получить центръ среднихъ разстояній для точекъ A, B, C, \dots , надо поступить такъ: провести прямую AB и раздѣлить ее пополамъ въ точкѣ M ; провести прямую MC и раздѣлить ее въ точкѣ N въ отношеніи 1 : 2; провести прямую ND и раздѣлить ее въ точкѣ P въ отношеніи 1 : 3 и т. д. Послѣдняя точка дѣленія будетъ искомая.

Слѣдствіе 1. *Всякая система точекъ имѣетъ центръ среднихъ разстояній и только одинъ*, потому что, допустивъ существованіе второго центра, увидимъ, что разстоянія отъ нихъ до прямой XY , проведенной произвольно, всегда будутъ одинаково, что невозможно.

Слѣдствіе 2. Если прямая XY расположена такъ, что алгебраическая сумма разстояній точекъ A, B, C, \dots до нея есть нуль, то на этой прямой находится центръ среднихъ разстояній; это прямо видно изъ опредѣленія. Отсюда:

1) Центръ среднихъ разстояній вершинъ треугольника будетъ точка пересѣченія медіанъ.

2) Центръ среднихъ разстояній для вершинъ четырехугольника будетъ точка пересѣченія прямыхъ, соединяющихъ середины противоположныхъ сторонъ.

3) Центръ среднихъ разстояній для правильного многоугольника будетъ центръ многоугольника.

51. См. 50 теорему III отдѣла.

52. M, N, P и Q середины сторонъ AB, BC, CD и DA въ $\diamond ABCD$; O пересѣченіе прямыхъ MP и NQ . Опустимъ $\perp \perp AA', BB', CC', \dots$ на произвольную прямую: тогда (III, 49) $OO' = \frac{1}{2}(MM' + PP')$; но $MM' = \frac{1}{2}(AA' + BB')$, $PP' = \frac{1}{2}(CC' + DD')$ и потому $OO' = \frac{1}{4}(AA' + BB' + CC' + DD')$.

53. Построимъ (наружно) на сторонахъ BC, CA и AB $\triangle ABC$ равно-сторонніе $\triangle \triangle BCL, CAM$ и BAN , въ которыхъ D, E и F центры вписанныхъ въ нихъ круговъ. $\triangle BCD \sim \triangle MCE$, а потому $CD : CB = CE : CM$;

$\angle DCE = \angle MCB$ и слѣд. $\triangle DCE \sim \triangle BCM$; откуда $DE : BM = CD : CB$. Также $FE : BM = AF : AB$. $\triangle FAB$ и DCB равноугольные и слѣд. подобны; откуда $AF : CD = AB : CB$ или $AF : AB = CD : CB$ и, слѣдовательно, $FE : BM = DE : BM$; откуда $FE = DE$. Также $DF = FE$ и, слѣдовательно, $\triangle DEF$ будетъ равносторонний.

54. $ABCD$ данный \diamond ; O пересѣченіе діагоналей; A', B', C' и D' основанія \perp -въ, опущенныхъ изъ A, B, C и D на діагонали. Около $\diamond BB'C'C$ можно описать окружность, а потому $\angle OBC = \angle OB'C'$ и $\angle OBA = \angle OB'A'$; слѣд. $\angle ABC = \angle A'B'C'$. Такимъ же образомъ покажемъ, что и остальные углы, соответственно, равны. $\triangle OBC \sim \triangle OB'C'$ и $\triangle AOB \sim \triangle A'OB'$, а потому $BC : B'C' = OB : OB' = AB : A'B'$. Слѣд. стороны четырехугольниковъ, содержащихъ $\angle ABC$ и $A'B'C'$, пропорціональны, т.-е. $\diamond \diamond ABCD$ и $A'B'C'D'$ подобны.

55. Проведемъ равнодѣлящую внѣшняго $\angle A$, кот. пересѣчетъ продолженіе CB въ K ; опустимъ $\perp BL$ на AK , который пересѣчетъ продолженіе CA въ M . Тогда $BL = \frac{1}{2} AK$, $BG = \frac{1}{2} AL$. Но $BD = \frac{1}{2} BC$, $BG = \frac{1}{2} BF$ и $BL = \frac{1}{2} BM$ и точки C, F и M лежатъ на прямой, а потому точки D, G и L , какъ середины BC, BA и BM , лежатъ тоже на прямой. $\triangle DEG \sim \triangle DBL$ и $\triangle DHG \sim \triangle DAL$, а потому $DE : DB = DG : DL$ и $DH : DA = DG : DL$; откуда $DE : DB = DH : DA$ и слѣдовательно, $HE \parallel AB$.

56. Опустимъ $\perp DG$ на AE . $\angle B$ вдвое болѣе $\angle C$, а потому $BC = 2AB$; $\angle B$ въ $\triangle ABE$ вдвое болѣе $\angle BAE$, а потому $AB = 2BE$. $\triangle ABD = \triangle BDE$; слѣд. $BF = AB = 2BE$ или $BE = EF = DG$; $\triangle ADG \sim \triangle BDF$ и слѣдовательно $AG : DF = DG : BF$, или $AG \cdot BF = BE \cdot DF$ или $(AE - DF)BF = BE \cdot DF$. Раздѣливши обѣ части на $AE \cdot BF \cdot DF \cdot BE$, найдемъ:

$$\frac{1}{BE \cdot DF} - \frac{1}{AE \cdot BF} = \frac{1}{AE \cdot BE}$$

57. Имѣемъ: $CA' : BA' = b : c$, или $CA' : BC = b : (b+c)$ или $CA' : a = b : (b+c)$; откуда $CA' = \frac{ab}{b+c}$. Точно такъ же $AB' = \frac{bc}{a+c}$ и $BC = \frac{ac}{a+b}$. Перемноживъ эти равенства, найдемъ требуемое.

58. 1) Очевидно. 2) $AB' = AC'$, $BC' = BA'$ и $CA' = CB'$; по перемноженіи этихъ равенствъ, получимъ исконое. 3) $\triangle ABB' \sim \triangle ACC'$, а потому $AC : AB = AC' : AB'$, или $AC \cdot AB' = AB \cdot AC'$. Точно такъ же найдемъ, что $BA \cdot BC' = BC \cdot BA'$ и $CB \cdot CA' = CA \cdot CB'$; перемноживъ почленно эти равенства и сокративъ общихъ множителей, найдемъ: $AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB'$. 4) По свойству равнодѣлящихъ угловъ \triangle имѣемъ: $BC \cdot AB' = AB \cdot CB'$, $AC \cdot BC' = BC \cdot AC'$ и $AB \cdot CA' = AC \cdot BA'$; перемноживъ эти равенства, найдемъ требуемое.

59. Черезъ произвольную точку O проведемъ прямыя, параллельно BC, CA и BA , до встрѣчи съ сѣкущей въ D, E и F . Тогда $AB' : AC' = OE : OF$, $BC' : BA' = OF : OD$ и $CA' : CB' = OD : OE$; откуда, перемноживъ почленно эти равенства, получимъ $AB' \cdot BC' \cdot CA' : AC' \cdot BA' \cdot CB' = 1$.

60. FD равнод. $\angle BFC$, а потому $DB : DC = BF : CF$. Также $CE : AE = CF : AF$; откуда $CE \cdot DB : DC \cdot AE = BF : AF$ или $CE \cdot BD \cdot AF =$

$=CD \cdot BF \cdot AE$, т.-е. (III, 59) прямые AD , BE и CF пересекаются въ одной точкѣ.

61. Черезъ точку D проведемъ прямую, \parallel данной, которая пересѣчетъ AM , BL и AC въ точкахъ G , H и J ; тогда $MK:DG=KP:DJ$, $DG:DH=MQ:LQ$ и $DH:LN=DJ:NP$. Перемноживъ почленно эти равенства, найдемъ: $MK:LN=MQ:KP:LQ:NP$.

62. AE и BF пересѣкаются въ O ; $AB \parallel EF$, а потому $AB:EF=BO:FO$ и $\angle ABO=\angle EFO$; но $AB=BC$, $EF=FG$ и $\angle ABC=\angle EFG$, а потому $BC:FG=BO:FO$ и $\angle CBO=\angle GFO$. Слѣд. $\triangle OFG$ и OBC равноугольные и подобны; откуда $\angle FOG=\angle BOC$, т.-е. O , G и C лежатъ на прямой. Также и OND прямая. Пусть Q точка пересѣченія AG и BH ; тогда, подобно предыдущему, можно показать, что CQE и DQF будутъ прямыми.

63. Имѣемъ: $\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{BC}$, $\frac{PQ}{AP} = \frac{AB}{BC}$, $\frac{QR}{PQ} = \frac{AB}{BC}$, ...; откуда

$$\frac{AP+PQ+QR+\dots}{AB} = \frac{AC}{BC} \left(1 + \frac{AB}{BC} + \frac{AB^2}{BC^2} + \dots \right) = \frac{AC}{BC} \left\{ 1 : \left(1 - \frac{AB}{BC} \right) \right\} =$$

$$= \frac{AC}{BC-AB} = (\text{числит. и знаменат. умножимъ на } BC+AB) = \frac{BC+AB}{AC}.$$

64. Пусть G , H и K середины BC , AC и AB ; проведемъ прямую $KX \parallel FC$ и прямую $HY \parallel EB$; J пересѣченіе KX и HY . $\triangle HJK \sim \triangle BOC$, а потому $JH:BO=JK:OC=HK:BC=1:2$ и $GH:AB=1:2$; откуда $JH:BO=GH:AB$. Кроме того $\angle JGH=\angle ABO$; слѣд. $\triangle GJH \sim \triangle AOB$, а потому $\angle JGH=\angle BAD$, т.-е. $JG \parallel AD$.

65. Доказать легко, сообразуясь съ предыдущей теоремой.

66. (См. 64 теор.) $JH:BO=1:2$ или $BO=2JH$.

67. G , H и K (Фиг. 39) середины боковъ BC , AC и AB ; O пересѣченіе прямыхъ AD , BE и CF ; V пересѣченіе прямыхъ AG , BH и CK ; J пересѣченіе прямыхъ, проведенныхъ черезъ точки G , H и $K \parallel$ прямымъ AD , BE и CF . $\triangle GVJ \sim \triangle AOV$ ($GJ:AO=1:2=GV:AV$ и $\angle VGJ=\angle OAV$) и слѣд. $\angle JVG=\angle AVO$, т.-е. линия OVJ будетъ прямой. Изъ подобія тѣхъ же $\triangle \triangle$ найдемъ, что $VJ:VO=VG:VA=1:2$ или $VO=2VJ$.

68. Эта теорема есть слѣдствіе предыдущей теоремы; впрочемъ, ее можно доказать непосредственно, употребляя приемъ, указанный въ 67 теор.

69. $\triangle AKC \sim \triangle BKE$; слѣдовательно, $AC:AK=BE:BK=AB:BK$ или $AB:AC=BK:AK$..(1). $\triangle ABL \sim \triangle CGL$ и потому $AB:AC=AL:LC$..(2). $\triangle ACH \sim \triangle ABC$ и потому $AC:BC=CH:AC$..(3) и $\triangle ABH \sim \triangle ABC$ и потому $BC:AB=AB:BH$..(4). Перемноживъ (1), (2), (3) и (4) равенства, найдемъ: $AK \cdot BH \cdot CL=AL \cdot CH \cdot BK$, т.-е. (III, 59) прямые AH , BL и CK пересѣкаются въ одной точкѣ.

Фиг. 39.



70. Въ $\triangle BOC$, AOC и AOB имѣемъ (III, 58) $BD \cdot OQ \cdot CR = BQ \cdot OR \cdot CD$, $AP \cdot OR \cdot CE = AE \cdot OP \cdot CR$ и $AF \cdot OP \cdot BQ = AP \cdot OQ \cdot BP$; перемноживъ эти равенства, найдемъ: $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$, т.-е. прямыя AD , BE и CF (III, 59) пересѣкаются въ одной точкѣ.

71. Въ $\triangle ABC$, гдѣ $\angle A$ прямой, $AC = 2AB$. Опустимъ $\perp AD$ на BC ; тогда $AC^2 = BC \cdot CD$ и $AB^2 = BC \cdot BD$; но $AC = 2AB$, а $AC^2 = 4AB^2$ и слѣдовательно $BC \cdot CD = 4BC \cdot BD$ или $CD = 4BD$.

72. Пусть K пересѣченіе AF съ DE . $\triangle DAE \sim \triangle BAC$ ($\angle A$ общій, а AD и AE пропорц. AB и AC), а потому $DE \parallel BC$ и $= \frac{1}{3}BC$; слѣдовательно $\triangle DOE \sim \triangle BOC$ и потому $OD = \frac{1}{3}OC$, $OE = \frac{1}{3}OB$ или $OD = \frac{1}{4}CD$ и $OE = \frac{1}{4}BE$. Изъ подобія $\triangle ADK$ и ABF , $\triangle KOE$ и BOF слѣдуетъ, что $DK = \frac{1}{3}BF$ и $KE = \frac{1}{3}BF$, т.-е. $DK = KE$, а потому и $BF = CF$.

73. Положимъ AE не $= \frac{1}{3}AC$. Тогда на AC отложимъ часть $AE' = \frac{1}{3}AC$ и проведемъ прямую BE' , которая пересѣчетъ CD въ O' ; тогда (III, 72) $DO' = \frac{1}{4}CD$; но, по заданію, $DO = \frac{1}{4}CD$, т.-е. $DO = DO'$, что невозможно, а потому наше предположеніе не вѣрно; слѣдовательно $AE = \frac{1}{3}AC$.

74. Изъ $\triangle BCD$ имѣемъ: $BD^2 = BC^2 - CD^2 = BC^2 - \frac{1}{4}BC^2 = \frac{3}{4}BC^2$ и $BD^2 = BC \cdot BE$; откуда $BE = BD^2 : BC = \frac{3}{4}BC^2 : BC = \frac{3}{4}BC$.

75. AD высота $\triangle ABC$, въ которомъ $AB > AC$. Тогда $BD^2 = AB^2 - AD^2$ и $CD^2 = AC^2 - AD^2$; откуда $BD^2 - CD^2 = AB^2 - AC^2$.

76. D середина катета AB въ $\triangle ABC$; $DE \perp$ на гипотенузу BC . Изъ $\triangle BCD$ найдемъ, что $CE^2 - BE^2 = CD^2 - BD^2 = CD^2 - AD^2 = AC^2$.

77. На гипотенузу BC прямоугольнаго $\triangle ABC$ опустимъ $\perp AD$. Тогда $AD^2 = BC \cdot BD$, $AD^2 = BC \cdot CD$ и $AD^2 = BD \cdot CD$; слѣдоват. $AB^2 \cdot AC^2 = BC^2 \cdot BD \cdot CD = BC^2 \cdot AD^2$ или $AB \cdot AC = BC \cdot AD$.

78. D середина катета AC въ $\triangle ABC$, гдѣ $\angle A$ прямой. Имѣемъ: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = AB^2 + 4AD^2 = AB^2 + AD^2 + 3AD^2 = BD^2 + 3AD^2$.

79. Въ $\triangle ABC$ уголъ A прямой; $AD \perp$ къ BC ; $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $AD = h$. $\triangle ABC \sim \triangle ABD$; слѣд. $b : h = a : c$ или $bc = ah$; но $b^2 + c^2 = a^2$, или $b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2ah$ или $(b+c)^2 = a^2 + 2ah$; отсюда $(b+c)^2 < a^2 + 2ah + h^2 = (a+h)^2$ и слѣдовательно $b+c < a+h$.

80. Означивъ буквою a гипотенузу прямоугольнаго \triangle , найдемъ, что $a : c = b : h$, или $ah = bc$, или $a^2h^2 = b^2c^2$ или $(b^2 + c^2)h^2 = b^2c^2$. Раздѣливъ обѣ части этого равенства на $b^2c^2h^2$, получимъ требуемое.

81. $(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = b^2 + c^2 + 2bc + h^2$ или $(a+h)^2 = (b+c)^2 + h^2$.

82. Въ $\triangle ABC$, $AD \perp BC$. Дано $AD : BD = CD : AD$; слѣдовательно, $\triangle ABD \sim \triangle ACD$, т.-е. $\angle B = \angle DAC$ и $\angle C = \angle BAD$ или $\angle B + \angle C = \angle A$. А такъ какъ $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$, то $2\angle A = 2d$ или $\angle A = d$.

83. $DC^2 = AD^2 + AC^2 = 4AB^2 + AC^2$; $BE^2 = 4AC^2 + AB^2$; откуда $DC^2 + BE^2 = 5AB^2 + 5AC^2 = 5(AB^2 + AC^2) = 5BC^2$.

84. (III, 59) $DF \cdot BA \cdot CE = FB \cdot CA \cdot ED$. Но $DF = BF$, а потому $BA \cdot CE = CA \cdot ED$; откуда $CE : ED = CA : BA = CA^2 : BA \cdot CA = BA \cdot BC : BA \cdot CA = BC : CA$.

85. Возьмемъ точку O внутри $\triangle ABC$. Пусть OD , OE и $OF \perp$ на AB , BC и AC . Соединивъ точку O съ точками A , B и C , найдемъ, что $AD^2 +$

$$+ BE^2 + CF^2 = AO^2 - DO^2 + BO^2 - EO^2 + CO^2 - FO^2 = (BO^2 - DO^2) + (CO^2 - EO^2) + (AO^2 - FO^2) = BD^2 + CE^2 + AF^2.$$

86. Доказательство сходно съ предыдущимъ.

87. Изъ N и M возставимъ $\perp \perp$ къ AB и AC до встрѣчи въ O и опустимъ $\perp OK$ на BC . Изъ $\triangle AOB$, AOC и BOC имѣемъ: $AN^2 - BN^2 = AO^2 - BO^2$, $CM^2 - AM^2 = CO^2 - AO^2$ и $BK^2 - CK^2 = BO^2 - CO^2$; откуда $(AN^2 - BN^2) + (CM^2 - AM^2) + (BK^2 - CK^2) = 0$. Сравнивъ это равенство съ даннымъ, заключаемъ, что точки K и L совпадаютъ.

1) Если L , M и N середины сторонъ, то очевидно, что $(BL^2 - CL^2) + (CM^2 - AM^2) + (AN^2 - BN^2) = 0$. 2) Если L , M и N основанія высотъ AL , BM и CN въ $\triangle ABC$, то $(BL^2 - CL^2) + (CM^2 - AM^2) + (AN^2 - BN^2) = (AB^2 - AC^2) + (BC^2 - AB^2) + (AC^2 - BC^2) = 0$. 3) L , M и N точки касанія вписан. круга въ $\triangle ABC$ къ сторонамъ BC , AC и AB . Тогда $(BL^2 - CL^2) + (CM^2 - AM^2) + (AN^2 - BN^2) = (BI^2 - CI^2) + (CM^2 - AM^2) + (AM^2 - BI^2) = 0$, ибо $BI = BN$, $CM = CL$ и $AN = AM$.

88. $CD^2 = CA^2 + AD^2 = CA^2 + CK^2 = CA^2 + CG^2 + GK^2 = CA^2 + BF^2 + AB^2$; $BE^2 = AB^2 + AE^2 = AB^2 + BH^2 = AB^2 + BF^2 + FH^2 = AB^2 + BF^2 + CA^2$. Слѣдовательно, $CD^2 = BE^2$ или $CD = BE$.

89. $\angle PAB$ прямой; слѣд. $AB^2 = AP^2 + BP^2$. Но $\angle PQB >$ прямого, а потому $PB^2 > PQ^2 + QB^2$; также $\angle QRB >$ прямого, а потому $QB^2 > QR^2 + RB^2$ и т. д. Отсюда $AB^2 > AP^2 + PQ^2 + \dots + KB^2$.

90. $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2AC^2 + BC^2 = 2(AD^2 + CD^2) + (CD^2 + BD^2) = BD^2 + 2AD^2 + 3CD^2$.

91. AD высота \triangle и точка M между точками C и D . Изъ $\triangle AMC$ найдемъ, что $AC^2 = AM^2 + MC^2 + 2MC \cdot MD$ или $AC^2 - AM^2 = MC(MC + 2MD) = MC(CD + MD) = MC(BD + MD) = MC \cdot MB$.

92. $BC : AC = BD : AD$ или $(BC + AC) : AC = AB : AD$. Умноживъ обѣ части равенства на $BC - AC$, найдемъ: $(BC^2 - AC^2) : AC = AB(BC - AC) : AD$ или $AB^2 : AC = AB(BC - AC) : AD$; слѣд. $AB : AC = (BC - AC) : AD$.

93. Построимъ $\square BCDE$ на BC и продолжимъ DC и EB до пересѣченія въ точкахъ F и G съ прямою, проведенною черезъ точку A , параллельно BC . Тогда изъ $\triangle ABE$ и ACD найд., что $AE^2 = AB^2 + BE^2 + 2BE \cdot BG$ и $AD^2 = AC^2 + CD^2 + 2CD \cdot CF$; откуда $AE^2 - AD^2 = AB^2 - AC^2$.

94. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD = 2AC^2 - 2AC \cdot AD = 2AC(AC - AD) = 2AC \cdot CD$; откуда $AC \cdot CD = \frac{1}{2}BC^2$.

95. Имѣемъ (III, 94): $BC^2 = 2AC \cdot CD$ или $CD^2 + BD^2 = 2AC \cdot CD$.

96. $\angle BAC = \frac{2}{3}\alpha$ и $BD \perp AC$; тогда $\angle BAD = \frac{2}{3}\alpha$ и $2AD = AB$. Изъ $\triangle ABC$ найдемъ, что $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD = AB^2 + AC^2 + AB \cdot AC$.

97. Положимъ, что $\angle \angle B$ и C острые. Опустимъ $\perp DF$ на BC ; тогда $EF = CF$, а изъ $\triangle BCD$ имѣемъ: $BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2BC \cdot FC = CD^2 + BC(BC - 2FC) = CD^2 + BC \cdot BE$.

98. BD равнодѣлящая $\angle B$ и $BE \perp$ на AC . Изъ $\triangle ABD$ имѣемъ: $AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2AD \cdot DE = BC^2 + AD^2 + AD \cdot DC = BC^2 + AD(AD + DC) = BC^2 + BC \cdot AB$.

99. EF и $AK \perp \perp$ къ BC . Изъ $\triangle BCE$ найдемъ, что $BE^2 = CE^2 + BC^2 - 2BC \cdot CF = CE^2 + BC(BC - 2CF) = CE^2 + BC \cdot DE$.

100. $\triangle ABD \sim \triangle ACE$; откуда $AB:AC=AD:AE$ или $AC \cdot AD=AB \cdot AE$. Изъ $\triangle ABC$: $BC^2=AB^2+AC^2-2AC \cdot AD=AB^2-AC \cdot AD+AC^2-AC \cdot AD=AB^2-AB \cdot AE+AC^2-AC \cdot AD=AB(AB-AE)+AC(AC-AD)=AB \cdot BE+AC \cdot CD$.

101. По условію, $AB+AC=n \cdot BC$. Опустимъ $\perp AF$ на BC ; тогда изъ $\triangle ABC$ найдемъ, что $AB^2=AC^2+BC^2-2BC \cdot CF$, или $AB^2-AC^2=BC(BC-2CF)$, или $(AB-AC)(AB+AC)=BC \cdot BD$; откуда выходитъ, что $(AB-AC) \cdot n \cdot BC=BC \cdot BD$ или $AB-AC=BD:n$.

102. Въ трапеціи $ABCD$ сторона $AD \parallel BC$ и $AD < BC$. Опустимъ $\perp \perp AE$ и DF на BC ; тогда изъ $\triangle ABC$ и BDC найдемъ: $AC^2=AB^2+BC^2-2BC \cdot BE$ и $BD^2=CD^2+BC^2-2BC \cdot CF$, а $AC^2+BD^2=AB^2+CD^2+2BC(BC-BE-CF)=AB^2+CD^2+2BC \cdot AD$.

103. Въ параллелограммѣ $ABCD$ опустимъ $\perp \perp AE$ и DF на BC . Изъ $\triangle ABC$ и BCD найдемъ: $AC^2=AB^2+BC^2-2BC \cdot BE$ и $BD^2=CD^2+BC^2+2BC \cdot CF$; сложивъ эти равенства и замѣтивъ, что $BE=CF$ ($\triangle ABE=\triangle CDF$), получимъ: $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

104. Опустимъ $\perp AE$ на BC . Изъ $\triangle ABD$ и ACD выходитъ, что $AB^2=AD^2+BD^2-2BD \cdot DE$ и $AC^2=AD^2+CD^2+2CD \cdot DE$; слѣдовательно $AB^2+AC^2=2AD^2+BD^2+CD^2=2AD^2+2BD^2=2(AD^2+BD^2)$.

105. Изъ $\triangle ABE$ и ACD имѣемъ: $AB^2+AE^2=2(AD^2+BD^2)$ и $AC^2+AD^2=2(AE^2+DE^2)$; сложивъ почленно эти равенства, найдемъ, по сокращеніи, $AB^2+AC^2=AD^2+AE^2+2BD^2+2DE^2$; но $AB^2+AC^2=BC^2$, $BD=DE=\frac{1}{2}BC$, а потому $AD^2+AE^2+DE^2=\frac{3}{4}BC^2$.

106. $BC^2=AB^2+AC^2=BD^2+CE^2$; откуда $BD^2=BC^2-CE^2=(BC+CE) \times (BC-CE)=(BE+2CE) \cdot BE=BE^2+2BE \cdot CE$; слѣдоват. $2BE \cdot CE=BD^2-BE^2=(BD+BE)(BD-BE)=(DE+2BE)DE=DE^2+2BE \cdot DE$, а потому $DE^2=2BE \cdot CE-2BE \cdot DE=2BE(CE-DE)=2AE \cdot CD$.

107. F точка пересѣченія діагоналей прямоугольника $ABCD$ и E кака-нибудь точка внутри его. Изъ $\triangle ACE$ и BDE найдемъ, что $AE^2+CE^2=2AF^2+2EF^2=2(BF^2+EF^2)=BE^2+DE^2$.

108. Въ $\diamond ABCD$ дано, что $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$, гдѣ P точка внутри \diamond . Тогда $PA^2-PB^2=PD^2-PC^2$. Если разность квадратовъ PA и PB постоянна, то и разность квадратовъ PD и PC постоянна, а потому точка P лежитъ на прямой, перпендикулярной къ AB , и на прямой, перпендикулярной къ CD , т.-е. $AB \parallel CD$. Точно такъ же можно показать, что $AD \parallel BC$. Слѣд. $ABCD$ будетъ прямоугольникомъ.

109. Въ $\diamond ABCD$ буквы E, F, G и H означаютъ середины его боковъ: AB, BC, CD и DA . Тогда въ параллелограммѣ $EFGH$ (III, 103); $EG^2+FH^2=EH^2+EF^2+FG^2+GH^2=2(EH^2+GH^2)$; но $HE=\frac{1}{2}BD$ и $GH=\frac{1}{2}AC$, а потому $2(EG^2+FH^2)=AC^2+BD^2$.

110. Изъ $\triangle ABC$ и ACD : $AB^2+BC^2=2(AE^2+BE^2)$ и $AD^2+CD^2=2(AE^2+DE^2)$; откуда $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=4AE^2+2(BE^2+DE^2)$. Изъ $\triangle BDE$: $DE^2+BE^2=2(DF^2+EF^2)$, $2AE=AC$ и $2DF=BE$, а потому $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+4DF^2+4EF^2=AC^2+BD^2+4EF^2$.

111. Въ $\diamond ABCD$ точки E, F, M и N середины AD, BC, AC и BD . Тогда (III, 110) $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2$. Въ паралле-

погримъ: $EMFN$ (III, 103): $MN^2 + EF^2 = EM^2 + MF^2 + FN^2 + NE^2 = 2FN^2 + 2FM^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2)$; слѣд. $4MN^2 + 4EF^2 = 2AB^2 + 2CD^2$ или $4MN^2 = 2AB^2 + 2CD^2 - 4EF^2$; поэтому $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 2AB^2 + 2CD^2 - 4EF^2$; откуда $AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 + 4EF^2$.

112. M, H, L и K середины сторонъ AB, BC, CD и DA въ $\diamond ABCD$; E и F середины BD и AC ; G середина EF . Тогда изъ $\triangle ACG, AGD, CGD$ и CGE получимъ: $GA^2 + GB^2 = 2(AM^2 + GM^2)$ и т. д. слѣд. $2(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2) = HK^2 + LM^2 + \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2)$; по $AB^2 + BC^2 = 2(AF^2 + BF^2)$, $CD^2 + DA^2 = 2(AF^2 + FD^2)$, а потому $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4AF^2 + 2(BF^2 + DF^2) = AC^2 + 4(BE^2 + EF^2) = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$ и потому $2(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2) = HK^2 + LM^2 + 2EF^2 + \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2) \dots (1)$. Но $GA^2 + GC^2 = 2AF^2 + 2GF^2$; $GB^2 + GD^2 = 2BE^2 + 2GE^2$; слѣд. $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2) + EF^2 \dots (2)$. Вычтя (2) изъ (1), найдемъ: $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = HK^2 + ML^2 + EF^2$.

113. F и G (фиг. 40) середины AC и BD . Изъ $\triangle APC$ и BPD (III, 104): $(AP^2 + CP^2) + (BP^2 + DP^2) = 2AF^2 + 2PF^2 + 2PG^2 + 2DG^2 = 2AF^2 + 2DC^2 + 2(PF^2 + PG^2) = 2AF^2 + 2DG^2 + 4(EF^2 + EG^2) = 2(AF^2 + EF^2) + 2(DG^2 + EG^2) + 4EP^2 = AE^2 + CE^2 + BE^2 + DE^2 + 4EP^2$.

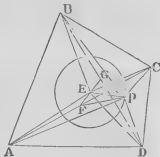
114. Опустимъ $\perp AG$ на DE и продолжимъ его до пересѣченія съ BC въ F ; проведемъ BH и $CK \perp \perp$ къ GF . Тогда $\angle DAG + \angle ADG = d$ и $\angle ABH + \angle BAH = d$; слѣд. $\angle ADG = \angle BAH$ и потому $\triangle DAG = \triangle ABH$; откуда $AG = BH$ и $DG = AH$. Точно такъ же $\triangle AGE = \triangle ACK$ и потому $AG = CK = BH$ и $EG = AK$; слѣд. $\triangle BFH = \triangle CFK$ и потому $BF = CF$ и $FH = FK$. Откуда выходитъ, что $DE = DG + EG = AH + AK = AF - FH + AF + FK = 2AF$ и $BC^2 + DE^2 = 4BF^2 + 4AF^2 = 2[2(BF^2 + AF^2)] = 2(AB^2 + AC^2)$.

115. На сторонахъ $\triangle ABC$ построимъ квадраты: $ABDE, ACFG$ и $BCPK$; имѣемъ (III, 114): $(EG^2 + BC^2) + (FH^2 + AB^2) + (DK^2 + AC^2) = 2AB^2 + 2AC^2 + 2AC^2 + 2BC^2 + 2BC^2 + 2AB^2 = 4(AB^2 + BC^2 + AC^2)$.

116. D, E и F середины BC, CA и AB сторонъ $\triangle ABC$; P точка внутри $\triangle ABC$. Такъ какъ $BD = CD$, то $PB^2 + PC^2 = 2(PD^2 + DC^2)$; также $PC^2 + PA^2 = 2(PE^2 + EA^2)$ и $PA^2 + PB^2 = 2(PF^2 + FB^2)$. Откуда $PA^2 + PB^2 + PC^2 = PD^2 + PE^2 + PF^2 + DC^2 + EA^2 + FB^2 = PD^2 + PE^2 + PF^2 + \frac{1}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$.

117. E, D и F середины AB, BC и AC въ $\triangle ABC$; BK и $CL \perp \perp$ на AD ; G пересѣченіе прямыхъ AD, BF и CE . Изъ $\triangle ABG$ и ACG : $AB^2 = AC^2 + BG^2 + 2AG \cdot GK$ и $AC^2 = AG^2 + CG^2 + 2AG \cdot GL$, а $AB^2 + AC^2 = 2AG^2 + BG^2 + CG^2 + 2AG(GK + GL) = 2AG^2 + BG^2 + CG^2 + 2AG \cdot AD$, такъ какъ $GK + GL = 2DG = AG$ и слѣд. $AB^2 + AC^2 = 4AG^2 + BG^2 + CG^2$; такъ же $AB^2 + BC^2 = 4BG^2 + AC^2 + CG^2$ и $AC^2 + BC^2 = 4CG^2 + BG^2 + AG^2$. Сложивъ послѣднія три равенства, найдемъ: $2(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 6(AG^2 + BG^2 + CG^2)$ или $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AG^2 + BG^2 + CG^2)$.

Фиг. 40.



118. E, D и F середины AB, BC и AC въ $\triangle ABC$; G пересѣченія прямыхъ AD, BF и CE . По 117 теоремѣ имѣемъ: $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AG^2 + BG^2 + CG^2) = 3(\frac{1}{9}AD^2 + \frac{1}{9}BF^2 + \frac{1}{9}CE^2) = \frac{1}{3}(AD^2 + BF^2 + CE^2)$.

119. Положимъ, что въ трапеціи $ABCD$ стороны AD и BC параллельны и $AD < BC$; опустимъ перпендикуляры BE и CF на AD . Изъ $\triangle \triangle ACD$ и ABD : $AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot DF$ и $BD^2 = AD^2 + AB^2 + 2AD \cdot AE$; замѣтивъ, что $CD^2 - AB^2 = (CF^2 + DF^2) - (BE^2 + AE^2) = DF^2 - AE^2$, найдемъ: $\frac{AC^2 - BD^2}{CD^2 - AB^2} = \frac{CF^2 - AE^2 + 2AD(DF - AE)}{DF^2 - AE^2} = \frac{DF^2 - AE^2 + 2AD(DF - AE)}{DF^2 - AE^2} = \frac{DF + AE + 2AD}{DF + AE} = \frac{BC + AD}{BC - AD}$.

120. N точка пересѣченія BC съ равнодѣлящею $\angle A$. Опустимъ $\perp \perp BE$ и CD на AN и $\perp CD$ продолжимъ до пересѣченія съ AB въ L ; опустимъ $\perp CK$ на AB . $\triangle ADL = \triangle ADC$ и $\triangle CKL \sim \triangle ADC$; откуда $KL : CD = CL : AC$ или $KL = \frac{CL \cdot CD}{AC} = \frac{2CD^2}{AC}$. Изъ $\triangle CBL$: $BC^2 = BL^2 + CL^2 + 2BL \cdot KL$, а $BC^2 - BL^2 = CL^2 + 2BL \cdot KL = 4CD^2 + 2(AB - AC) \cdot \frac{2CD^2}{AC} = \frac{4AB \cdot CD^2}{AC} = 4 \cdot \frac{BN}{CN} \cdot CD^2 = 4 \cdot \frac{BE}{CD} \cdot CD^2 = 4BE \cdot CD$; отсюда найдемъ, что

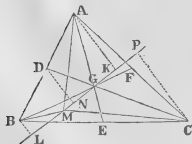
$$BE \cdot CD = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \left(\frac{BL}{2}\right)^2 = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \left(\frac{AB - AC}{2}\right)^2.$$

121. Опустимъ $\perp \perp BE$ и CD на равнодѣл. внѣшняго угла при A и продолжимъ CD до пересѣченія съ BA въ L ; опустимъ $\perp CK$ на AB . Тогда $\triangle ACD = \triangle ADL$ и $\triangle LKC \sim \triangle ADC$; откуда $KL : CD = CL : AC$ или $KL = \frac{CD \cdot CL}{AC} = \frac{2CD^2}{AC}$. Изъ $\triangle CBL$: $BC^2 = BL^2 + CL^2 - 2BL \cdot KL$ или $BL^2 - BC^2 = 2BL \cdot KL - 4CD^2 = 2(AB + AC) \cdot \frac{2CD^2}{AC} - 4CD^2 = \frac{4AB \cdot CD^2}{AC} = 4 \cdot \frac{BE}{CD} \cdot CD^2 = 4BE \cdot CD$; отсюда найдемъ, что

$$BE \cdot CD = \left(\frac{BL}{2}\right)^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB + AC}{2}\right)^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2.$$

122. D, E и F (фиг. 41) середины AB, BC и AC въ $\triangle ABC$; G пересѣченіе прямыхъ AE, BF и CD ; M ка-
кая-нибудь точка. Опустимъ $\perp \perp AK, BL, CP$ и DN на CM ; изъ $\triangle \triangle AMG, BMG$ и CMG найдемъ:

Фиг. 41.



$$AM^2 = AG^2 + MG^2 + 2MG \cdot GK,$$

$$BM^2 = BG^2 + MG^2 - 2MG \cdot ML,$$

$$\text{и } CM^2 = CG^2 + MG^2 + 2MG \cdot PG.$$

Откуда: $AM^2 + BM^2 + CM^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + MG^2 + 2MG(GK + PG - ML)$. Такъ какъ $AD = BD$, то и $NK = NL$ и $CG = 2DG$, а потому $PG = 2NG$ и $GK + PG - ML = NK - NG + 2NG - (NL - MN) = NK + NG - NL + MN = NG + MN = MG$ и слѣдова-

тельно, $AM^2 + BM^2 + CM^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + MG^2 + 2MG \cdot MG =$
 $+BG^2 + CG^2 + 3MG^2$.

123. Положимъ, что точка M на BC . Тогда, опустивъ \perp AD на BC , найдемъ изъ $\triangle ABM$ и ACM , что $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2BM \cdot DM$
 $= AM^2 + CM^2 + 2CM \cdot DM$. Умноживъ первое равенство на BM , а второе на BM , сложимъ ихъ: тогда получимъ:

$$AB^2 \cdot CM + AC^2 \cdot BM = AM^2 \cdot BC + BM^2 \cdot CM + CM^2 \cdot BM$$

$$AB^2 \cdot CM + AC^2 \cdot BM = AM^2 \cdot BC + BM \cdot CM \cdot BC = (AM^2 + BM \cdot CM)BC.$$

124. Пусть AM равнодѣлящая $\angle A$. На основаніи пред. теор., имѣемъ:
 $AB^2 \cdot CM + AC^2 \cdot BM = (AM^2 + BM \cdot CM)BC$. Также $BM : AB = CM$
 $= BC : (AB + AC)$; откуда $BM = AB \cdot \frac{BC}{AB + AC}$ и $CM = AC \cdot \frac{BC}{AB + AC}$. Под-

ставивъ въ предыдущемъ равенствѣ вмѣсто BM и CM ихъ величины, найдемъ, по упрощеніи, $AB \cdot AC = AM^2 + BM \cdot CM$.

125. $\angle PFR = \angle PCQ = \angle CQG$ и $\angle FHR = \angle CGQ$. Слѣд. $\triangle FHR \sim \triangle CGQ$, а потому $HR : HF = CG : CQ$ или $CQ \cdot HR = HF \cdot CG$. CG — постоянн.

126. Окружности O и O' касаются въ точкѣ A . Проведемъ сѣкущую BAC . $\triangle AOB \sim \triangle AO'C$ и слѣдовательно $AB : AC = AO : AO'$.

127. $\angle DCQ = \angle RPQ$, а потому около $\diamond QCNP$ можно описать окружность. Тогда $\angle RNC = \angle MNP = \angle CQM$ и $\angle RCN = \angle QCN$, а потому $\triangle RCN$ и QCM подобны.

128. $\angle PLC$ и PMC прямые, а потому точки P, L, M и C лежатъ на окружности; слѣд. $\angle MPC = \angle LMC$ (вписан. въ $\cup MLCP$) $= d - \angle PLG =$
 $= \angle GPL$. Также $\angle PMC = d = \angle PGL$, а потому $\triangle MPC \sim \triangle PGL$ и слѣдовательно $PG : PM = PL : PC$ или $PG \cdot PC = PM \cdot PL$.

129. Равнодѣлящая $\angle OAO'$ пересѣкаетъ окружности O и O' въ P и Q . Проведемъ OP и $O'Q$. Радиусы OA и $O'A$ \perp -ы къ касательнымъ, а потому прямая AQP будетъ равнодѣлящею угла между касательными. Слѣдовательно, $\triangle OAP \sim \triangle O'AQ$; откуда $AP : AQ = OA : O'A$.

130. Опишемъ окружность O , проходящую черезъ точки A, B и C . Я говорю, что эта окружность пройдетъ и чрезъ точку D . Допустимъ, что эта окружность пересѣчетъ прямую KL не въ D , а въ D' ; тогда $AE \cdot BE = EC \cdot ED'$, и, сравнивъ это равенство съ даннымъ, увидимъ, что $ED' = ED$, т.-е. точка D' совпадаетъ съ D .

131. Доказательство сходно съ предыдущимъ.

132. $\angle EBC = \angle EDC = \angle FDA = \angle FBA$ и $\angle AFB = \angle BFE$; слѣд. $\angle BCE =$
 $= \angle BAF$ и потому $\triangle ABF \sim \triangle BCE$. Откуда $\triangle BCE = \angle BAF = \angle CDB =$
 $= \angle BEC$, т.-е. $\triangle BEC$ равнобедренный. Также и $\triangle AFB$ равнобедренный.

133. $\angle BAC = \angle BPC$ и $\angle B'A'C' = \angle B'PC'$; но $\angle BPC = \angle B'PC'$ и потому $\angle BAC = \angle B'A'C'$. То же самое и для другихъ угловъ.

134. $\angle EOD = \frac{1}{2}d = \angle OED$; слѣд. $DE = OD$. Изъ $\triangle OCD$ найдемъ, что $CD^2 + OD^2 = OC^2$ или $CD^2 + DE^2 = OI^2$.

135. Соединивъ какую-нибудь точку A полуокружности съ концами діаметра BC , получимъ вписанный $\triangle ABC$. Изъ точки D на BC возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ AB въ E , полуокружность въ F и AC въ G ; тогда $DF^2 = BD \cdot CD = DE \cdot DG$, что видно изъ подобія $\triangle BDE$ и CDG ,

136. Дать полукругъ ADB , гдѣ D середина полуокружности AB и O центръ полукруга. Изъ точки C на AB возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ полуокружность въ точкѣ E , и соединимъ E съ O , а D съ C и O . Тогда $CD^2 + CE^2 = (OD^2 + OC^2) + (OE^2 - OC^2) = 2OA^2$.

137. Соединимъ точки B и C . Изъ точки C проведемъ прямую $|AB$ до пересѣченія съ DE въ точкѣ F . $\triangle OCF = \triangle ODB$ и потому $CF = BD$; $\triangle ADE \sim \triangle CFE$ и слѣд. $AE : CE = AD : CF = AD : BD$.

138. Опустимъ $\perp PM$ на AB . $\triangle CBE \sim \triangle BPM$; слѣд. $CE : PM = CB : MB$. Также $\triangle CDA \sim \triangle APM$, а потому $CD : PM = AC : AM$ и слѣд. $CE : ED : PM^2 = AC : CB : AM : MB$. Но $AM \cdot MB = PM^2$, $AC \cdot CB = CE^2$ и потому $CE : CD : PM^2 = CF^2 : PM^2$; отсюда $CF^2 = CE \cdot CD$.

139. AB хорда круга O ; C пересѣченіе ея съ діаметромъ и $OD \perp$ на AB . Въ $\triangle COD$ уголъ $OCD = \angle COD = 45^\circ$ и слѣд. $CD = OD$; тогда $BC^2 + AC^2 = (BD + OD)^2 + (BD - OD)^2 = 2(BD^2 + OD^2) = OA^2 + OB^2 = 2OB^2$.

140. Проведемъ діаметръ AF . Изъ подобія $\triangle ACE$ и ABF имѣемъ: $AC : AF = AE : AB$ или $AB \cdot AC = AF \cdot AE$.

141. Опустимъ $\perp AD$ на BC и проведемъ діаметръ AE . $\triangle ABD \sim \triangle ACE$, а потому $AB : AE = AD : AC$ или $c : 2R = h_a : b$; отсюда $bc = 2Rh_a$. Точно такъ же покажемъ, что $ab = 2Rh_b$ и $ac = 2Rh_c$.

142. Въ $\triangle ABC$, r и r_b радіусы вписаннаго и вѣтвѣвписаннаго круговъ, касающихся стороны AC ; O и O' ихъ центры; D точка пересѣченія BO' и AC ; $BF \perp$ на AC , т.-е. $BF = h_b$; опустимъ $\perp \perp OE$ и $O'D'$ на AC . По заданію, $a - b = b - c$ или $a + c = 2b$. Тогда $AD : DC = c : a$; отсюда $(AD + DC) : AD = (a + c) : c$ или $b : AD = (a + c) : c$ или $\frac{1}{2}(a + c) : AD = (a + c) : c$; отсюда $AD = \frac{1}{2}c$ и слѣд. $BC = \frac{1}{2}a$. Въ $\triangle BCD$ имѣемъ: $OD : OB = CD : a$ или $OD : OB = 1 : 2$; отсюда $OD = \frac{1}{2}BD$. $\triangle DOE \sim \triangle DBF$, а потому: $OE : h_b = OD : BD$ или $r : h_b = 1 : 3$; отсюда $h_b = 3r$. CO' есть равнодѣл. вѣшняго $\angle C$, а потому изъ $\triangle DBC$ имѣемъ: $O'D : O'B = OD : BD$ или $O'D : O'B = 1 : 2$, а потому $O'D = BD$. Слѣд. $\triangle O'DD' = \triangle BFD$, а потому $r_b = h_b = 3r$.

143. $\triangle ABC \sim \triangle ABD$; слѣд. $AB : AD = AC : AB$ или $AB^2 = AC \cdot AD$.

144. E точка пересѣченія AC съ DP . Изъ подобія $\triangle CDE$ и BDP , $\triangle ACD$ и PBO имѣемъ: $CE : CD = BP : BD$ и $CD : AC = OB : BP$; перемноживъ почленно эти равенства, найдемъ: $CE : AC = OB : BD = 1 : 2$.

145. Продолживъ AO до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ E , получимъ: $AC^2 = AO \cdot AB$ и $AD^2 = AE \cdot AB = 2AO \cdot AB = 2AC^2$.

146. Изъ точки A болѣеи окружности проведемъ касательную AP къ меньшей, гдѣ P точка касанія. Тогда $AC \cdot AD = AP^2 = OA^2 - OP^2$; но OP и OA радіусы окружностей — величины постоянныя, а потому $AC \cdot AD$ и $BD \cdot BC$ тоже величина постоянная.

147. $\angle BAF = \angle GAC$ и $\angle ABF = \angle AGC$; слѣд. $\triangle ABF \sim \triangle AGC$; отсюда $AB : AG = AF : AC$ или $AB \cdot AC = AF \cdot AG$.

148. Пусть A и D по одну сторону BC . Продолжимъ AD до пересѣченія CB въ E ; тогда $\angle ADB = 2d - \angle ACB = 2d - \angle ABC = \angle ABE$; слѣдовательно $\triangle ABD \sim \triangle ABE$; отсюда $DB : DA = BE : AB \dots (1)$. Также $\angle ADC = \angle ABC = \angle ACB$ и слѣд. $\triangle ADC \sim \triangle ACE$; отсюда $DC : DA = CE : AC$ (или $AB \dots (2)$). Вычтемъ (1) изъ (2); получимъ: $(DC - DB) : DA = BC : AB$,

1.-е. величина постоянная. Подобнымъ образомъ покажемъ, когда A и D лежатъ по разнымъ сторонамъ BC .

149. $BD \cdot CD = DM \cdot DN$ или $BD \cdot CD = (AM + AD)(AM - AD) = AM^2 - AD^2$; откуда $BD \cdot CD + AD^2 = AM^2$.

150. $\angle EAB = \angle CAD$ и $\angle AEB = \angle ACD$. Слѣд. $\triangle ABE \sim \triangle ACD$; откуда $AB : AE = AD : AC$ или $AB \cdot AC = AE \cdot AD$. Слѣд. $AB \cdot AC + AD^2 = AE \cdot AD + AD^2 = AD(AE + AD) = AD \cdot DE = DB \cdot DC$.

151. Въ $\triangle ABC$ опустимъ $\perp AD$ на гипотенузу. На BD и CD опишемъ полуокружности, кот. пересѣкутъ AB и AC въ E и F ; соединимъ D съ E и F . Изъ $\triangle ABC$ и ABD найдемъ, что $AB^2 = BC \cdot BD$ и $BD^2 = AB \cdot BE$; откуда $BC : BE = BC^3 : AB^3$. Точно такъ же $BC : CF = BC^3 : AC^3$. Изъ этихъ пропорцій получимъ: $BE : CF = AB^3 : AC^3$.

152. $\triangle ABC$ вписанъ въ кругъ O , гдѣ $AB = AC = 2BC$; $AD \perp$ къ BC и $OE \perp AB$. Тогда $AB = 4BD$ и $AB^2 : AD^2 = 16 : 15$. $\triangle AOE \sim \triangle ABD$ и слѣд. $AO^2 : AB^2 = AE^2 : AD^2 = AB^2 : 4AD^2 = 4 : 15$.

153. AB діаметръ круга O . Возьмемъ на AB точки C и D такъ, чтобы $OC = OD$, и еще точку M на окружности. Изъ $\triangle CDM$ (III, 104) имѣемъ: $MC^2 + MD^2 = 2(MO^2 + OC^2)$, гдѣ MO и OC постоянныя величины.

154. Прямая OO' пересѣкаетъ окружности въ G и H . Тогда $\sphericalangle AOC = \sphericalangle O'OC = \sphericalangle O'DO = \sphericalangle O'HO$, т.-е. $\angle AOG = \angle CO'O$ и $OO' = O'C$; слѣд. фигура $OACO'$ будетъ ромбъ. Кромѣ того $CD \cdot BD = OD \cdot DF$ или $CD = DF$. Также $EF = ED + DF = 2OO' + DF = AC + BD + DF = AC + BD + CD = AB$.

155. QE и QF касательныя въ Q къ окружностямъ AQC и BQD . Тогда $\angle CQE = \angle QAC$ и $\angle CQF = \angle QBD$; слѣд. $\angle EQF = \angle QBD - \angle QAC = \angle APB$. Продолжимъ PQ до пересѣченія съ окружностью AQC въ H . Тогда $PQ \cdot PH = PA \cdot PC = PB \cdot PD$ ($\triangle APQ \sim \triangle PQD$); слѣд. H лежитъ и на окружности BQD , т.-е. въ пересѣченіи окружностей.

156. $AB \perp CD$. Слѣд. $AC = AD$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ и $\angle CFA = \angle DFA$, а потому FE равносторонняя; слѣд. $CF : FD = CE : ED$. Также въ $\triangle CGD$, $CG : DG = CE : ED$, а потому $CF : FD = CG : DG$ или $CF : CG = DF : DG$.

157. Изъ подобія $\triangle ABE$ и CDE , $\triangle BEC$ и ADE найдемъ: $AB : CD = AE : DE$ и $BC : AD = BE : AE$. Перемноживши почленно эти равенства, получимъ: $AB \cdot BC : AD \cdot CD = BE : DE$.

158. Пусть A будетъ точка пересѣченія прямыхъ PP' и OO' . Изъ подобія $\triangle AOP$ и $AO'P'$ найдемъ: $AO : AO' = OP : O'P'$, или $(AO - AO') : AO' = (OP - O'P') : O'P'$, или $OO' : AO' = (OP - O'P') : O'P'$. Но OO' , OP и $O'P'$ величины постоянныя, а потому и AO' будетъ также величина постоянная.

159. Въ $\triangle ABC$ черезъ точки A и B , A и C проведемъ двѣ окружности, пересѣкающіяся на BC въ точкѣ D . Проведемъ AE и AF , діаметры этихъ круговъ. $\angle AEB = 180^\circ - \angle ADC = \angle AFC$ и, слѣдовательно, $\triangle ABE \sim \triangle ACF$; откуда $AE : AF = AB : AC$.

160. Около $\diamond ABDC$ и $DBEF$ опишемъ окружности. Тогда $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEF$ и $\angle A$ общій; слѣд. $\triangle ABC \sim \triangle ACE$.

161. Раздѣлимъ полуокружность AB , напримѣръ, на 4 части въ точкахъ C , D и E . Хорды CC' , $C'D$, DD' , $D'E$ и EE' пересѣкаютъ AB въ точкахъ M , N , O , P и Q . $\triangle ABC$, ACM , MNC' , DON , $D'OP$, EPQ

и $BE'Q$ подобны, а потому $AC : BC = AM : MC = MN : MC' = ON : OD = OP : OD' = PQ : EQ = BQ : E'Q = (AM + MN + ON + OP + PQ + BQ) : (MC + MC' + OD + OD' + EQ + E'Q) = AB : (CC' + DD' + EE')$.

162. Въ $\diamond \diamond BCEF$, $BCFA$, $ABCD$ и $BCDE$, на основаніи Птоломеевой теоремы, $CE \cdot BF = xy - cc' \dots (1)$; $AC \cdot BF = b'c' + ax \dots (2)$; $AC \cdot BD = ab + c'z \dots (3)$ и $BD \cdot CE = a'c' + by \dots (4)$. Перемноживъ (1) на (3) и (2) на (4), увидимъ, что первыя части равенствъ одинаковы, а потому вторыя части равны, т.-е. $(xy - cc')(ab + c'z) = (b'c' + ax)(a'c' + by)$; отсюда $xyz = aa'x + bb'y + cc'z + abc + a'b'c'$.

163. Опустимъ $\perp PE$ на AB . $\triangle ABD \sim \triangle APE$ и $\triangle ABC \sim \triangle BPE$; отсюда $AB \cdot AE = AP \cdot AD$ и $AB \cdot BE = BP \cdot BC$. Сложивъ почленно эти равенства, получимъ: $AB^2 = AD \cdot AP + BC \cdot BP$.

164. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + DE^2)$; но $DB^2 = BD \cdot DC = AD \cdot DE$ и потому $AB^2 + AC^2 = 2AD \cdot DE + 2AD^2 = 2AD(DE + AD) = 2AD \cdot AE$.

165. $\triangle FDB \sim \triangle BAD$, а потому $AD \cdot DF = BD^2$; также $AC \cdot CE = BC^2$. Слѣд. $AC \cdot CE + AD \cdot DF = BC^2 + BD^2 = AB^2$.

166. Продолжимъ AO до пересѣченія съ окружностью въ D . Построимъ $\angle AFG = \angle ADB$ и $\angle AEN = \angle ADC$, гдѣ точки G и H на AO . Тогда около $\diamond \diamond BDGF$ и $CDHE$ можно описать окружности, а потому $\angle AGF = \angle ABD = 2d - \angle ACD = 2d - \angle AHE$ и слѣд. $FG \parallel EH$ и $AN = OG$. $\triangle ABD \sim \triangle AFG$ и $\triangle AEN \sim \triangle ACD$; поэтому $BA \cdot AF = DA \cdot AG$ и $CA \cdot AE = DA \cdot DH = DA \cdot OG$. Откуда $BA \cdot AF + CA \cdot AE = DA(AG + OG) = DA \cdot AO = (AO + OD) \cdot AO = AO^2 + AO \cdot OD = AO^2 + BO \cdot CO$.

167. Проведемъ прямую DF , кот. пересѣчетъ AB въ G и касательную BH къ кругу, гдѣ H точка касанія. Положимъ G между A и B . Тогда $\angle BFG = \angle EFD = \angle ECD = \angle EAB$; слѣд. $\triangle FBG \sim \triangle EBA$; отсюда $BG : BF = BE : BA$ и слѣд. $BG \cdot BA = BE \cdot BF = BH^2$. Но BA и BH постоянны, а потому BG постоянное; слѣд. точка G постоянная.

168. Продолжимъ CO до пересѣченія съ окружностью въ E и опишемъ окружность около $\triangle POP'$. Тогда $CD \cdot CO = CP \cdot CP' = CA \cdot CE =$ постоянной и CO постоян., а потому CD постоянное и слѣд. D неподвижная точка. $\diamond \diamond BDOP'$ вписанъ въ кругъ, а потому $\angle CPD = \angle COP'$ и $\angle CPA = \angle CEP'$; $\angle COP' = 2\angle CEP'$, а потому $\angle CPD = 2\angle CPA$.

169. Проведемъ въ кругѣ хорду AB и касательныя къ нему въ точкахъ A и B до пересѣченія ихъ въ C . Изъ какой-нибудь точки P дуги AB опустимъ $\perp \perp PD$, PE и PF на AB , BC и AC . Изъ подобія $\triangle \triangle ADP$ и BER , BDP и AFP найдемъ: $PD : PE = PA : PB$ и $PD : PF = PB : PA$. Перемноживъ эти равенства, получимъ: $PD^2 : PE \cdot PF = 1$ или $PD^2 = PE \cdot PF$.

170. Окружность DAB проходить чрезъ центръ C окружности AEF ; DE и DF касательныя къ окружности C ; G пересѣченіе EF съ CD . Продолжимъ AG до пересѣченія съ окружностью DAC въ B . $\angle DFC$ прямой, а потому $DG \cdot GC = FG^2 = FG \cdot GE$; AGB и DGC хорды окружности DAC , а потому $AG \cdot GB = DG \cdot GC = FG \cdot GE$ и слѣд. точка B на окружности AEF . Поэтому AB общая хорда окружностей проходить черезъ точку G , середину EF .

171. Черезъ концы A и B діаметра круга O проведемъ касательныя, которыя пересѣкутъ касательную въ точкѣ C къ этому же кругу въ точкахъ E и F . Соединивъ O съ точками E , F и C , получимъ прямоугольный $\triangle EOF$, въ которомъ $EC : OC = OC : CF$, или $EC \cdot CF = OC^2$.

172. Проведемъ касательныя AD и QE къ окружности, гдѣ D и E точки касанія. Тогда $AO^2 = AD^2 + DO^2$ и $QO^2 = QE^2 + EO^2$; $QP^2 = QA^2 + AP^2$, $QC^2 = QI^2 + AO^2 = QA^2 + AD^2 + DC^2$ (1). Но $QC^2 = QE^2 + EO^2 = QE^2 + DO^2$ (2), а потому изъ (1) и (2): $QE^2 = QA^2 + AD^2 = QA^2 + AP^2 = QP^2$. Слѣд. $QE = QP$.

173. PR , QS и MT касательныя къ кругу O , гдѣ R , S и T точки касанія. $PR^2 + QS^2 + RO^2 + SO^2 = OP^2 + OQ^2 = 2(OM^2 + PM^2) = 2(MT^2 + OT^2 + MP^2)$. Но $OR = OS = OT$, а потому $PR^2 + QS^2 = 2(MT^2 + PM^2)$.

174. Изъ точки A окружи. проведемъ хорды: AB , AC , AD ,...; діаметръ AK и еще прямую, параллельную касательной въ A , кот. пересѣчетъ эти хорды въ M , N , P ,...; а діаметръ AK въ L . $\triangle AML \sim \triangle ABK$; поэтому $AM : AK = AL : AB$ или $AM \cdot AB = AL \cdot AK = \text{постоянной величины}$.

175. A и B двѣ данныя точки внѣ круга O ; AP , AQ , BR и BS касательныя къ нему, гдѣ P , Q , R и S точки касанія; D и E середины PQ и RS . Въ $\triangle \triangle APO$ и BRO имѣемъ: $PO^2 = OD \cdot OA$ и $RO^2 = OB \cdot OE$. Но $PO = KO$, а потому $OD \cdot OA = OB \cdot OE$, т.-е. чрезъ точки A , D , E и B можно провести окружность.

176. $\angle TAO$ и TQO прямые, а потому можно описать окружность около $\diamond TAOQO$. Также можно описать окружность около $\diamond TQOB$. Тогда $\angle AQT = \angle AOT = \angle TOB = \angle TQB$, т.-е. TQ будетъ равнодѣлящая $\angle AQB$. $\diamond TAQB$ вписанный въ кругъ, а потому $TQ \cdot AB = TB \cdot AQ + TA \cdot BQ = TA(AQ + BQ)$; откуда $AQ + BQ = TQ \cdot \frac{AB}{AT}$, гдѣ $\frac{AB}{AT}$ постоянное,

а потому $AQ + BQ$ пропорціонально TQ .

177. Круги O , O' , O'' , O''' ,... касаются въ точкѣ A . Черезъ точку A проведемъ общую касательную, а изъ точки G , взятой на касательной, опишемъ дугу, которая пересѣчетъ окружности въ точкахъ B , C , D ,... Прямыя BG , CG , DG ,... пересѣкутъ еще каждую изъ окружностей, соответственно, въ B' , C' , D' ,... Найдемъ: $GA^2 = GB \cdot GB' = GC \cdot GC' = GD \cdot GD' = \dots$. Но $GB = GC = GD = \dots$, а потому $GB' = GC' = GD' = \dots$ или $BB' = CC' = DD' = \dots$

178. Въ $\angle XAY$ вписаны послѣдовательно окружности B , C и D , касающіяся сторонъ угла и между собою. Пусть r , ρ и R радіусы окружностей; E , F и G точки касанія на AX . $\triangle \triangle ABE$, ACF и ADG подобны, а потому $AB : r = AC : \rho = AD : R$; откуда $(AC - AB) : (\rho - r) = (AD - AC) : (R - \rho)$ или $(\rho + r) : (\rho - r) = (R + \rho) : (R - \rho)$. Откуда $\rho^2 = Rr$.

179. $\angle AOE = \angle ADE = \angle CDF = \angle COF$ и $\angle FCO = \angle TDO = 2d - \angle ODA = \angle OEA$. Слѣдовательно $\triangle OEA \sim \triangle OFD$; откуда $OA : OF = OE : OC$ или $OA \cdot OC = OE \cdot OF$.

180. $\angle KPM = \angle KQL$, а потому $\triangle KMP \sim \triangle KLQ$; откуда $KM : KL = KP : KQ$. $\triangle KPL \sim \triangle KNQ$, а потому $KL : KN = KP : KQ$. Слѣдовательно, $KM : KL = KL : KN$.

181. Прямая DC пересѣкаетъ окружности A и B въ G и H . Тогда $DE^2 = DG \cdot DC$ и $DF^2 = DC \cdot DH$... (1); но $\angle DCB = \angle ACG = \angle AGC$; слѣдовательно, $\triangle DCB \sim \triangle DAG$; откуда $BC \cdot DG = AG \cdot DC = AC \cdot DC$... (2). $\triangle ACD \sim \triangle DBH$ и потому $AC \cdot DH = BH \cdot DC = BC \cdot DC$..., (3). Изъ (2) и (3): $DG \cdot DH = DC^2$ и изъ (1) $DE^2 \cdot DF^2 = DG \cdot DH \cdot DC^2 = DC^2 \cdot DC^2 = DC^4$; откуда $DE \cdot DF = DC^2$.

182. EF общая касательная къ O и O' ; $AB > CD$. Проведемъ $OE, O'F$ и $O'G \parallel FE$ до пересѣченія съ OE въ G . Изъ O опишемъ окружность радиусомъ OG , которая пересѣчетъ OA и OB въ H и K ; тогда $O'G = EF$. Также $EF^2 = O'G^2 = O'H \cdot O'K$; но $O'H = AC$ и $O'K = BD$, а потому $EF^2 = AD \cdot BC$. Если окружности касаются, то точки B и C совпадутъ и $EF^2 = AB \cdot BD$, а если пересѣкаются, то $EF^2 = AD \cdot BC$, гдѣ A и B на окружности O , а C и D на окружности O' .

183. $ABCD$ параллелограммъ; E на AC . Проведемъ окружн. чрезъ A и E ; пусть O ея центръ; BG и DH касательныя къ ней. Опустимъ $\perp OK$ на AC ; тогда $BO^2 + DO^2 = BG^2 + DH^2 + 2AO^2 = BG^2 + DH^2 + 2(AK^2 + KO^2)$. Также $BO^2 + DO^2 = 2(OF^2 + BF^2) = 2(OK^2 + KF^2 + FB^2)$; слѣдовательно, $BG^2 + DH^2 + 2AK^2 = 2(KF^2 + FB^2)$. Но AK, KF и FB постоянныя, а потому и сумма: $BG^2 + DH^2$ постоянная величина.

184. Окружность, описанная изъ E радиусомъ EA , будетъ ортогональная*) къ данной окружности и хорда AB будетъ радикальною осью. Проведемъ изъ F касательныя FD и FG къ окружностямъ O и E ; тогда $FD^2 = FA \cdot FB$ и $FG^2 = FA \cdot FB$; слѣд. $FD = FG$. Описавъ изъ F окружность радиусомъ FG , увидимъ, что $\angle EGH$ прямой и слѣд. окружности E и F ортогональныя.

185. Изъ данной пропорціи имѣемъ, что $(AB + AC) : AB = (AC + BC) : AC$ или $BD : AB = AB : AD$.

186. Пусть прямая AB раздѣлена въ точкѣ C въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, т.-е. $AB : AC = AC : BC$. Отсюда имѣемъ: $(AB - AC) : AC = (AC - BC) : BC$ или $BC : AC = (AC - BC) : BC$.

187. Прямая AB раздѣлена въ точкѣ C въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, т.-е. $AC^2 = AB \cdot BC$. Но $AC^2 = (AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC$ или $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AC^2$; откуда $AB^2 + BC^2 = 3AC^2$.

188. По заданію, $AB : AE = AE : AD$, а потому $\triangle AEB \sim \triangle ADE$ и слѣд. $\angle ABE = \angle AED$. Такъ какъ $\angle ACE = \angle AEC$, то $\angle ACE - \angle ABE = \angle AEC - \angle AED$ или $\angle CEB = \angle DEC$.

189. AC и CB такіе отрезки, что $(AC + CB) : CB = CB : AC$. Но CP равнодѣляющая $\angle C$, а потому $CB : AC = PB : AP$; слѣд. $(AC + CB) : CB = (AP + PB) : PB$ и потому $(AP + PB) : PB = PB : AP$ или $AP(AP + PB) = PB^2$. Но $CP^2 = AC \cdot CB - AP \cdot PB = CB^2 - AC^2 - PB^2 + AP^2 = QB^2 - AQ^2 - PB^2 + AP^2 = QB^2 - PB^2 + AP^2 - AQ^2 = QP(QB + PB) + QP(AP + AQ) = 2PQ \cdot AB$.

*) Если говорить, что окружности встрѣчаются подъ даннымъ \angle , то это значить, что касательныя, проведенныя къ окружностямъ въ точкѣ ихъ пересѣченія, составляютъ данный уголъ. Если данный уголъ прямой, то окружности называются ортогональными.

190. Пусть E точка пересѣченія равнодѣлящей $\angle B$ съ AC . Тогда, по свойству равнодѣлящей угла, имѣемъ: $AB:BC=AE:CE$; но $AB=AC$, $BC=BE=AE$, а потому $AC:AE=AE:CE$.

191. Пусть въ равнобедренномъ $\triangle ABC$ уголъ B вдвое болѣе $\angle A$. Проведемъ равнодѣлящую $\angle B$, которая пересѣчетъ AC въ E . $\triangle ABC \sim \triangle EBC$, а потому $AC:BC=BC:CE$; но $CE=AC=AE=AC-BE=AC-BC$, а потому $AC:BC=BC:(AC-BC)$.

192. 1) BD касательная къ кругу O , и потому $\angle BDA=\angle AED$; слѣдовательно, въ равнобедренныхъ $\triangle ABD$ и ADE , $\angle BAD=\angle DAE$; поэтому въ окружности A дуга $CD=\cup DE$ и хорда $CD=DE$. 2) $\triangle ABD=\triangle ADE$, а потому окружности $ACDE$ и ABD равны. 3) Пусть G середина $\cup CD$ и AF диаметръ круга O ; $\cup DC=\cup DE$ и слѣд. $\cup DF=\cup DG$ и хорда $DG=DF$. $\angle BDG$ измѣряется $\frac{1}{2}\cup DG$ и $\angle CDG$ измѣряется $\frac{1}{2}\cup CG$; слѣдовательно, $\angle BDG=\angle CDG$, а потому DG равнодѣлящая $\angle BDC$. $\angle BDG=\angle CDG$; слѣдовательно $BG=CG=DG$, т.-е. G будетъ центръ окружности, описанной около $\triangle BCD$, а $DG=DF$ будетъ радиусъ окружности BCD .

193. $\angle AEO=\angle AFO=d$, а потому окружность, описанная изъ G , середины AO , радиусомъ GA , пройдетъ чрезъ F и E . Проведемъ радиусъ GE такъ, чтобы $\angle DGE'=\angle DGF$; тогда $\triangle DGE'=\triangle DGF$ и слѣд. $\angle GDE'=\angle GDF$; по (II, 119) $\angle GDF=\angle GDE$, а потому $\angle GDE'=\angle GDE$, т.-е. $DE'E$ прямая и E' лежитъ на пересѣченіи DE съ окружностью G . Тогда $DO \cdot DA=DE' \cdot DE=DF \cdot DE$.

194. FG будетъ общая хорда. Тогда $AC \cdot CD=CF \cdot CG=BC \cdot CE$; откуда $AC:BC=CE:CD$, или $(AC-BC):BC=(CE-CD):CD$ или $AB:BC=DE:CD$. Также $AC:CE=BC:CD$ или $(AC+CE):AC=(BC+CD):BC$; откуда $AE:AC=BD:BC$ и $AE:CE=BD:CD$. Перемноживъ послѣдніи равенства, найдемъ: $AE^2:BD^2=AC \cdot CE:BC \cdot CD$.

195. Проведемъ черезъ F прямую $\perp AB$, пересѣкающую окружн. FDG въ G . Изъ C , середины AB , возставимъ \perp къ AB , кот. пересѣчетъ окружность $ADBE$ въ E . Опустимъ $\perp EH$ на FG . Имѣемъ: $FA \cdot FB=FE \cdot FD$. $\angle EHG$ и EDG прямые, а потому можно описать окружность около $EHDG$; тогда $FE \cdot FD=EH \cdot FG=CE \cdot FG$. Слѣдовательно, $FA \cdot FB=FG \cdot CE$.

196. $\triangle ABE \sim \triangle AC'O'$; слѣд. $AB:BC'=AE:EO'$, или $AB:2BC'=2EO':2EO'$. Также $\triangle A'B'E \sim \triangle A'OC$ и потому $A'B':2B'C'=2EO':2EO'$; перемноживъ почленно пропорціи, получимъ: $AB \cdot A'B'=4BC' \cdot B'C'$.

197. Продолжимъ BA до пересѣченія въ T съ касательною въ P къ окружности. Дано: $AC:CB=AP:BP$; слѣд. PC будетъ равнодѣлящею $\angle APB$; $\angle CPT=\angle CPA+\angle APT=\angle CPB+\angle CBP=\angle TCP$. Тогда $TC=TP$ и потому, возставивъ $\perp PX$ къ TP и $\perp CY$ къ CT , которые пересѣкутся въ O , найдемъ центръ искомой окружности.

198. Продолжимъ BA до пересѣченія въ T съ касательною къ окружностямъ въ D . $\angle TDC=\angle TCD$ и $\angle TDB=\angle DAB$, какъ измѣряющіеся одной и той же дугою окружности DAB . Тогда $\angle CDB=\angle TDC-\angle TDB=\angle TCD-\angle DAC=\angle CDA$; слѣдовательно, DC есть равнодѣлящая $\angle ADB$ и потому $AC:CB=AD:DB$.

199. E — точка пересѣченія хорды AB и CD круга O , гдѣ $AB > CD$,

$AE < BE$ и $ED < EC$. Опустимъ $\perp \perp OF$ и OG на AB и CD ; тогда $2EF = BE - AE$ и $2GE = CE - DE$. Получимъ: $AB^2 - CD^2 = 4BF^2 - 4CG^2 = 4(OB^2 - OF^2) - 4(OC^2 - OG^2) = 4OC^2 - 4OE^2 = 4(OE^2 - EG^2) - 4(OE^2 - EF^2) = 4EF^2 - 4EG^2 = (2EF)^2 - (2EG)^2 = (BE - AE)^2 - (CE - DE)^2$.

200. Опустимъ перпенд. OF на CD . Изъ $\triangle CDE$ (III, 104) $CE^2 + DE^2 = 2(EF^2 + CF^2) = 2(OE^2 + OF^2 + CF^2) = 2(OE^2 + OC^2) = 2(OE^2 + OA^2)$; но $OA = \frac{1}{2}(AE + BE)$ и $OE = \frac{1}{2}(BE - AE)$, а потому, замѣнивъ въ предыдущемъ равенствѣ OE и OA ихъ величинами, найдемъ: $CE^2 + DE^2 = AE^2 + BE^2$.

201. Положимъ, что перпенд. хорды AB и CD пересѣкаются въ точкѣ E , лежащей внутри круга O . Тогда $AC^2 + BD^2 = (AE^2 + CE^2) + (BE^2 + DE^2) = (AE^2 + DE^2) + (CE^2 + BE^2) = AD^2 + BC^2$. Проведемъ діаметръ AF данного круга; $\angle ABF = d = \angle AED$; слѣдовательно, $CD \parallel BF$ и $BC = DF$; отсюда $AD^2 + BC^2 = AD^2 + DF^2 = AF^2$ и $AE^2 + CE^2 + BE^2 + DE^2 = AF^2$.

202. Въ кругѣ O хорда $AB \perp$ къ хордѣ CD и пересѣкаетъ ее въ точкѣ E . Проведемъ діаметръ $FE OG$. Тогда $AB^2 + CD^2 = (AE + BE)^2 + (CE + DE)^2 = AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2 + 2AE \cdot BE + 2CE \cdot DE$ (III, 203) $= FG^2 + 4EF \cdot EG = FG^2 + 4OF^2 - 4OE^2$; слѣдовательно, $AB^2 + CD^2 + 4OE^2 = 2FG^2$.

203. AB — діаметръ данного круга O ; C и D — точки, взятые на немъ такъ, что $OC = OD$; ECF — хорда круга. Изъ $\triangle CDE$ и CDF : $CE^2 + DE^2 = 2(OC^2 + OF^2)$ и $CF^2 + DF^2 = 2(OC^2 + OF^2)$ или $CE^2 + CF^2 + DE^2 + DF^2 = 4OC^2 + 4r^2$, гдѣ r — радіусъ круга. Но $CE^2 + CF^2 = (CE + CF)^2 - 2CE \cdot CF = EF^2 - 2AC \cdot BC = EF^2 - 2(r - OC)(r + OC) = EF^2 - 2r^2 + 2OC^2$; слѣдовательно, $EF^2 - 2r^2 + 2OC^2 + DE^2 + DF^2 = 4OC^2 + 4r^2$ или $EF^2 + DE^2 + DF^2 = 2OC^2 + 6r^2$.

204. Опустимъ $\perp AK$ на BC . Изъ $\triangle BCE$ и ABE имѣемъ: $AC^2 = AE^2 + CE^2 - 2CE \cdot KE$ и $AB^2 = AE^2 + BE^2 + 2BE \cdot KE$; но $AC = AB$ и $2KE = CE - BE$, а потому, сложивъ предыдущія равенства, найдемъ: $2AB^2 = 2AE^2 + BE^2 + CE^2 - 2KE(CE - BE) = 2AE^2 + BE^2 + CE^2 - (CE - BE)^2 = 2AE^2 + 2CE \cdot BE$ или $AB^2 = AE^2 + CE \cdot BE$. Также $CE \cdot BE = DE \cdot EF$ и потому $AB^2 = AE^2 + DE \cdot EF$ или $AE^2 = AB^2 - DE \cdot EF$.

205. Очевидно, $CF \parallel DH$ и $CG \parallel DK$; слѣдов. $\angle DCG = \angle CFG = \angle DHK$. Изъ подобія $\triangle EDK$ и EFC , EDH и ECG имѣемъ: $ED : EK = EF : EC$ или $EC \cdot ED = EK \cdot EF$ и $ED : EH = EG : EC$ или $EC \cdot ED = EH \cdot EG$.

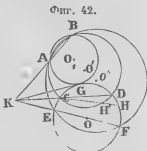
206. Пусть D' точка касанія вѣтви вписаннаго круга противъ A (II, 99). Тогда $AP : AD =$ отношенію радіуса вписаннаго круга къ радіусу вѣтви вписаннаго круга $= AE : AE'$, гдѣ E' точка касанія вѣтви вписаннаго круга къ продолженію AC . Отсюда $AP : (AD' - AP) = AE : (AE' - AE)$ или $AP : PD' = AE : EE'$; слѣдов. $AE \cdot PD' = AP \cdot EC = AP \cdot BC$ (II, 99).

207. Проведемъ вѣтвѣнную касательную къ кругамъ O и O' , которая пересѣчетъ линію центровъ, т.-е. OO' , въ точкѣ K ; пусть G и H будутъ точки касанія и K' точка пересѣченія прямой AA' съ OO' . Изъ подобія $\triangle AOK'$ и $A'O'K'$ имѣемъ: $OA : O'A' = OK' : O'K'$ или $(OA - O'A') : O'A' = (OK' - O'K') : O'K' = OO' : O'K'$. Изъ подобія $\triangle LOK$ и $NO'K$ имѣемъ: $OL : O'N = OK : O'K$ или $(OL - O'N) : O'N = (OK - O'K) : O'K = OO' : O'K$. Въ этихъ пропорціяхъ первый части равны, а потому $OO' : O'K' = OO' : O'K$; отсюда $O'K' = O'K$, т.-е. точки K' и K сливаются.

208. Доказательство сходно съ предыдущимъ.

209. Опишем произвольнымъ радиусомъ окружность O'' , касающуюся окружностей O и O' въ A и B . Прямая AB пересѣчетъ окружность O и прямую OO' въ C и D . Такъ какъ $OC \parallel O'O''$, то $OD : O'D = OC : O'B$. Следовательно, D будетъ точкою пересѣченія общихъ касательныхъ къ даннымъ кругамъ съ линіей центровъ, а потому такія прямыя, какъ AB , проходить чрезъ точку D .

210. Опишемъ окружности O' , O'' ,... (фиг. 42), проходящія чрезъ A и B и пересѣкающія окружность O въ C и D , E и F и т. д. Также представимъ окружность O_1 , проходящую чрезъ A и B и касающуюся окружности O ; пусть G точка касанія. Чрезъ G проведемъ касательную къ кругамъ, которая пересѣчетъ прямую, проходящую чрезъ A и B , въ K . Я говорю, что хорды CD , EF ,..., по своему продолженіи, пройдутъ чрезъ точку K , т.-е. прямая, проведенная чрезъ K и C пройдетъ чрезъ D . Положимъ, что прямая KC не пройдетъ чрезъ D , а пересѣчетъ окружности O и O' въ H и H' . Тогда $KG^2 = KA \cdot KB$, $KC^2 = KC \cdot KH'$ и $KA \cdot KB = KC \cdot KH$; изъ первыхъ двухъ равенствъ выходитъ: $KA \cdot KB = KC \cdot KH'$. Сравнимъ это равенство съ третьимъ, найдемъ $KC \cdot KH = KC \cdot KH'$, или $KH = KH'$ что невозможно. Следовательно, прямая KC должна пройти чрезъ точку D .



211. Даны три пересѣкающіяся попарно окружности O , O' и O'' ; AB , CD и EF — общія хорды для O и O' , O' и O'' , O и O'' ; AB и CD пересѣкаются въ G . Положимъ, что прямая FG пересѣкаетъ окружность O въ H и окружн. O'' въ K ; тогда $FG \cdot GH = AG \cdot BG = CG \cdot DG = FG \cdot GK$; слѣд. $GH = GK$, т.-е. точки K и H должны совпадать съ точкою E .

212. Пусть A , B и C — центры круговъ; a , b и c — ихъ радиусы; D и E — точки пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ попарно къ кругамъ A и B и къ A и C . Продолжимъ DE до пересѣченія съ прямою BC въ F ; тогда

$$\frac{DA}{DB} = \frac{a}{b} \text{ и } \frac{EA}{EC} = \frac{a}{c} \text{ или } \frac{EA}{DA} : \frac{EC}{DB} = 1 : \frac{c}{b}. \text{ Проведемъ } BG \parallel AE \text{ до пересѣченія}$$

съ DE въ G ; имѣемъ: $\frac{FB}{FC} = \frac{BG}{CE} = \frac{BG}{DB} : \frac{CE}{DB} = \frac{EA}{DA} : \frac{CE}{DB} = 1 : \frac{c}{b}$; откуда $\frac{FB}{FC} = \frac{b}{c}$

и слѣд., F будетъ точкою пересѣченія касательныхъ къ кругамъ B и C .

213. $\triangle MCG \sim \triangle MHD$ ($\angle M$ общій, а $\angle MCG = 180^\circ - \angle EFD = \angle EFH = \angle MHD$); слѣдовательно, $MC : MG = MH : MD$ или $MG \cdot MH = MC \cdot MD$. $\triangle MLC \sim \triangle MKD$, а потому $MC : MK = ML : MD$ или $ML \cdot MK = MC \cdot MD$; отсюда выходитъ, что $ML \cdot MK = MG \cdot MH$.

214. DE пересѣкаетъ окружность въ F . Тогда $DB \cdot DC^2 = AD \cdot AB^2 = AD \cdot DE^2$ и $DB \cdot DC = DE \cdot DF$; откуда $DF \cdot DC = AD \cdot DE$ или $DC : DA = DE : DF$, т.-е. $AF \parallel CE$. Тогда $\angle FAB = \angle ECB = \frac{1}{2} \angle EAB = \angle EAF$ и $\angle AEF = \angle AFE = \angle FAD + \angle FDA = \angle FAD + \angle EAD$, такъ какъ $DE = AB = AE$. Также $\angle AEF = 2d - (\angle EAD + \angle EDA) = 2d - 2\angle EAD$; слѣд. $2d - 2\angle EAD =$

$=\frac{1}{2}\angle EAD + \angle EAD = \frac{3}{2}\angle EAD$; откуда $2d = \frac{2}{3}\angle EAB$ или $\angle EAB = \frac{1}{3} \cdot 4d$, т.-е. $\sphericalangle EAB = \frac{1}{3}$ окружности.

215. O и O' — центры вписанного и вневписанного круговъ, касающихся BC въ F и F' . Такъ какъ $BO \perp BO'$, то, изъ подобія $\triangle BOF$ и $BO'F'$, найдемъ: $BF : r_a = r : BF'$; но $BF = BD$, $BF' = BD'$ и слѣд. $BD : r_a = r : BD'$ или $BD \cdot BD' = r r_a$. Точно такъ же и $CE \cdot CE' = r r_a$.

216. Пусть J центръ описаннаго круга. Опустимъ $\perp OF$ на AC и продолжимъ BJ до пересѣченія съ окружностью J въ D . Тогда $\angle BDE = \angle BAE = \angle OAF$ и слѣд. $\triangle AOF \sim \triangle BDE$; откуда $BD : OA = BE : OF$ или $BD \cdot OF = BE \cdot OA = EO \cdot OA$. Слѣд. $AO \cdot OE = BD \cdot OA = 2Rr$.

217. Пусть J и O центры описанной и вписанной окружности въ $\triangle ABC$. Опустимъ $\perp OF$ на продолженіе AC и проведемъ діаметръ BJD окружности J . $\angle BDE = \angle BAE = \angle O'AF$, а потому $\triangle BED \sim \triangle O'FA$; откуда $BD : O'A = BE : O'F$ и слѣдоват. $BD \cdot O'F = BE \cdot O'A = O'E \cdot O'A$. Отсюда $O'A \cdot O'E = BD \cdot O'F = 2Rr_a$.

218. Пусть O , P и Q центры круговъ, вписанныхъ въ $\triangle ABC$, ABD и ACD . $\triangle ABP \sim \triangle BOC$; откуда $r_1 : r = AB : BC$ или $r_1^2 : r^2 = AB^2 : BC^2$. $\triangle BOC \sim \triangle AQC$; откуда $r_2^2 : r^2 = AC^2 : BC^2$; слѣдовательно $(r_1^2 + r_2^2) : r^2 = (AB^2 + AC^2) : BC^2$ или $(r_1^2 + r_2^2) : r^2 = 1$ и потому $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

219. M точка пересѣченія OT съ PQ . $\triangle OTN \sim \triangle LTM$, а потому $TN \cdot TL = TO \cdot TM$; но $TL = TN - LN$, $TM = TO - MO$ и слѣдовательно, $TN^2 - TN \cdot LN = TO^2 - TO \cdot MO = TN^2 + NO^2 - TO \cdot MO$; откуда $TN \cdot LN = TO \cdot MO - NO^2$. Также $\triangle POT \sim \triangle POM$, а потому $TO \cdot MO = PO^2 = KO^2 = KN^2 + NO^2$; поэтому $TN \cdot NL = KN^2 + NO^2 - NO^2 = KN^2$.

220. Опишемъ окружность около $\triangle ABC$ и продолжимъ BA до D ; проведемъ AE равнодѣлящую $\angle DAC$, кот. пересѣчетъ продолженіе BC въ E и окружность въ F (съ другой стороны A). $\angle EAC = \angle EAD = \angle FAB$ и $\angle ACE = 2d - \angle ACB = \angle AFB$, а потому $\triangle ABF \sim \triangle ACE$; откуда $AB : AE = AF : AC$ или $AB \cdot AC = AE \cdot AF = AE \cdot EF - AE^2$; слѣдовательно, $AE^2 = AE \cdot EF - AB \cdot AC$. Изъ подобія $\triangle ACE$ и BEF : $AE : BE = CE : EF$ или $AE \cdot EF = BE \cdot CE$ и потому $AE^2 = BE \cdot CE - AB \cdot AC$.

221. FB и GC касательныя къ кругу въ точкахъ B и C (точки F и G поставлены выше стороны BC). $\angle BAD = \angle ABF = \angle ACB$, а потому $\triangle ABD \sim \triangle ABC$; откуда $AD : AC = AB : BC$ или $AD \cdot BC = AB \cdot AC$. $\triangle ABC \sim \triangle ACE$, а потому $AB : AE = BC : AC$ или $AB \cdot AC = AE \cdot BC$; слѣд. $AD \cdot BC = AE \cdot BC$ или $AD = AE$. Изъ подобія $\triangle ABD$ и ABC , $\triangle ABC$ и ACE найдемъ: $BD : AB = AB : BC$ или $AB^2 = BD \cdot BC$ и $AC : CE = BC : AC$ или $AC^2 = CE \cdot BC$. Отсюда $AB^2 : AC^2 = BD : CE$.

222. Проведемъ прямую GC , которая пересѣчетъ окружность O въ J , и прямую GD , которая пересѣчетъ окружность O' въ K . $\triangle GCH \sim \triangle ACJ$, а потому $GC \cdot CJ = AC \cdot CH$; кромѣ того $GC^2 - GH^2 = CH^2$. Вычтя, почленно, одно равенство изъ другого, найдемъ: $-GC \cdot GJ + GH^2 = AH \cdot CH$, или $GH^2 - GE^2 = AH \cdot CH$, потому что $GE^2 = GC \cdot GJ$. Разсматривая такимъ же образомъ другую окружность, найдемъ, что $GH^2 - GF^2 = BH \cdot DH$. А такъ какъ, по условію, $GE = GF$, то, сравнивъ первыя части послѣднихъ равенствъ, найдемъ, что $AH \cdot CH = BH \cdot DH$.

223. K — пересѣченіе діагоналей параллелограмма и AE — діаметръ круга. Соединивъ E съ B, C, D, F, G, H и K , найдемъ: $AE^2 + CE^2 = 2AK^2 + 2EK^2$ и $BE^2 + DE^2 = 2BK^2 + 2EK^2$. Вычти одно равенство изъ другого, получимъ: $AE^2 + CE^2 - BE^2 - DE^2 = 2AK^2 - 2BK^2$ или, умноживъ всё члены на 2, найдемъ: $2AE^2 + 2CE^2 - 2BE^2 - 2DE^2 = AC^2 - BD^2 \dots (1)$. Изъ $\triangle ACE$, ABE и ADE имѣемъ: $CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AG$, $BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AF$ и $DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AH$. Поставивъ эти величины въ (1) равенство и замѣтивъ (III, 103), что $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$, найдемъ: $AC \cdot AG = AB \cdot AF + AD \cdot AH$.

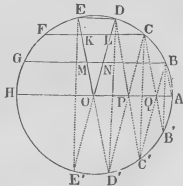
224. Проведемъ діаметръ CE данного круга и точку E соединимъ съ A, B и D . На основаніи Птолемеевой теоремы, изъ $\diamond ACBE$ и $ADBE$, найдемъ: $AC \cdot BE + BC \cdot AE = AB \cdot CE$, или $(AC + BC) \cdot AE = AB \cdot CE$ и $(AD + BD) \cdot AE = AB \cdot DE$; но $AB \cdot CE > AB \cdot DE$, а потому выходитъ, что $(AC + BC) \cdot AE > (AD + BD) \cdot AE$ или $AC + BC > AD + BD$.

225. Проведемъ (фиг. 43) хорды BB', CC', DD' и $EE' \perp$ на AH . Трапеціи: $EDD'E', DCC'D'$ и $CB'B'C'$ будутъ равнобочныя, а потому точки пересѣченія ихъ діагоналей лежатъ на діаметрѣ. Пусть P и Q точки пересѣченія діагоналей DC' и CB' съ AH ; замѣтимъ, что $DE \parallel CF \parallel BG \parallel AH$; хорда $DE' \parallel CD' \parallel BC'$ и хорда $ED' \parallel DC' \parallel CB'$. Отсюда ясно, что $\triangle ODP = \triangle EOD$, $\triangle PCQ = \triangle KOL$ и $\triangle ABQ = \triangle MON$, а потому $DE = OP$, $KL = PQ$ и $MN = AQ$, или $DE + KL + MN = OA$, т. е. радіусу.

226. D точка касанія окружности O стороны BC и H точка касанія окружности O_1 продолженія стороны BC ; J центръ описанной окружности около $\triangle ABC$ и P пересѣченіе окружности съ прямою AO . Проведемъ хорду BP и діаметръ PJQ , кот. пересѣчетъ BC въ M . Означимъ радіусъ вписанной и описанной окруж. чрезъ r и R . $\triangle AOD \sim \triangle BPQ$, а потому $OA : OD = PQ : BP$ или $OA \cdot BP = 2Rr \dots (1)$. Опустимъ $\perp ON$ на O_1H ; $\triangle OO_1N \sim \triangle BPQ$; слѣдовательно, $OO_1 : PQ = ON : BQ$ или $OO_1 \cdot BQ = 2R \cdot ON = 2R \cdot DH$ (II, 99) $= 2Ra \dots (2)$. Умножимъ (1) на (2): $OA \cdot OO_1 \cdot BP \cdot BQ = 4R^2ra$; но $BP \cdot BQ = PQ \cdot BM = 2R \cdot \frac{1}{2}a = Ra$, а потому $OA \cdot OO_1 \cdot Ra = 4R^2ra$ или $OA \cdot OO_1 = 4Rr$. Точно такъ же покажемъ, что $OB \cdot OO_2 = 4Rr$ и $OC \cdot OO_3 = 4Rr$.

227. O — центръ вписаннаго и O' — центръ описаннаго круга около $\triangle ABC$. Прямою AO продолжимъ до пересѣченія съ дугою BC въ точкѣ D ; проведемъ діаметръ $DO'E$, который будетъ \perp къ хордѣ BC и пересѣчетъ ее въ L ; O соединимъ съ O' и B ; опустимъ $\perp \perp OM$ и ON на DE и BC . Изъ $\triangle ODO'$ имѣемъ: $OO'^2 = OD^2 + O'D^2 - 2O'D \cdot DM$; но $OD^2 = BD^2$ (III, 95) $= DE \cdot DL = 2O'D \cdot DL$, а потому $OO'^2 = O'D^2 - 2O'D(DM - DL) =$

Фиг. 43.



$= O'D^2 - 2O'D \cdot ON$ или $d^2 = R^2 - 2Rr$; отсюда $R^2 = d^2 + 2Rr$. Точно таким же способом докажемъ, что $R^2 = d_1^2 + 2Rr_a$, $R^2 = d_2^2 + 2Rr_b$ и $R^2 = d_3^2 + 2Rr_c$. Сложивъ почленно послѣднія четыре равенства, найдемъ: $4R^2 = d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - 2R(r_a + r_b + r_c - r)$; но $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ (II, 176), а потому $4R^2 = d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - 8R^2$; отсюда $R^2 = \frac{1}{12}(d^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$.

228. Означимъ разстояніе между O и O' буквою d ; тогда (III, 227) $d = \sqrt{R(R-2r)}$. Изъ F и F' проведемъ касательныя FG и $F'G'$ къ кругу O' ; тогда $FE \cdot FE' = FG^2$ и $F'E' \cdot F'E = F'G'^2$. Слѣд. $EF \cdot E'F \cdot EF' \cdot E'F' = FG^2 \cdot F'G'^2 = (FO'^2 - O'G'^2)(F'O'^2 - O'G'^2) = [(R-d)^2 - r^2][(R+d)^2 - r^2] = [(R - \sqrt{R^2 - 2Rr})^2 - r^2][(R + \sqrt{R^2 - 2Rr})^2 - r^2] = r^2(4R+r)$.

229. $OP = O'P + OO' = R + d$ и $OQ = O'Q - OO' = R - d$. Слѣдовательно, $OP \cdot OQ = R^2 - d^2$ (III, 227) $= 2Rr$.

230. D , E и F основанія \perp -въ, опущенныхъ изъ вершинъ $\triangle ABC$ на его стороны BC , CA и AB ; онѣ будутъ центрами вѣтвѣписанныхъ круговъ для $\triangle DEF$ (II, 119). Пусть ρ и ρ' радіусы описанной и вписанной окружностей въ $\triangle DEF$; r_1 , r_2 и r_3 радіусы вѣтвѣписанныхъ окружностей для $\triangle DEF$ и к-т. центров A , B и C . Тогда (III, 227, 168) $x^2 = \rho^2 + 2\rho r_1$; $y^2 = \rho^2 + 2\rho r_2$; $z^2 = \rho^2 + 2\rho r_3$; $d^2 = \rho^2 - 2\rho r'$ и $\rho = \frac{1}{2}R$; отсюда (III, 176)

$$x^2 + y^2 + z^2 + d^2 = 4\rho^2 + 2\rho \cdot 4\rho = 12\rho^2 = 3R^2.$$

231. Пусть R радіусъ описанной окружности около $\triangle ABC$ и r_a радіусъ вѣтвѣписанной окружности, касающейся стороны BC . Проведемъ касательную $O'K$ къ окружности O ; тогда (III, 227) $OO'^2 = R^2 + 2Rr_a$ и $O'P \cdot O'Q = O'K^2 = OO'^2 - R^2 = 2Rr_a$. Но $O'P = r_a$, а потому $O'Q = 2R$.

232. Продолжимъ $\perp MP$ до встрѣчи съ $A'B'$ въ точкѣ Q . Изъ подобія $\triangle \triangle AA'C$ и CMP , $\triangle \triangle MPD$ и $BB'D$ найдемъ, что $AC : CP = AA' : MP$ и $BD : PD = BB' : MP$. Слѣд. $AC : CP = BD : PD$ или $AC : (AP - AC) = (AB - AD) : (AD - AP)$; отсюда $AP : AC = (AB - AP) : (AB - AD)$ или $AP = \frac{AB \cdot AC}{AB - (AD - AC)}$. Изъ подобія $\triangle \triangle A'MB'$ и $\triangle CMD$ получимъ, что $(AD - AC) : AB = MP : (MP + \frac{1}{2}AB\sqrt{2})$ или $[AB - (AD - AC)] : (AD - AC) = \frac{1}{2}AB\sqrt{2} : MP$; отсюда $MP = \frac{(AD - AC) \cdot AB\sqrt{2}}{2[AB - (AD - AC)]}$. Извѣстно, что $MP^2 = AP \cdot BP$, а $MP^2 + AP^2 = AP(AP + BP) = AP \cdot AB$, а потому, замѣнивъ MP и AP ихъ величинами, найдемъ: $AD^2 + AC^2 = 2AB \cdot AC$, или $AD^2 + (AB - BC)^2 = 2AB \cdot AC$ или $AD^2 + BC^2 = AB^2$.

233. $\diamond ABCD$ вписанъ въ кругъ O (фиг. 44). Продолжимъ стороны AB и DC до ихъ пересѣченія въ E , а AD и BC до пересѣченія въ F . Равнодѣлящая $\angle E$ пересѣкаетъ BC и AD въ K и L , а равнодѣлящая $\angle F$ пересѣкаетъ CD и AB въ G и H ; J точка пересѣченія равнодѣлящихъ $\angle \angle E$ и F . $EJ \perp FJ$ (II, 148), а потому въ $\triangle \triangle EGH$ и FKL найдемъ что $JG = JH$ и $JK = JL$; слѣд. $\diamond KGLH$, въ к-т. $GH \perp KL$, будетъ ромбъ. Изъ $\triangle ABF$, гдѣ FH есть равнодѣлящая $\angle F$, имѣемъ: $HB : HA = FB : FA$, а изъ подобія $\triangle \triangle ACF$ и BDF получимъ: $FB : FA = BD : AC$; отсюда $HB : HA = BD : AC$. Изъ подобныхъ $\triangle \triangle BDE$ и ACE , найдемъ: $LD : LA = BD : AC$, а потому $HB : HA = LD : LA$, т.-е. $LH \parallel BD$ и $\parallel KC$. Точно

такъ же $HK \parallel AC$ и $\parallel LG$. Пусть M и N середины діагоналей AC и BD ; P и Q точки пересѣченія NC съ KG и AN съ HL . Очевидно P и Q середины KG и LN , а потому прямая PQ пройдетъ чрезъ J и будетъ $\parallel AC$ и $\parallel HK$; точка J , по свойству \square , будетъ серединою PQ . Если продолжимъ прямую NJ , то она пройдетъ чрезъ середину AC , т.-е. M ; слѣдовательно, точки N , J и M лежатъ на прямой и $JM=JN$.

234. $\diamond ABCD$ вписать въ кругъ O радіуса r ; Q пересѣченіе продолженій BA и CD ; P пересѣченіе продолженій DA и BC .

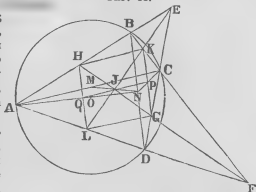
Построимъ $\angle PAS=\angle PQD$, гдѣ S на PQ ; тогда $\angle PSA=\angle PDQ$, а потому точки S , A , D и Q лежатъ на окружности и $PS \cdot PQ=PA \cdot PD \dots (1)$. Точки P , S , A и B лежатъ на окружности, а потому $QS \cdot QP=QA \cdot QB \dots (2)$. Сложивъ (1) и (2), найдемъ: $PQ^2=PA \cdot PD+QA \cdot QB$. Проведемъ касательныя PM и QN къ кругу O ; тогда $PA \cdot PD=PM^2=PO^2-OM^2=PO^2-r^2$ и $QA \cdot QB=QN^2=QO^2-r^2$; слѣд. $PQ^2=(PO^2+QO^2)-2r^2$.

235. Въ кругъ вписать $\diamond ABCD$. Продолжимъ AB и CD до ихъ встрѣчи въ E и стороны AD и BC до ихъ встрѣчи въ F ; проведемъ касательныя ES и FT къ данному кругу. Около $\triangle CBE$ опишемъ окружность, кот. пересѣчетъ прямую EF въ K ; тогда $FT^2=FB \cdot FC=FE \cdot FK$; $\angle EKB+\angle BKF=2d$ и $\angle EKB=\angle ECB=\angle A$, а потому $\angle A+\angle BKF=2d$, т.-е. окружность, описанная около $\triangle ADF$, пройдетъ чрезъ K ; въ такомъ случаѣ $ES^2=EB \cdot EA=EF \cdot EK$ и $FT^2+ES^2=EF(FK+EK)=EF^2$.

236. r радіусъ данной окружности; G точка пересѣченія окружностей, описанныхъ около $\triangle FDC$ и BCE . Слѣд. $\angle FGC=\angle ADC=\angle CBE$ и $\angle EGC+\angle FGC=\angle EGC+\angle EBC=2d$, а потому EG и GF составляютъ одну прямую. Раздѣлимъ EF пополамъ въ L и проведемъ касательныя FH , EK и LM къ кругу O ; тогда $FG \cdot FE=FC \cdot FB=FN^2$, $EG \cdot EF=EC \cdot ED=EK^2$ и слѣд. $EF^2=FN^2+EK^2$ и $4FL^2+2r^2=(FN^2+r^2)+(EK^2+r^2)=FO^2+EO^2=2LO^2+2FL^2$; откуда $2FL^2+2r^2=2LO^2$ или $FL^2+r^2=OL^2=LM^2+r^2$; слѣд. $FL=LM$, т.-е. окружность, описанная изъ L радіусомъ LE или LF , пройдетъ чрезъ M . Радиусы LM и MO составляютъ прямой уголъ, а потому окружности, описанныя этими радіусами, встрѣчаются подъ прямымъ угломъ.

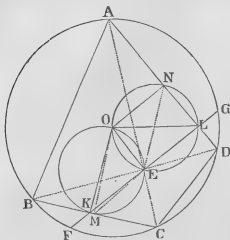
237. Положимъ, что данная хорда (фиг. 45) пересѣкаетъ окружн. въ F и G , а стороны BC и AD въ K и L ; опустимъ $\perp OM$ на BC и $\perp ON$ на AD . $\triangle CBE \sim \triangle AED$ и потому $BC:AD=BE:AE$ или $\frac{1}{2}BC:\frac{1}{2}AD=BE:AE$; но $\frac{1}{2}BC=BM$ и $\frac{1}{2}AD=AN$, а потому $BM:AN=BE:AE$. Кромѣ того $\angle EBM=\angle EAD$ и слѣд. $\triangle BEM \sim \triangle AEN$; откуда $\angle BME=\angle ANE$ или $\angle EMC=\angle END$. На OK , какъ діаметръ, опишемъ окружн., кот. прой-

Фиг. 44.



деть через E и M ($\angle OEK = d = \angle OMK$); тогда $\angle KOE = \angle EMC$, какъ

Фиг. 45.



имѣющие одинъ и тотъ же $\angle KME$ дополненіемъ до $2d$. На OL , какъ діаметръ, опишемъ окружность, которая пройдетъ черезъ N и E ; слѣд. $\angle LOE = \angle END = \angle KOE$. Теперь выходитъ, что $\triangle KOE$ и LOE , имѣя сторону OE общую и $\angle KOE = \angle LOE$, будутъ равны; слѣд. $KE = LE$.

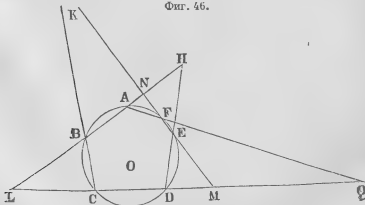
238. Имѣемъ: $AE \cdot AE' = AF \cdot AF'$, $BF \cdot BF' = BD \cdot BD'$ и $CD \cdot CD' = CE \cdot CE'$. Перемноживъ эти равенства и замѣтивъ, что AD , BE и CF пересѣкаются въ одной точкѣ, т.-е. $AE \cdot BF \cdot CD = AF \cdot BD \cdot CE$ (III, 59), найдемъ, что $AE' \cdot BF' \cdot CD' =$

$= AF' \cdot BD' \cdot CE'$. Отсюда заключаемъ, что и прямыя AD' , BE' и CF' пересѣкаются тоже въ одной точкѣ.

239. Прямыя, соединяющія D' , E' и F' съ серединами AP , BP и CP , будутъ, очевидно, діаметрами окружности 9-ти точекъ, а потому равны и пересѣкаются въ центрѣ ея. Пусть d , e и f середины AD , BE и CF ; тогда $2dE' = DC$, $2eF' = AE$ и $2fD' = BF$ и слѣд. $8dE' \cdot eF' \cdot fD' = DC \cdot AE \cdot BF = BD \cdot CE \cdot AF = 2dF' \cdot 2eD' \cdot 2fE'$ или $dE' \cdot eF' \cdot fD' = dF' \cdot eD' \cdot fE'$, то-есть въ $\triangle D'E'F'$ прямыя dD' , eE' и fF' пересѣкаются въ одной точкѣ.

240. Въ кругѣ (фиг. 46) вписанъ шестиугольникъ $ABCDEF$; AB и DE

Фиг. 46.



пересѣкаются въ H ; AF и CD въ Q , а BC и EF въ K . Продолжимъ стороны, черезъ одну, до ихъ встрѣчи: AB и CD въ точкѣ L ; CD и EF въ точкѣ M ; AB и EF въ точкѣ N . Тогда $LA \cdot LB = LC \cdot LD$, $MC \cdot MD =$

$= ME \cdot MF$ и $NE \cdot NF = NA \cdot NB$. $\triangle LMN$ пересѣченъ тремя прямыми: QFA , HED и KBC , а потому (III, 59) $LA \cdot MQ \cdot NF = LQ \cdot MF \cdot NA$, $LH \cdot MD \cdot NE = LD \cdot ME \cdot NH$ и $LB \cdot MC \cdot NK = LC \cdot MK \cdot NB$. Перемноживъ почленно эти равенства, найдемъ, по сокращеніи, $LH \cdot MQ \cdot NK = LQ \cdot MK \cdot NH$, т.-е. точки Q , H и K лежатъ на прямой.

241. AB діаметръ; O центръ; P какая-либо точка окружности; Q , R ... послѣдовательныя точки дѣленій отъ A ; R' и Q' послѣднія. Тогда

$$PQ^2 + PQ'^2 = 2OP^2 + 2OQ^2, \quad PR^2 + PR'^2 = 2OP^2 + 2OR^2.$$

Вычтемъ одно равенство изъ другого и получимъ:

$$\begin{aligned} a_1^2 - a_2^2 - a_{2n-2}^2 + a_{2n-1}^2 &= 2(CQ^2 - CR^2) = 2(CQ + CR)(CQ - CR) = \\ &= 2 \left[(n-1) \frac{d}{2n} + (n-2) \frac{d}{2n} \right] \left[(n-1) \frac{d}{2n} - (n-2) \frac{d}{2n} \right] = \frac{d^2}{2n^2} (2n-3). \end{aligned}$$

Также $a_3^2 - a_4^2 - a_{2n-4}^2 + a_{2n-3}^2 = \frac{d^2}{2n^2} \cdot (2n-7)$ и т. д.

Такимъ образомъ эти группы составляютъ арифметическую прогрессию, разность которой $= -4 \cdot \frac{d^2}{2n^2}$.

1 случай. n нечетное. Тогда будетъ $\frac{n-1}{2}$ такихъ группъ, какъ предыдущія, и сумма ихъ равна

$$\frac{d^2}{2n^2} \cdot \frac{n-1}{4} \left\{ 2(2n-3) - 4 \cdot \frac{n-3}{2} \right\} = \frac{d^2}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{d^2}{4} \text{ при } n = \infty.$$

2 случай. n четное. Тогда такихъ группъ будетъ $\frac{n}{2}$ и сумма ихъ равна

$$\frac{d^2}{2n^2} \cdot \frac{n}{2} \left\{ 2(2n-3) - 4 \cdot \frac{n-2}{2} \right\} = \frac{d^2}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{d^2}{4} \text{ при } n = \infty.$$

Когда n нечетное, напр. 7, то увидимъ, что до полной суммы недостаетъ $CP^2 = \frac{d^2}{4}$, а если n четное, то CP^2 будетъ вычтено два раза, вмѣсто одного.

Слѣд. въ каждомъ изъ нихъ надо прибавить CP^2 и получимъ: $\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{2}$.

242. Проведемъ прямую AX и отложимъ на ней $AC=a$ и $CD=b$. Проведемъ $CF \parallel DB$, кот. пересѣчетъ AB въ E . Точка E будетъ искомая.

243. Проведемъ прямую AX и на ней, отъ точки A , отложимъ пять равныхъ частей: AC , CD , DE , EF и FG . Проведемъ прямую $DY \parallel BG$, которая пересѣчетъ AB въ K . Точка K будетъ искомая.

244. Проведемъ прямую AX и на ней, отъ точки A , отложимъ m произвольныхъ, но равныхъ частей; отъ C , конца послѣдней части, отложимъ n такихъ же частей и отъ D , конца послѣдней изъ этихъ частей, отложимъ p такихъ же частей и пусть E будетъ конецъ послѣдней изъ нихъ. Прямая, проведенная чрезъ точки C и D , параллельно EB , раздѣлитъ прямую AB въ требуемомъ отношеніи.

245. Возьмемъ на прямой отрѣзокъ k произвольной длины и построимъ прямая: $AB=mk$ и $CD=nk$. Тогда AB и CD будутъ искомыя прямая. Задача имѣетъ безчисленное множество рѣшеній.

246. Проведемъ произвольную прямую AX и отложимъ на ней часть $AC=a$ и $CD=b$; проведемъ прямую $DK \parallel CB$, кот. пересѣчетъ продолженіе AB въ E . Отрѣзокъ BE будетъ искомымъ.

247. Проведемъ произвольную прямую AX и отъ A отложимъ на ней m равныхъ, но произвольныхъ частей; точку C , конецъ $m-n$ -го дѣленія, соединимъ съ B , а чрезъ D , конецъ m -го дѣленія, проведемъ прямую $DF \parallel CB$, кот. пересѣчетъ продолженіе AB въ E . Отрѣзокъ BE искомымъ.

248. Проведемъ прямую AX и отложимъ на ней $AD=k+l$ и $DE=k-l$; проведемъ прямую $DF \parallel EB$, кот. пересѣчетъ AB въ C . Точка C будетъ искомая.

249. Раздѣлимъ $DE=s$ въ F на такія двѣ части, чтобы $DF:EF=m:n$ (III, 244). Проведемъ прямую $KL \parallel MN$ на разстояніи, равномъ EF , а изъ A опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ DF , кот. пересѣчетъ прямую KL въ B . Точка B будетъ искомая.

250. Продолжимъ $DE=d$ на такую длину EF , чтобы $DF:EF=m:n$ (III, 247). Проведемъ прямую $KL \parallel MN$ на разстояніи, равномъ EF , а изъ A опишемъ дугу радіусомъ DF , кот. пересѣчетъ прямую KL въ B . Точка B будетъ искомая.

251. Соединимъ A съ произвольной точкой B прямой MN и раздѣлимъ AB въ отношеніи m къ n ; чрезъ точку дѣленія проведемъ прямую $KL \parallel MN$. Прямая KL будетъ искомымъ геометрическимъ мѣсто.

252. Начертимъ $\angle XAY$ произвольной величины и отложимъ на AX часть $AB=c$ и часть $BC=b$, а на AY —часть $AD=a$. Проведемъ прямую $CE \parallel BD$, которая пересѣчетъ AY въ точкѣ F . Отрѣзокъ DF будетъ искомымъ.

253. 1) Пусть $\frac{ab}{c}=x$; тогда $x:a=b:c$. Чтобы построить x , можно поступить какъ въ предыд. задачѣ, или же, начертивъ произвольный $\angle XAY$, отложить на сторонѣ AX часть $AB=b$ и часть $BC=c$, а на сторонѣ AY —часть $AD=a$; провести прямую $BE \parallel CD$, кот. пересѣчетъ AY въ F . Отрѣзокъ $AF=x$. 2) Пусть $\frac{a^2}{2b}=x$; тогда $x:a=a:2b$. Приходимъ къ 1-му случаю. 3) Положимъ $\frac{abc}{de}=x$. Отдѣлимъ отъ данной дроби такую, у кот. числитель имѣлъ бы два линейныхъ множителя, а знаменатель — одного, напр. хоть дробь $\frac{ab}{d}$, кот. означимъ буквою y ; тогда $x=\frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e}=y \cdot \frac{c}{e}=\frac{yc}{e}$. Сначала построимъ y , а потомъ уже и x (1-й случай). 4) Пусть $x=\frac{a^2+ab}{c+d}=\frac{a(a+b)}{c+d}$. Построимъ $a+b=u$ и $c+d=v$; тогда $x=\frac{au}{v}$, кот. построимъ на основаніи 1-го случая. 5) Означимъ данное выраженіе буквою x и возьмемъ въ числителѣ a^2 за скобку общимъ множителемъ, а въ знаменателѣ a ; получимъ:

$$x=\frac{a^2\left(a+\frac{2b^2}{a}-\frac{b^2}{a^2}\right)}{a\left(a-\frac{b^2}{a}+b\right)},$$

гдѣ дроби: $\frac{b^2}{a}=z$ и $\frac{b^2}{a^2}=y$, умѣемъ построить (случаи 1-й и 3-й). Тогда

$$x = \frac{a(a+2y-z)}{a-y+b}.$$

Сначала построимъ: $a+2y-z=u$ и $a-y+b=v$, а потомъ и $x = \frac{au}{v}$.

254. Пусть a, b и c данныя прямыя, гдѣ $a < b < c$. Требуется построить x , чтобы $x : a = b : c$. Изъ точки O опишемъ двѣ концентрическія окружности радіусами a и b . Изъ произвольной точки A большей окружности опишемъ дугу радіусомъ a , кот. пересѣчетъ ея въ B ; изъ A и B опишемъ дуги радіусомъ c (въ одну сторону), кот. пересѣкутъ большую окружность въ C и D ; изъ C и D опишемъ дуги радіусомъ c , кот. пересѣкутъ меньшую окружность въ E и F . Хорда EF будетъ искомая длина.

255. Раздѣлимъ прямую $AB=s$ въ точкѣ C въ отношеніи $m : n$ (III, 244). Отрѣзки AC и BC будутъ искомыя.

256. На произв. прямой отложимъ часть $AB=d$ и проведемъ прямую AM , на кот. отъ A отложимъ m произвольныхъ, но равныхъ частей, и отъ C , конца послѣдней части, отсчитаемъ, по направленію къ A , такихъ частей n ; пусть D конецъ послѣдней изъ этихъ частей. Тогда проведемъ прямую $CK \parallel DB$, которая пересѣчетъ продолженіе AB въ E . Части AE и BE будутъ искомыя.

257. Данную прямую раздѣлимъ въ отношеніи $a : b : \frac{bd}{c}$ (III, 242). Тогда полученные отрѣзки будутъ искомыя.

258. Сперва построимъ $k = \frac{a^2}{b}$, а потомъ раздѣлимъ прямую AB въ точкѣ C въ отношеніи k къ b . Части AC и BC будутъ искомыя.

259. Отложимъ $EF=a$ и на EF построимъ $\angle XEF = \angle B$ и $\angle YFE = \angle C$. Пусть D пересѣченіе прямыхъ EX и FY . $\triangle DEF$ будетъ искомымъ.

260. Возьмемъ произвольную длину k и построимъ $\triangle ABC$ по тремъ сторонамъ, равнымъ: mk, nk и pk . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

261. На произв. прямой отложимъ $EH=a$ и построимъ $\angle XEH = \angle BAD$.

На сторонѣ EX отложимъ часть $EF = \frac{a \cdot AB}{AD}$ (III, 253) и проведемъ $FK \parallel EH$ и $HL \parallel EF$, которая пересѣкутся въ G . $\square EFGH$ будетъ искомымъ.

262. Данъ многоугольникъ $ABCDE$ и прямая a , сходственная съ бокомъ AB . На произвольной прямой отложимъ часть $FL=a$ и на ней построимъ $\angle XFL = \angle ABC$. На FX отложимъ часть $FG = \frac{a \cdot BC}{AB}$ (III, 253) и на FG построимъ $\angle YGF = \angle DCB$. Отложимъ на CY часть $GH = \frac{a \cdot CD}{AB}$ и т. д.

263. Построимъ прямыя b и c , чтобы $b : c = m : n$ (III, 245), и $\triangle ADE$, въ кот. $\angle DAE = \angle A$, $AE=b$ и $AD=c$. На DE отложимъ часть $DF=a$ и проведемъ прямую $FX \parallel AD$, кот. пересѣчетъ AE или продолженіе AE въ C , и прямую $CY \parallel ED$, кот. пересѣчетъ AD въ B . $\triangle ABC$ искомымъ.

264. Задача рѣшается подобно предыдущей.

265. Изъ произвольной точки G прямой XY возстапимъ \perp и отложимъ на немъ часть $GD=h$; изъ D проведемъ къ XY прямая DE и DF подъ углами, равными $\angle \angle B$ и C . $\triangle DEF$ будетъ искомымъ.

266. Построимъ двѣ прямая a и b , чтобы $a : b = m : n$ (III, 245) и равнобедренный $\triangle ADE$, въ кот. основаніе $DE=a$ и $AD=AE=b$. Опустимъ $\perp AF$ на DE и отложимъ на немъ часть $AG=h_a$. Проведемъ прямую $GX \parallel DE$, которая пересѣчетъ AD и AE въ B и C . $\triangle ABC$ искомымъ.

267. Пусть $m : n$ данное отношеніе, т.-е. $a : b = m : n$. Тогда, найдя b (III, 246), построимъ $\triangle ABC$, въ которомъ $BC=a$, $AC=b$ и $\angle ABC=\angle B$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

268. Сначала построимъ b и c (III, 246), а потомъ и $\triangle ABC$ по тремъ сторонамъ a , b и c . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

269. Зная равенство и отношеніе сторонъ, опредѣлимъ самую сторону (III, 256); тогда приводимся къ построенію \triangle по тремъ сторонамъ.

270. Задача рѣшается сходно съ предыдущей.

271. Пусть $m : n$ данное отношеніе. Тогда возьмемъ произвольную длину k и построимъ $\triangle EBD$, въ кот. $ED=mk$, $EB=nk$ и $\angle EBD=\angle B$. На BD отложимъ часть $BC=a$ и проведемъ прямую $CX \parallel DE$, которая пересѣчетъ BE въ точкѣ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

272. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

273. Построимъ $\angle XAY=\angle A$ и на его бокахъ отложимъ части AD и AE , находящіяся въ данномъ отношеніи (III, 245). Опустимъ $\perp AF$ на DE и отложимъ на немъ часть $AG=h_a$. Проведемъ чрезъ G прямую $\parallel DE$, кот. пересѣчетъ бока $\angle XAY$ въ точкахъ B и C , получимъ искомымъ $\triangle ABC$.

274. Построимъ $\angle XAY=\angle A$ и отложимъ на его бокахъ части AD и AE , находящіяся въ данномъ отношеніи (III, 245). Проведемъ прямую $\parallel AY$ на разстояніи h_b , которая пересѣчетъ AX въ B , и прямую $BK \parallel DE$ до встрѣчи съ AY въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

275. Пусть $h_b : b = m : n$. Тогда построимъ прямая x и y , которые относились бы какъ m къ n (III, 245), а вѣдѣмъ $\triangle ADE$, въ которомъ $\angle DAE = \angle A$, сторона $AE=y$ и высота $DF=x$. На DE отложимъ часть $DG=a$ и проведемъ прямую $GY \parallel AD$, которая пересѣчетъ AE въ C ; проведемъ прямую $CK \parallel ED$, которая пересѣчетъ AD въ B . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

276. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

277. Построимъ прямая x и y , кот. относились бы какъ m къ n и на произвольной прямой отложимъ часть $DF=x$ и $FE=y$. Возставимъ $\perp FK$ къ DE и на DE опишемъ дугу, выѣцающую $\angle A$, кот. пересѣчетъ FK въ A . На AF отложимъ часть $AG=h_a$ и чрезъ G проведемъ прямую $MN \parallel DE$, кот. пересѣчетъ прямая AD и AE въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

278. Построимъ $\triangle ADE$, какъ въ предыд. случаѣ. На равнодѣлящей $\angle DAE$ отложимъ часть $AG=l_a$ и проведемъ прямую $MGN \parallel DE$, которая пересѣчетъ AD и AE въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

279. Пусть отношеніе сторонъ a и b равно $m : n$. Начертимъ такія прямая x и y , чтобы $x : y = m : n$ и построимъ $\triangle DEF$, въ которомъ $\angle DEF=\angle B$, $EF=x$ и $DF=y$. На продолженіяхъ EF , отложимъ: $EK=ED$ и $FL=FD$. На KL отложимъ $KC=2p$ и проведемъ прямую $CX \parallel LD$,

кот. пересѣчетъ прямую KD въ A . Изъ A проведемъ прямая, параллельно DE и DF , до пересѣченія съ KC въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

280. Отложимъ $DE=2r$ и раздѣлимъ DE въ точкѣ F въ отношеніи m къ n ; на DE опишемъ дугу, вмѣщающую $\angle A$, и возставимъ $\perp FK$ къ DE , кот. пересѣчетъ дугу въ G . Проведемъ равнодѣлящія $\angle \angle D$ и E , которыя пересѣкутся въ A ; изъ A проведемъ прямая, параллельно прямымъ GD и GE , которыя пересѣкутъ DE въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

281. 1) s , t и h_a проведены изъ A . Изъ точки F прямой XU возставимъ къ ней $\perp FG$, на кот. отложимъ $FA=h_a$; изъ A опишемъ дуги радіусами s и t , кот. пересѣкутъ XU въ D и D' , E и E' . Раздѣлимъ DE на n равныхъ частей и отложимъ на прямой XU , по одну сторону DE , часть DB , равную m такимъ частямъ, а по другую сторону EC , равную p такимъ же частямъ. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ, гдѣ A и C концы m -ой и p -ой частей.

2) s и t проведены изъ вершины C . Изъ произвольной точки F прямой XU , возставимъ къ ней \perp , на кот. отложимъ часть $FG=h_a$. Прямую GF въ D и E раздѣлимъ въ отношеніи $m:n:p$ и проведемъ прямая GH , DK и EL , параллельно XU . Изъ точки C прямой XU опишемъ дугу радіусомъ s , кот. пересѣчетъ DK въ M , и дугу радіусомъ t , кот. пересѣчетъ EL въ N ; прямая MN пересѣчетъ GH и XU въ A и B . $\triangle ABC$ искомымъ.

282. Проведемъ прямую $MK \parallel AU$, кот. пересѣчетъ AX въ точкѣ B . Отъ B отложимъ на AX такую часть BC , которая относилась бы къ AB какъ $m:n$ (III, 245). Прямая CM будетъ искома.

283. На сторонѣ AX отложимъ отъ A m произвольныхъ, но равныхъ частей, и на сторонѣ AU отъ A n такихъ же частей; пусть B и C концы m -го и n -го дѣленій. Прямая $MX \parallel BC$ будетъ искома.

284. Проведемъ прямую AF . Имѣемъ: $BD:CE=AD:AE$; но $DF:FE=BD:CE$, а потому $DF:FE=AD:AE$, т.-е. AF будетъ равнодѣлящею $\angle DAE$. Слѣдовательно, искомое геометрическое мѣсто F есть равнодѣлящая $\angle BAC$. Если точку F возьмемъ на продолженіи DE , то геометрическое мѣсто F будетъ равнодѣлящая внѣшняго угла при A .

285. Построимъ двѣ прямая x и y , кот. относились бы между собою какъ m къ n (III, 245). Проведемъ прямую $GH \parallel AX$ на разстояніи x и прямую $KL \parallel AU$ на разстояніи y , которая пересѣчетъ прямую GH въ M . Прямая AM будетъ искомое геометрическое мѣсто.

286. Проведемъ такую прямую AX , чтобы разстоянія отъ точекъ ея до AB и AC были бы въ отношеніи $m:p$ (III, 285), и еще прямую BY разстоянія отъ точекъ которой до AB и BC были бы въ отношеніи $m:n$. Точка O пересѣченія прямыхъ AX и BY будетъ искома.

287. Проведемъ произвольно двѣ параллельныя прямая, пересѣкающія AB и CD въ E и F , E' и F' ; проведемъ $E'X \parallel EM$ и $F'Y \parallel FM$, которыя пересѣкутся въ M' . Прямая MM' будетъ искома.

288. Раздѣлимъ прямую OO' на двѣ части въ отношеніи m къ n и точку B дѣленія соединимъ съ A . Прямая, проходящая чрезъ точку A , перпендикулярно AB , будетъ искома сѣкущая.

289. Раздѣлимъ прямую AB на n равныхъ частей и на продолженіи BA отложимъ m такихъ частей, а на продолженіи AB — p такихъ же частей.

Пусть C конецъ m -ой части, а D конецъ p -ой части. Проведемъ прямыя CO и DO , которыя пересѣкутъ окружн. въ E и F . Хорда EF искомая.

290. Изъ точки E , взятой произвольно на OX , проведемъ прямую $\parallel AB$ и на ней отложимъ m равныхъ, но произвольно взятыхъ частей; пусть F конецъ m -ой части. Изъ точки G , взятой произвольно на OY , проведемъ прямую $\parallel CD$ и отложимъ на ней n такихъ же частей; пусть H конецъ n -ой части. Проведемъ прямыя $FK \parallel OX$ и $HL \parallel OY$, которыя пересѣкутся въ точкѣ M . Прямая OM будетъ искомое геометрическое мѣсто.

291. Пусть $m : n$ данное отношеніе. Здѣсь могутъ быть два случая:

1) Искомая прямая должна быть между данными прямыми. Тогда, изъ произвольной точки A прямой MN опустимъ $\perp AB$ на KL и раздѣлимъ его на $m+n$ равныхъ частей. Прямая, проведенная чрезъ конецъ m -го дѣленія, считая отъ A , параллельно MN , будетъ искомая.

2) Искомая прямая должна быть внѣ данныхъ прямыхъ. Изъ точки A прямой MN опустимъ $\perp AB$ на KL и раздѣлимъ его на m равныхъ частей. На продолженіи AB отложимъ отъ B n такихъ же частей и чрезъ конецъ послѣдняго дѣленія проведемъ прямую $\parallel MN$, кот. будетъ искомая.

292. Чрезъ P и точку O , пересѣченія данныхъ прямыхъ, проведемъ прямую. Изъ произвольной точки A прямой KL опустимъ $\perp AB$ на MN и изъ A опишемъ дугу радіусомъ AB , кот. пересѣчетъ прямую OP въ C ; проведемъ прямую $PX \parallel CA$, которая пересѣчетъ KL въ D . Точка D будетъ искомая.

293. Задача рѣшается подобно предыд., только радіусъ AC дуги надо взять такой, кот. находился бы въ данномъ отношеніи къ длинѣ $\perp AB$.

294. Задача рѣшается подобно 293-й задачѣ.

295. Найдемъ на BC такую точку D , чтобы $BD : CD = m : n$ (III, 245 и 247). Прямая AD будетъ искомая. Задача допускаетъ два рѣшенія, смотря по тому, гдѣ взята точка D : между B и C или на продолженіи BC .

296. Положимъ, что $m > n > p$. Проведемъ чрезъ C такую прямую MN (внѣ точекъ A и B), чтобы разстоянія до нея отъ A и B были въ отношеніи $(m-p) : (n-p)$ (III, 295). Опустимъ $\perp AD$ на MN и на продолженіи его отложимъ такую часть DE , чтобы $DE : DA = p : (m-p)$. Прямая EX , параллельная MN , будетъ искомая.

297. Раздѣлимъ прямую BC въ точкѣ D въ отношеніи $m : n$. Прямая, проходящая чрезъ точку A , перпендикулярно AD , будетъ искомая.

298. Соединимъ E , середину прямой AB , съ точкою C , и на прямой CE отложимъ часть $ED = \frac{1}{2}EC$. Точка D будетъ искомая.

299. Проведемъ прямыя: $MK \parallel AZ$ и $ML \parallel AY$, которыя пересѣкутъ прямую AX въ точкахъ B и C ; на прямой AX отложимъ часть $BD = BC$. Прямая, проходящая чрезъ точки D и M , будетъ искомая.

300. Рѣш. сходно съ предыдущимъ, только надо отложить $BD = \frac{m}{n}BC$.

301. Прямую AC въ точкѣ D раздѣлимъ въ отношеніи m къ n . Проведемъ прямую DBY и прямыя AX и CZ , параллельныя DB . Прямая AX , BY и CZ будутъ искомыя.

302. Чрезъ какую-либо точку D , взятую на сторонѣ AB , проведемъ прямую, параллельно AC . до встрѣчи съ BC въ E . Опустимъ $\perp DK$ на

АС и на немъ отложимъ такую часть *DF*, чтобы $DF:DE=m:n$. Проведемъ прямую *BF*, которая пересѣчетъ *АС* въ точкѣ *L*, и прямую $LG \parallel FD$ до встрѣчи съ *AB* въ *M*. Точка *M* будетъ искомаю.

303. Рѣшеніе то же, что и въ предыдущей задачѣ; только прямую *DF* надо провести параллельно сторонѣ *BC*.

304. Изъ точки *G*, взятой произвольно на *AB*, проведемъ хорду $GH \parallel BC$ и на *HC* отложимъ часть $HF=\frac{n}{m} \cdot AG$. Проведемъ прямую $CX \parallel FG$, которая пересѣчетъ *AB* въ *D*, и хорду $DE \parallel BC$. Хорда *DE* будетъ искомаю.

305. Пусть *k* длина хорды. Изъ точки *G*, взятой произвольно на *AC*, проведемъ прямую $GX \parallel AB$ и отложимъ на *GX* часть $GH=\frac{m}{n}CG$. Изъ *B* опишемъ дугу радіусомъ *k*, которая пересѣчетъ прямую *CH* въ *F*. Проведемъ прямую $FY \parallel BA$, которая пересѣчетъ *АС* въ *E*; проведемъ хорду *ED*, параллельно *FB*. Хорда *DE* будетъ искомаю.

306. Положимъ, что задача рѣшена и *DE* (*D* на *AB*, *E* на *AC*) искомаю прямая. Тогда, по заданію, имѣемъ:

$$\frac{AD+AE}{BD+BC+CE}=\frac{m}{n} \text{ или } \frac{AD+AE}{AD+AE+BD+BC+CE}=\frac{m}{m+n} \text{ или}$$

$$\frac{AD+AE}{2p}=\frac{m}{m+n}, \text{ гдѣ } 2p \text{ периметръ } \triangle; \text{ отсюда } AD+AE=\frac{m}{m+n} \cdot 2p.$$

Въ $\triangle ADE$, $\angle LA$ и *ADE* и сумма сторонъ *AD* и *AE* извѣстны, а потому построимъ такой $\triangle A'D'E'$, въ кот. $\angle A'=\angle A$, $\angle A'D'E'$ равнялся углу, составленному прямою *KL* съ *AB*, и $A'D'+A'E'=\frac{m}{m+n} \cdot 2p$ (I, 295); на *AB* отложимъ $AD=A'D'$ и на *AC* часть $AE=A'E'$. Прямая *DE* искомаю.

307. На продолженіи *BC* отложимъ часть $CF=AB$ и на *BF* часть $FK=s$; проведемъ прямую $KX \parallel FA$, которая пересѣчетъ *AB* въ *D*. Хорда *DE*, параллельная *AC*, будетъ искомаю.

308. Пусть $AB > BC$. Отложимъ на *BC* часть $BK=AB-BC$ и на *KB* часть $KF=d$; проведемъ прямую $FX \parallel KA$, которая пересѣчетъ *AB* въ *D*. Хорда *DE*, параллельная *AC*, будетъ искомаю.

309. Проведемъ прямую $MN \parallel AY$, на разстояніи *s*, которая пересѣчетъ *AX* въ *B*; отложимъ на *AY* часть $AC=s$. Прямая *BC* будетъ искомаю геометрическое мѣсто.

310. Изъ произв. точки *D* прямой *AX* проведемъ прямую $\parallel KL$ и отложимъ на ней часть $DE=s$; проведемъ прямую $EZ \parallel AX$, кот. пересѣчетъ *AY* въ *B*. Изъ произвольной точки *F*, прямой *AY*, проведемъ прямую $\parallel PQ$, и отложимъ на ней часть $FG=s$; проведемъ прямую $GF \parallel AY$, которая пересѣчетъ *AX* въ *C*. Прямая *BC* будетъ искомаю.

311. Изъ произвольной точки *D* прямой *AX* проведемъ прямую $DP \parallel KL$ и отложимъ на ней $DE=d$; проведемъ прямую $EQ \parallel AX$, которая пересѣчетъ *AY* въ *B*; на прямой *DE* отложимъ произвольную часть *DF* и проведемъ прямую $FK \parallel AX$. Изъ точки *G* прямой *AY* проведемъ прямую $GZ \parallel PQ$ и отложимъ на ней $GH=EF$; проведемъ прямую $HN \parallel AY$, которая пересѣчетъ *FK* въ *M*. Прямая *BM* будетъ искомаю геом. мѣсто.

312. Проведемъ касательную XU къ кругу O , параллельно KL , и еще двѣ касательныя подъ углами къ XU , равными $\angle A$ и B . Треугольникъ, полученный въ пересѣченіи касательныхъ, будетъ искомымъ.

313. Впишемъ въ окружность $\angle DEF = \angle A$ и на хордѣ DF построимъ $\angle XDF = \angle B$, кот. бокъ DX пересѣчетъ окружн. въ G . $\triangle DGF$ искомымъ.

314. Въ окружн. впишемъ $\angle DEF = \angle A$ и опустимъ $\perp OG$ на хорду DF ; изъ O опишемъ окружн. радіусомъ OG , а изъ P проведемъ къ ней касательную, кот. пересѣчетъ данную окружность въ M и N . На хордѣ MN построимъ $\angle XMN = \angle B$, кот. бокъ MX пересѣчетъ данную окружность въ L . $\triangle LMN$ искомымъ.

315. Впишемъ въ окружность $\angle DEF = \angle A$ и опустимъ перпендикуляръ OG на хорду DF . Изъ O опишемъ окружность радіусомъ OG и проведемъ къ ней касательную, параллельно KL , кот. пересѣчетъ данную окружность въ M и N . Дальнѣйшее построеніе то же, что и въ предыдущей задачѣ.

316. Проведемъ чрезъ точку A прямую $XU \parallel KL$ и чрезъ точки B и C прямыя BN и CM подъ углами къ XU , равными $\angle D$ и E . Въ пересѣченіи проведенныхъ прямыхъ получимъ искомый \triangle .

317. Проведемъ хорду $GH \parallel KL$ (G на AC , H на BC) и на GH построимъ $\triangle KGH \sim \triangle DEF$. Проведемъ прямую CK , которая пересѣчетъ AB въ L ; изъ L проведемъ прямыя: $LX \parallel KH$ и $LY \parallel KG$, которая пересѣкутъ BC и AC въ точкахъ N и M . $\triangle LMN$ будетъ искомымъ.

318. На сторонахъ CA и CB отложимъ части CD и CE , кот. относились бы какъ m къ n (III, 245). Проведемъ прямую $DX \parallel CB$ и $EY \parallel CA$, кот. пересѣкутся въ G , и прямую CG , кот. встрѣтитъ AB въ N . Проведя хорду $NM \parallel BC$ и хорду $NK \parallel AC$, получимъ искомый $\square CMNK$.

319. Проведемъ хорду $KH \parallel AC$ и на KH построимъ $\angle HKK = \angle D$; на PH отложимъ такую часть HL , чтобы $HL : HK = DE : DG$. Пусть Q точка пересѣченія AC съ BL . Проведемъ хорду $QP \parallel HL$, хорду $PN \parallel AC$ и хорду $NM \parallel HL$. $\diamond MNPQ$ будетъ искомый параллелограммъ.

320. Проведемъ прямую $EF \parallel KL$, кот. пересѣчетъ AX и AY въ B и C . На BC опишемъ сегментъ, вмѣщающій $\angle \alpha$. Проведемъ прямую AP , которая пересѣчетъ дугу сегмента въ D ; изъ P проведемъ прямыя $\parallel DB$ и DC , которыя пересѣкутъ AX и AY въ M и N . $\triangle MNP$ будетъ искомымъ.

321. Точку A соединимъ съ P . На сторонѣ EF опишемъ сегментъ, вмѣщающій $\angle PAX$, а на сторонѣ DF сегментъ, вмѣщающій $\angle PAY$; точку G пересѣченія дугъ этихъ сегментовъ соединимъ съ D , E и F . На бокахъ AX и AY отложимъ такіа части AM и AN , чтобы $AM : GE = AP : GF$ и $AN : GD = AP : GF$. Тогда получимъ искомый $\triangle MNP$.

322. На сторонѣ DE , внѣ $\triangle DEF$, построимъ сегментъ EGD , вмѣщающій $\angle B$, а на FD , внѣ \triangle , сегментъ FHD , вмѣщающій $\angle C$. Чрезъ точку D проведемъ сѣкущую KDL этихъ сегментовъ (K на дугѣ EGD , L на дугѣ FHD) такъ, чтобы $KD : DL = BM : CM$ (III, 288). Тогда на BC построимъ $\angle XMB = \angle EDK$ и $\angle YMC = \angle FDL$. Бока MX и MY пересѣкутъ стороны AB и AC въ точкахъ N и P . $\triangle MNP$ будетъ искомымъ.

323. Опустимъ $\perp AD$ на BC и проведемъ прямую $AX \parallel BC$; на ней отложимъ часть $AE = AD$ и точку E соединимъ съ B . Изъ точки P пере-

сѣченія прямыхъ BE и AC опустимъ $\perp PQ$ на BC . Тогда PQ будетъ стороною искомага квадрата. Чтобы получить самый квадратъ, проведемъ хорду $PN \parallel CB$ и опустимъ $\perp NM$ на BC . $\diamond MNPQ$ искомымъ квадратъ.

324. Пусть $\angle A$ большой. Опустимъ $\perp AD$ на BC и отложимъ на BC часть $BE=AD$; проведемъ прямую $CX \parallel EA$, которая пересѣчетъ продолженіе стороны BA въ точкѣ P . Опустимъ $\perp PQ$ на BC и проведемъ прямую $PX \parallel CB$ до пересѣченія съ продолженіемъ стороны CA въ N ; опустимъ $\perp NM$ на BC . $\diamond MNPQ$ будетъ искомымъ квадратъ.

325. Опустимъ $\perp AK$ на BC и проведемъ прямую $AX \parallel BC$; на AX отложимъ такую часть AL , чтобы $AL:DG=AK:DE$ и чрезъ P , точку пересѣченія BL съ AC , проведемъ прямую $\parallel CB$, которая пересѣчетъ AB въ N ; опустимъ $\perp \perp NM$ и PQ на BC . $\square MNPQ$ будетъ искомымъ.

326. Опустимъ $\perp AD$ на BC и отложимъ на немъ часть $DF=r$. На BC также отложимъ часть $BE=r$; прямая FE пересѣчетъ AC въ P . Точка P будетъ одна изъ вершинъ искомага прямоугольника.

327. OA и OB радіусы сектора AOB . На AB , вѣт сектора, построимъ $\square ABCD$. Проведемъ прямыя OC и OD , которыя пересѣкутъ $\cup AB$ въ F и E . Изъ E и F проведемъ прямыя, перпендикулярныя къ хордѣ AB , которыя пересѣкутъ OA и OB въ G и H . $\diamond EFGH$ будетъ искомымъ \square .

328. OA и OB радіусы сектора AOB . Опустимъ $\perp AD$ на OB и построимъ $\square ADEF$; проведемъ прямую OF , которая пересѣчетъ $\cup AB$ въ C . Проведемъ прямую $CH \parallel BO$ до пересѣченія съ AO въ H и опустимъ $\perp \perp CG$ и HK на OB . $\diamond CHKG$ искомымъ \square .

329. Дана окружность O и прямая XY . Опустимъ $\perp OM$ на XY и изъ L , произвольной точки XY , возставимъ къ ней \perp , на которомъ отложимъ $LK=2LM$; проведемъ прямую MK , которая пересѣчетъ окружность въ A и A' . Точка A или A' будетъ вершиною искомага квадрата. Задача возможна, если $OM \leq R\sqrt{5}$, гдѣ R радіусъ окружности.

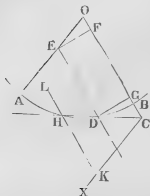
330. Изъ K , середины AB , возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ дугу сегмента въ C . Проведемъ прямую $CX \parallel AB$ и отложимъ на ней часть $CL=\frac{1}{2}CK$; проведемъ прямую KL , которая пересѣчетъ дугу въ P . Точка P будетъ одна изъ вершинъ искомага квадрата, который получимъ такъ: проведемъ прямую $PY \parallel BA$, которая пересѣчетъ дугу въ N , и опустимъ $\perp \perp PQ$ и NM на AB . Тогда найдемъ искомымъ квадратъ $MNPQ$.

331. Изъ K , середины AB , возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ дугу сегмента въ C . Проведемъ прямую $CX \parallel AB$ и отложимъ на ней часть CL , равную четвертой пропорціальной CK , $\frac{1}{2}DG$ и DE (III, 252). Чрезъ точку P , пересѣченія KL съ дугою, проведемъ прямую $PY \parallel AB$, кот. пересѣчетъ дугу въ N ; опустимъ $\perp \perp PQ$ и NM на AB . $\square MNPQ$ искомымъ.

332. Изъ K , середины AB , возставимъ къ ней \perp и на немъ отложимъ $KD=\frac{1}{2}r$ и на KB часть $KE=\frac{1}{2}r$. Изъ произв. точки F прямой KB возставимъ къ ней $\perp FX$, кот. пересѣчетъ прямую DE въ G . На FX отложимъ часть $GH=GF$ и пусть точка пересѣченія EH съ дугою будетъ P . Проведемъ прямую $PY \parallel AB$, которая пересѣчетъ дугу въ N , опустимъ $\perp \perp NM$ и PQ на AB . Получимъ искомымъ $\square MNPQ$.

333. Продолживъ OB (фиг. 47), отложимъ часть $OC=s$ и проведемъ прямую $CX \parallel OA$. На CX отложимъ произвольную часть CK и проведемъ прямую $KL \parallel BO$. На KL отложимъ часть $KN=CK$ и проведемъ прямую CH , кот. пересѣчетъ дугу сектора въ D . Черезъ D проведемъ прямую, параллельно BO , кот. пересѣчетъ радіусъ OA въ E . Прямоугольникъ $DEFG$ будетъ искомымъ.

Фиг. 47.



для построения искомага прямоугольника, проведемъ равнодѣлящую угла

Фиг. 48.



334. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

335. Положимъ, что задача рѣшена и прямоугольникъ $MNPQ$ (фиг. 48), даннаго периметра, вписанъ въ секторъ. Проведемъ равнодѣлящую $\angle AOB$ и отложимъ на ней часть $OC=r$; изъ M проведемъ прямую $\parallel NC$, которая пересѣчетъ OC въ D . Въ $\triangle OMDQ$ видимъ, что діAGONАЛИ равны и перпендикулярны между собою. Поэтому, для построения искомага прямоугольника, проведемъ равнодѣлящую угла

336. Проведемъ прямую CD и опустимъ $\perp AE$ на CD . На AE отложимъ часть AF , равную четвертой пропорціональной CD , MN и MQ . Проведемъ прямую $AX \parallel BF$ и прямая CY и DZ , перпендикулярно BF . Въ пересѣченіи прямыхъ: AX , BF , CY и DZ получимъ искомый \square .

337. Изъ произвольной точки A' прямой KL проведемъ прямую $A'D$ (точка D на MN) подъ угломъ B къ прямой MN и прямую $A'E$ (точка E на PQ) подъ угломъ C къ прямой PQ . Черезъ A' , D и E опишемъ окружность, кот. пересѣчетъ MN и PQ въ C' и B' . $\triangle A'B'C'$ будетъ искомымъ.

338. На CA отложимъ $CF=AB$ и проведемъ прямую $FX \parallel BC$. Опишемъ изъ A дугу радіусомъ AB , кот. пересѣчетъ FX въ G , и изъ E , пересѣченія прямыхъ BG и AC , проведемъ хорду $ED \parallel AG$, кот. будетъ искомая.

339. На сторонѣ CA отложимъ часть $CF=\frac{r}{m}AB$. Проведемъ прямую $FX \parallel BC$, а изъ A опишемъ дугу радіусомъ $\frac{r}{m}AB$, которая пересѣчетъ прямую FX въ G ; изъ E , пересѣченія прямой BG съ AC , проведемъ хорду ED , параллельную AG . Хорда DE будетъ искомая.

340. Отложимъ на CD часть $CG=AB$ и проведемъ прямую $GX \parallel AC$, а изъ B опишемъ дугу радіусомъ AB , кот. пересѣчетъ прямую GX въ H .

Изъ точки F , пересѣченія прямыхъ AN и CD , проведемъ хорду $FE \parallel NB$. Точки E и F будутъ искомыми.

341. Построимъ прямыя x , y и z пропорціональныя m , n и p , т.-е. чтобы $x:y:z=m:n:p$ (III, 246). Отложимъ на AB часть $AG=x$, а изъ G опишемъ дугу радіусомъ y . На CD отложимъ $CH=z$ и проведемъ прямую $HX \parallel AC$, кот. пересѣчетъ дугу въ K . Изъ точки F , пересѣченія прямыхъ AK и CD , проведемъ хорду $FE \parallel KG$. Точки E и F будутъ искомыми.

342. Изъ произвольной точки B (фиг. 49) прямой AY возставимъ \perp , на кот. отложимъ часть $BC=\frac{l}{m}$, и проведемъ прямую $CF \parallel AY$, которая пересѣчетъ AX въ E . Проведемъ прямую EG , разстоянія отъ точекъ которой до прямыхъ EA и EF были бы въ отношеніи $m:n$ (III, 285). Прямая EG будетъ искомое геометрическое мѣсто.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ на EG какую-либо точку M и опустимъ перпендикуляры MN и MK на EA и EF . Тогда $MN:MK=m:n$; откуда $\frac{n}{m}MN=MK=KL-ML=\frac{l}{m}-ML$ или $\frac{n}{m}MN+ML=\frac{l}{m}$ или $n \cdot MN+m \cdot ML=l$.

343. (III, 342). 344. (III, 342 и 343).

345. Раздѣлимъ хорду AB въ отношеніи $m:n$ въ точкѣ C и одну изъ дугъ AB пополамъ въ точкѣ D . Проведемъ прямую DC , кот. пересѣчетъ дугу AB (по другую сторону хорды AB) въ M . Точка M будетъ искомай.

346. Пусть отношеніе сторонъ b и c равно $m:n$. Опишемъ окружность радіусомъ R и впишемъ въ нея $\angle BDC=\angle A$ (B и C на окружн.) и на дугѣ BDC найдемъ такую точку A , чтобы $AB:AC=m:n$ (III, 345). $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

347. Пусть отношеніе сторонъ b и c равно $m:n$. Построимъ $\angle XAY=\angle B$ и опишемъ окружн. радіусомъ r , касающуюся боковъ угла. На сторонахъ угла отложимъ такіа части AD и AE , чтобы $AD:AE=m:n$. Проведемъ касательную къ окружн., по другую сторону относительно A , $\parallel DE$, которая пересѣчетъ AX и AY въ B и C . $\triangle ABC$ искомымъ.

348. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

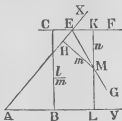
349. На произвольной прямой отложимъ часть AD , равную четвертой пропорціальной l , $a+b$ и a , и на ней построимъ равнобедренный $\triangle ACD$, въ которомъ $AC=CD=b$; на продолженіи DC отложимъ часть $CB=a$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

350. Найдемъ двѣ такіа длины x и y , чтобы $x:k=(m+n):n$ и $y:a=m:n$. Построимъ $\triangle ADC$, въ которомъ $AD=x$, $AC=b$ и $CD=y$. Продолживъ DC , отложимъ $CB=a$. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

351. Построимъ $\triangle ADE$, въ кот. высота $AF=a+h_a$, $\angle ADE=\angle B$ и $\angle AED=\angle C$. На AD найдемъ такую точку B (III, 302), чтобы хорда BC , параллельная DE , равнялась длинѣ $\perp BK$, опущеннаго на DE . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

352. Построимъ $\triangle ADE$, въ кот. $\angle DAE=\angle A$, $AD=b+c$ и $AE=a+c$.

Фиг. 49.



На сторонѣ EA возьмемъ точку F и проведемъ прямую $FX \parallel ED$. На DA отложимъ часть $DH=EF$ и изъ H опишемъ дугу радиусомъ EF , которая пересѣчетъ прямую FX въ G . Проведемъ прямую DG , кот. пересѣчетъ AE въ C , и прямую $CY \parallel GH$ до встрѣчи съ AD въ B . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

353. Построеніе сходно съ предыдущимъ, только EF и DH надо отложить на продолженіяхъ сторонъ AE и AD .

354. Построимъ $\angle XBY = \angle B$ и отложимъ на BY часть $BC=a$, а на BX m произвольныхъ, но равныхъ частей; пусть E будетъ конецъ m -го, а D конецъ n -го дѣленія. Раздѣлимъ DE пополамъ въ точкѣ F и изъ F опишемъ дугу радиусомъ FD , кот. пересѣчетъ прямую BY въ G и G' . Проведемъ прямую $CX \parallel GF$, кот. пересѣчетъ BX въ A . $\triangle ABC$ искомымъ.

355. На прямой XY , отъ точки D отложимъ m произвольныхъ, но равныхъ частей, и отъ F конца послѣдняго дѣленія отложимъ n такихъ же частей; пусть E конецъ n -ой части. На DE опишемъ сегментъ DGE , вмѣщающій $\angle A$, и возставимъ $\perp FX$ къ DE , кот. пересѣчетъ дугу въ G . На продолженіи DG отложимъ часть $GH=GE$ и на HD часть $HB=b+c$; проведемъ прямую $BY \parallel DE$, которая пересѣчетъ EH въ C , и прямую $CZ \parallel EG$, которая пересѣчетъ DH въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

356. Опишемъ окружность O радиусомъ R и впишемъ въ нее $\angle BGC = \angle A$ (B и C на окружн.). Опустимъ $\perp OX$ на BC и продолжимъ его до пересѣченія съ окружностью въ E . Раздѣлимъ хорду BC въ отношеніи $m:n$ и изъ D точки дѣленія возставимъ $\perp DY$ къ BC , а изъ E опишемъ дугу радиусомъ EC , которая пересѣчетъ DY въ F ; проведемъ прямую FE , которая пересѣчетъ окружность въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

357. На продолженіи прямой AB найдемъ такую точку D , чтобы $AD:BD=m:n$ (III, 246). Опустимъ $\perp AE$ и BF на прямую CD . Окружности, описанныя радиусами AE и BF , будутъ искомыми.

358. Въ кругѣ O проведемъ діаметръ EA и продолжимъ его на длину AD , равную четвертой пропорціи. k, k и AE . Возставимъ $\perp DX$ къ DE , который пересѣчетъ окружн. O' въ C и C' . Сѣкущія AC и AC' искомыя.

359. На продолженіи OA отложимъ часть $AO' = \frac{n}{m} \cdot OA$. Окружность, описанная изъ O' радиусомъ $O'A$, будетъ искомаю.

360. Пусть $n > m$. На продолженіи OA отложимъ такую часть AB , чтобы $AB:AO=2m:(n-m)$. На AB , какъ діаметръ, опишемъ окружность, кот. пересѣчетъ данную окружность въ C и C' . Хорда, проходящая чрезъ C и A или C' и A , будетъ искомаю.

361. Проведемъ въ кругѣ хорду DE данной длины и раздѣлимъ ее въ отношеніи m къ n въ точкѣ F и пополамъ въ G . Опишемъ изъ O окружн. радиусомъ OF , кот. пересѣчетъ AB въ C и C' ; чрезъ C или C' проведемъ касательныя къ окружности, описанной радиусомъ OG , который пересѣкутъ данную окружность въ K и L , K' и L' . Хорды KL и $K'L'$ будутъ искомыя.

362. Пусть R радиусъ окружности O . На прямой OA отложимъ часть $AD = \frac{n}{m} \cdot OA$ и изъ D опишемъ дугу радиусомъ $\frac{n}{m} \cdot R$, которая пересѣчетъ окружность O' въ C и C' . Прямая AC и AC' будутъ искомыя.

363. Проведемъ прямую чрезъ точки A и O , кот. пересѣчетъ меньшую окружность въ B , а большую въ C . Изъ A опишемъ дугу радіусомъ, равнымъ четвертой пропорціональной a , AB и BC , кот. пересѣчетъ меньшую окружность въ D и D' ; продолжимъ AD и AD' до пересѣченія съ большою окружностью въ E и E' . Отрѣзки ED и $E'D'$ будутъ искомыми.

364. На прямой KL отложимъ отрѣзки DE и EF , кот. относились бы какъ m къ n . На DE и EF , по ту сторону, гдѣ A , опишемъ сегменты, вмѣщающіе углы φ и ψ , кот. дуги пересѣкнутся въ точкѣ G . Изъ A проведемъ прямыя: $AX \parallel GD$, $AY \parallel GE$ и $AZ \parallel GF$, кот. и будутъ искомыми.

365. На произвольной прямой XY отложимъ отрѣзки DE и EF , которыя относились бы какъ m къ n . На DF опишемъ сегментъ, вмѣщающій $\angle AOB$ и возставимъ $\perp EX$ къ DF , который пересѣчетъ дугу сегмента въ G . Построимъ въ секторѣ $\angle AOH = \angle DGE$ и чрезъ точку C пересѣченія OH съ дугою AB проведемъ касательную, кот. и будетъ искомою.

366. Пусть M искомая точка и C середина AB . Тогда $MA^2 + MB^2 = 2AC^2 + 2MC^2$. Но AC постоянная, а потому max. или min. будетъ тогда, когда MC будетъ max. или min., т.-е. (II, 187) когда M лежитъ на концахъ діаметра, проходящаго чрезъ C . Ближайшій конецъ діаметра къ точкѣ C соотвѣтствуетъ min., а другой конецъ max.

367. Пусть P искомая точка; C середина AB . Тогда $PA^2 + PB^2 = 2AC^2 + 2PC^2$. Но AC постоянная величина, а потому $PA^2 + PB^2$ будетъ наименьшимъ, когда PC наименьшимъ, т.-е. когда P совпадаетъ съ ближайшимъ концомъ діаметра, проходящаго чрезъ O и C . Задача неопредѣленная, когда C совпадаетъ съ O .

368. Возьмемъ на окружности какую-либо точку B и прямую AB раздѣлимъ въ отношеніи $m : n$ въ точкѣ M . Проведемъ прямую $MK \parallel BO$, кот. пересѣчетъ прямую OA въ C ; тогда $AC : OC = m : n$. $\triangle AMC \sim \triangle AOB$, а потому $MC : OB = AM : AB = m : (m+n)$; откуда видимъ, что MC величина постоянная. Слѣд. искомое geometr. мѣсто будетъ окружность, описанная изъ C радіусомъ CM .

369. Пусть AB данное основаніе и C уголъ при вершинѣ. На AB опишемъ круговой сегментъ, вмѣщающій $\angle C$. Возьмемъ на дугѣ сегмента, произвольную точку C и соединимъ ея съ A и B . Раздѣлимъ пополамъ AB въ D и BC въ G ; пусть точка E пересѣченіе прямыхъ AG и CD . Прямая DC раздѣлена въ точкѣ E въ отношеніи 1 къ 2, а потому (III, 368) геометр. мѣсто точки E будетъ окружность, у кот. центръ точка D .

370. Проведемъ діаметръ AC и опустимъ $\perp MD$ на AC . $\triangle AMD \sim \triangle ABC$, а потому $AD : AB = AM : AC$ или $AD \cdot AC = AB \cdot AM = k^2$. Откуда $AD \cdot k^2 : AC$, т.-е. величина постоянная, а потому искомое геометрическое мѣсто будетъ прямая, проходящая чрезъ точку D , перпендикулярно AC .

371. Опустимъ $\perp AC$ на XY и возьмемъ на немъ такую точку D , чтобы $AC \cdot AD = k^2$. А такъ какъ, по заданію, $AB \cdot AM = k^2$, то $AC \cdot AD = AB \cdot AM$ или $AC : AM = AB : AD$; откуда видимъ, что $\triangle AMD$ и ABC подобны, а потому $\angle AMD$ прямой. Слѣд. искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность, описанная на AD , какъ діаметръ.

372. Опустимъ $\perp AC$ на XU и, продолживъ его, отложимъ такую часть CN , чтобы $AC \cdot AN = k^2$. Окружность, описанная на AN , какъ діаметръ, будетъ искомымъ геометрическое мѣсто.

373. Опустимъ $\perp MP$ на OA и проведемъ прямую OM , кот. пересѣчетъ AC въ N . $\triangle OMP \sim \triangle AON$ и $\triangle OBM \sim \triangle ONB$, а потому $OP : ON = OM : OA$ и $ON : OB = OB : OM$; откуда $OP \cdot OA = OM \cdot ON$ и $OM \cdot ON = OB^2$ или $OP \cdot OA = OB^2$. Но OA и OB данныя величины, а потому OP есть величина постоянная при всякомъ положеніи сѣкущей ABC , т.-е. искомымъ геом. мѣсто будетъ прямая, проходящая чрезъ точку $P \perp$ къ OA .

374. C середина PQ ; AP и BQ пересѣкаются въ M ; AQ и BP въ N . По заданію, $PC = CQ$ и $AO = OB$. Слѣд. $PC : CQ = AO : OB$, а потому AP , BQ и OC пересѣкаются въ M и потому OCM прямая. $\triangle MPC \sim \triangle MAO$; слѣдов. $MC : MO = PC : AO$ или $MC : (MO - MC) = PC : (AO - PC)$; но $MO - MC = OC$; AO и PC величины постоянныя, а потому MC , а слѣд. и OM , величина постоянная, т.-е. искомымъ геом. мѣсто M будетъ окружность. То же и для точки N .

375. D середина BC . Опустимъ $\perp DN$ на AO . Тогда $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + DB^2) = 2(AO^2 + OD^2 + 2AO \cdot ON + DB^2) = 2(AO^2 + OD^2 + DB^2) + 4AO \cdot ON = 2(AO^2 + OB^2) + 4AO \cdot ON = 4AO^2 + 4AO \cdot ON = 4AO(AO + ON) = 4AO \cdot AN$. Но $AB^2 + AC^2$ и AO постоянныя величины, а потому AN постоянна величина, т.-е. D лежитъ на \perp , возставленномъ изъ N къ AO .

376. 1) Пусть $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда, на сторонахъ прямого $\angle XAY$, отложимъ часть $AB = a$ и часть $AC = b$. Гипотенуза $BC = x$.

2) Пусть $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Тогда начертимъ прямой $\angle XAY$ и на сторонѣ AX отложимъ часть $AB = b$; изъ B опишемъ дугу радіусомъ a , которая пересѣчетъ AY въ C . Къ этой $AC = x$.

3) Пусть $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Построимъ сперва $\sqrt{a^2 + b^2} = y$ (1°); тогда $x = \sqrt{y^2 + c^2}$, который построимъ опять на основаніи 1-го случая.

4) Пусть $x = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$. Построимъ сперва $\sqrt{a^2 + c^2} = y$ (1°); тогда $x = \sqrt{y^2 - b^2}$, который построимъ на основаніи 2-го случая.

5) Пусть $x = \sqrt{2b^2 - a^2} = \sqrt{b^2 + b^2 - a^2}$. Построимъ $\sqrt{b^2 + b^2} = y$ (1°); тогда $x = \sqrt{y^2 - a^2}$, который построимъ на основаніи 2-го случая.

6) Пусть $x = \sqrt{2a^2 + 3b^2} = \sqrt{2(a^2 + b^2) + b^2}$. Построимъ сперва $\sqrt{a^2 + b^2} = y$; тогда $x = \sqrt{2y^2 + b^2} = \sqrt{y^2 + y^2 + b^2}$ и потому построимъ опять $\sqrt{y^2 + y^2} = z$ (1°); тогда $x = \sqrt{z^2 + b^2}$, который умѣемъ уже построить (1°).

377. Пусть $x = \sqrt{ab}$. На произвольной прямой отложимъ часть $AB = a$ и $BC = b$. На AC опишемъ полуокружность, а изъ точки B возставимъ $\perp BD$ къ AC , который пересѣчетъ полуокружность въ E . Отрѣзокъ $BE = x$.

2) Другое построеніе. Положимъ $a > b$. На произв. прямой отложимъ часть $AB = a$ и на ней часть $AC = b$. На AB опишемъ полуокружн. и возставимъ $\perp CE$ къ AB , кот. пересѣчетъ полуокружн. въ D . Хорда $AD = x$.

378. Пусть x искомымъ продолженіемъ. Тогда, по условію, $b^2 = ax$ и x можно построить какъ четвертую пропорціональную b , b и a .

Можно x построить еще такъ:

1) На произвольной прямой отложимъ часть $AB=a$ и на AB опишемъ полуокружность. Изъ A опишемъ дугу радиусомъ b , которая пересѣчетъ полуокружность въ C ; опустимъ $\perp CD$ на AB . Отрѣзокъ $AD=x$.

2) На произвольной прямой MN отложимъ часть $AB=a$ и, возставивъ $\perp BX$ къ MN , отложимъ на немъ часть $BC=b$; изъ середины AC возставимъ \perp , который пересѣчетъ MN въ точкѣ O , а изъ O опишемъ окружность радиусомъ OA , которая пересѣчетъ MN въ точкѣ D . Отрѣзокъ $BD=x$.

379. Возставимъ $\perp AK$ къ AB . На немъ отложимъ часть $AO=\frac{1}{2}AB$ и изъ O опишемъ окружн. радиусомъ OA ; прямая BO пересѣчетъ окружность въ E (ближайшая къ B) и D ; изъ B опишемъ дугу радиусомъ BD , которая пересѣчетъ продолженіе AB въ C . Отрѣзокъ BC искомый.

380. На AB опишемъ полуокружность и прямую AB раздѣлимъ въ точкѣ D въ отношеніи $m:n$; возставимъ $\perp DE$ къ AB , который пересѣчетъ полуокружность въ C . Точка C будетъ искома.

381. На произвольной прямой отложимъ часть $AB=a$ и поступимъ такъ, какъ въ предыдущей задачѣ. $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

382. На прямой XU возьмемъ произвольный отрѣзокъ DE и на немъ опишемъ полуокружность. Раздѣлимъ DE въ точкѣ F въ отношеніи $m:n$ и возставимъ $\perp FG$ къ DE , кот. пересѣчетъ полуокружность въ A . На AF отложимъ часть $AG=h$ и проведемъ прямую GX , параллельно DE , кот. пересѣчетъ прямыя AD и AE въ точкахъ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

383. На прямой XU отложимъ отъ точки A m произвольныхъ, но равныхъ частей, и отъ B , конца m -го дѣленія, отложимъ n такихъ же частей и пусть C конецъ послѣдняго дѣленія. На AC опишемъ полуокружность и изъ B возставимъ \perp къ AC , кот. пересѣчетъ полуокружность въ D . На DA отложимъ часть $DE=a$ и проведемъ прямую $EX \parallel AC$, которая пересѣчетъ DC въ F . Отрѣзокъ DF будетъ искомымъ.

384. На $AB=a$ построимъ $\angle XBA=\frac{1}{2}d$. Изъ A опишемъ дугу радиусомъ k , которая пересѣчетъ BX въ D ; опустимъ $\perp DC$ на AB . Точка C будетъ искома.

385. Изъ точки B прямой $AB=a$ возставимъ $\perp BX$ и изъ B опишемъ полуокружность радиусомъ a . На BX отложимъ часть $BD=k$, а изъ A опишемъ дугу радиусомъ AD , которая пересѣчетъ полуокружность въ E ; опустимъ $\perp EC$ на AB . Точка C будетъ искома.

386. Возьмемъ произвольный отрѣзокъ DE на прямой XU и опишемъ на DE полуокружность. Раздѣлимъ DE въ точкѣ F въ отношеніи m къ n и возставимъ $\perp FK$ къ DE , который пересѣчетъ полуокружность въ G . Прямую AB раздѣлимъ на двѣ части AC и BC , пропорціональныя GD и GE . Точка C будетъ искома.

387. Построимъ GD и GE , какъ въ предыдущей задачѣ, найдемъ на продолженіи AB такую точку C , чтобы $AB:BC=GD:GE$ (III, 247). Точка C будетъ искома.

388. A и B данныя точки на окружности O . Раздѣлимъ хорду AB внутренно или внѣшне въ отношеніи m къ n въ точкѣ C . Опустимъ \perp -ы AD и BE на прямую OC и продолжимъ ихъ до встрѣчи съ окружностью въ A' и B' . Хорды AA' и BB' будутъ искомы.

389. Отложимъ на KQ часть $KS=KP$ и возставимъ $\perp SX$ къ PQ , который пересѣчетъ окружность въ A и A' . PA и PA' искомыя сѣкущія.

390. Построимъ внѣ треугольника, $\angle SAH=\angle B$; прямая AH пересѣчетъ продолженіе BC въ E . Точка E будетъ искомая.

391. Изъ точки M проведемъ касательную MC къ окружности. Тогда $MC^2=MA \cdot MB$, или $MC^2=k^2$ или $MC=k$, т.-е. касательныя, проведенныя къ окружности изъ искомыхъ точекъ, будутъ равны k , а потому (II, 342) искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность, описанная изъ O радиусомъ $\sqrt{k^2+r^2}$, гдѣ r радиусъ данной окружности.

392. Проведемъ сѣкущую ABC (B и C на окружн.) и изъ A опишемъ дугу радиусомъ, равнымъ средне-пропорціи. между AB и AC , которая пересѣчетъ окружн. въ D и D' . Прямые AD и AD' искомыя касательныя.

393. На AY отложимъ такую часть AD , чтобы AD была четвертою пропорціональною отрезковъ: AB , AB и AC . Окружность, проходящая чрезъ точки B , C и D , будетъ искомая.

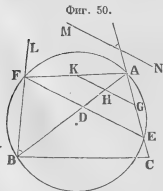
394. Рѣшеніе одинаково съ предыдущимъ.

395. На BA отложимъ часть BD , равную четвертой пропорціональной a , a и AB , а на CA — часть CE , равную четвертой пропорціональной b , b и CE . Окружность, проходящая чрезъ A , D и E , будетъ искомая.

396. Проведемъ касательную AB (B точка касанія) къ данному кругу и на AB опишемъ полуокружность. Въ этой полуокружности проведемъ хорду $BC=k$, а изъ точки A опишемъ дугу радиусомъ AC , которая пересѣчетъ данную окружность въ точкахъ D и D' . Сѣкущая AD или AD' будетъ искомая.

397. Около $\triangle ABC$ опишемъ окружность и проведемъ хорду BE такъ, чтобы она хордою AC дѣлилась пополамъ. Точка D пересѣченія хорды AC и BE будетъ искомая.

398. Положимъ, что задача рѣшена и хорда DE (фиг. 50) будетъ искомая, т.-е. $DE^2=AD \cdot BD$. Отложивъ на продолженіи ED часть $DF=DE$, увидимъ, что, по заданію, $DE \cdot DF=DA \cdot DB$, т.-е. точки A , E , B и F лежатъ на окружн.; тогда $\angle FBA=\angle FEA$, т.-е. тому, который составляетъ прямая MN съ AC . Поэтому, для рѣшенія задачи, построимъ $\angle LBA$, равный углу, составляемому MN съ AC ; изъ произв. точки G прямой AC проведемъ прямую $\parallel MN$, которая пересѣчетъ AB въ H ; продолживъ GH , отложимъ $HK=HG$ и проведемъ прямую AK , которая пересѣчетъ BL въ F . Опишемъ окружн., проходящую чрезъ A , B и F , которая пересѣчетъ бокъ AC въ E ; проведемъ прямую EF , которая пересѣчетъ AB въ D . Хорда DE будетъ искомая.



399. 1) $x=\sqrt{ab-cd}=\sqrt{a\left(b-\frac{cd}{a}\right)}$. Построимъ $\frac{cd}{a}=y$ (III, 253) и $b-y=z$;

тогда $x = \sqrt{az}$, т.-е. x есть средния пропорціон. между a и z (III, 377).

2) $x = k\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}k^2} = \sqrt{k \cdot \frac{2}{3}k}$, а потому приводится къ 377 задачѣ этого отдѣла.

3) $x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}c^2} = \sqrt{a\left(\frac{1}{2}a + \frac{c^2}{3a}\right)}$. Построимъ: $\frac{1}{2}a = y$, $\frac{c^2}{3a} = z$ (III, 253) и $y + z = u$; тогда $x = \sqrt{au}$ (III, 377).

4) $x = \sqrt{2a^2 - 5ab + \frac{1}{4}b^2} = \sqrt{a\left(2a - 5b + \frac{b^2}{4a}\right)}$. Построимъ $\frac{b^2}{4a} = y$ (III, 253) и $2a - 5b + y = z$; тогда $x = \sqrt{az}$ (III, 377).

5) $x = k\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{k^2 \cdot \frac{4}{3}k^2}$. Построимъ $y = \sqrt{\frac{4}{3}k^2}$ (2°); тогда $x = \sqrt{k^2 y^2} = \sqrt{ky}$.

6) $x = \sqrt{a^4 + b^4} = \sqrt{a^2\left[a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2\right]}$. Построимъ $\frac{b^2}{a} = y$ (III, 254) и $\sqrt{a^2 + y^2} = z$ (III, 376); тогда $x = \sqrt{a^2 z^2} = \sqrt{az}$ (III, 377).

7) $x = \sqrt{a^4 + 3a^2b + 2b^4} = \sqrt{a^2\left(a^2 + 3ab + \frac{2b^4}{a^2}\right)}$. Построимъ $\sqrt{3ab} = y$, $\sqrt{\frac{2b^4}{a^2}} = z$ и $\sqrt{a^2 + y^2 + z^2} = u$; тогда $x = \sqrt{a^2 u^2} = \sqrt{au}$ (III, 377).

400. Отложимъ на произвольной прямой XY часть $AB = s$ и опишемъ на AB полуокружность. Проведемъ прямую $MN \parallel XY$ на разстояніи k , которая пересѣчетъ полуокружность въ точкахъ C и C' ; опустимъ $\perp CD$ на AB . Отрѣзки AD и BD будутъ искомыя.

401. На произвольной прямой отложимъ часть $AB = d$ и изъ O , середины AB , опишемъ окружность радіусомъ OA . Изъ точки B возставимъ \perp къ AB , на кот. отложимъ часть $BC = k$, и чрезъ C проведемъ сѣкущую $CDOE$ (D и E на окружн.). Отрѣзки CD и CE будутъ искомыя.

402. Чрезъ A и O проведемъ прямую, кот. пересѣчетъ окружность въ точкахъ B и C ; изъ A опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ средней пропорціональной между $\frac{m \cdot AC}{m+1}$ и AB , кот. пересѣчетъ данную окружность въ D и D' . Сѣкущія AD и AD' будутъ искомыя.

403. Возставимъ $\perp BX$ къ AB и на немъ отложимъ часть $BO = \frac{1}{2}AB$. Изъ O опишемъ окружность радіусомъ OB и проведемъ прямую AO , которая пересѣчетъ окружность въ D ; изъ A опишемъ дугу радіусомъ AD , которая пересѣчетъ AB въ C . Точка C будетъ искома.

404. На AB опишемъ окружн. и возставимъ $\perp BX$ къ AB , на которомъ отложимъ часть $BD = AB$. Изъ E пересѣченія окружн. съ прямою OD возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ продолженіе AB въ C . Точка C искома.

405. Проведемъ изъ A касательную AB (B точка касанія) къ данной окружности и въ окружности хорду $CD = AB$. Опустимъ $\perp OE$ на CD . Опишемъ изъ O окружность радіусомъ OE и къ ней проведемъ касательную AFG (F и G на окружности O). Прямая AG будетъ искома.

406. Положимъ, задача рѣшена и $\triangle ABC$ искомымъ, т.-е. $AC = b$, $\angle B = \angle C - 2\angle A$. Проведемъ равнодѣлящую $\angle B$, кот. пересѣчетъ AC въ D ;

тогда $AD=BD=BC$ и $\triangle BDC \sim \triangle ABC$. Изъ пособия $\triangle \triangle$ получимъ: $CD:BC=BC:AC$, т.-е. AC въ точкѣ D раздѣлена въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Такъ какъ $BC=AD$, то приводимся къ построению равнобедреннаго \triangle по основанію и одной изъ равныхъ сторонъ.

407. На произв. прямой отложимъ часть $BC=a$ и на ея продолженіи найдемъ такую точку E , чтобы $BC:BE=CE:BC$ (III, 404). Изъ B и C опишемъ дуги радіусомъ BE , кот. пересѣкнутся въ A . $\triangle ABC$ искомый.

408. На AU отложимъ произвольную часть AB и на ней построимъ равнобедренный $\triangle CAB$, въ кот. $\angle CAB=\angle CBA=2\angle C$ (III, 407); тогда $\angle XAC=\frac{1}{2}d$. Дальнѣйшее построение очевидно.

409. Построимъ $\triangle CAB$, какъ указано въ предыдущей задачѣ, и равно-сторонній $\triangle DAB$. Проведемъ равнодѣлящую AF угла CAD ; тогда $\angle CAF=\frac{1}{15}d$. Дальнѣйшее построение очевидно.

410. Изъ произвольной точки B прямой MN возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ KL въ C , и на KL отложимъ часть $CD=CB$. Проведемъ прямую $AX \parallel DB$, кот. пересѣчетъ MN въ E , и прямую $EY \parallel BC$, кот. пересѣчетъ KL въ O . Окружность, описанная изъ O радіусомъ OA , будетъ искомая.

411. На сторонѣ AU найдемъ точку O , равноотстоящую отъ прямой AX и точки P (III, 292). Точка O будетъ центръ искомой окружности.

412. На прямой AB найдемъ точку D , равноотстоящую отъ AC и B (III, 292). Изъ D (внутри $\angle CAB$) опишемъ полуокружность радіусомъ DB , которая и будетъ искомая.

413. На равнодѣлящей $\angle XAU$ найдемъ точку O , равноотстоящую отъ AX и точки P (III, 292). Точка O будетъ центромъ искомой окружности.

414. Продолжимъ прямыя до ихъ встрѣчи въ B . Тогда приведемся къ предыдущей задачѣ.

415. Проведемъ прямую AB , кот. пересѣчетъ прямую MN въ D . На MN отложимъ часть DC , равную средней пропорціональной между DA и DB . Окружность, проходящая чрезъ точки A , B и C , будетъ искомая.

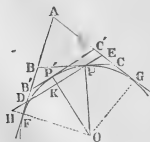
416. Проведемъ прямую $MN \parallel AZ$ на разстояніи p и опустимъ $\perp MD$ на AX . Продолживъ его, отложимъ часть $DM'=DM$. Чрезъ точки M и M' проведемъ окружность, касающуюся MN ; пусть E точка касанія. Чрезъ точку C проведемъ прямую, перпендикулярную AZ , кот. пересѣчетъ AX и AU въ точкахъ K и L . $\triangle MKL$ будетъ искомый. Задача допускаетъ два рѣшенія.

417. Опишемъ окружность, проходящую чрезъ точки A и B и касающуюся данной прямой. Точка касанія будетъ искомая.

418. Опишемъ окружность, проходящую чрезъ точку P (фиг. 51) и касающуюся боковъ $\angle A$ (III, 413). Чрезъ точку P проведемъ касательную къ окружности, кот. пересѣчетъ бока угла въ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомый.

Доказ. Надо показать, что периметръ $\triangle ABC$ мѣнѣе периметра какаго-либо $\triangle ADE$, гдѣ сторона DE проходитъ чрезъ P . Означимъ буквами F и G точки касанія

Фиг. 51.



круга къ бокамъ $\angle A$ и буквою H пересѣченіе продолженій DE и OF . Опустимъ $\perp OK$ на DE и продолжимъ его до встрѣчи съ дугою EPG въ P' ; чрезъ P' проведемъ касательную къ кругу, которая пересѣчетъ AD и AE въ B' и C' . Периметръ $\triangle ADE$, очевидно, болѣе периметра $\triangle AB'C'$; но периметры $\triangle ABC$ и $AB'C'$ равны (II, 60), а потому периметръ $\triangle ADE$ болѣе периметра $\triangle ABC$.

419. Опишемъ окружность, проходящую чрезъ A и B и пересѣкающую окружность O въ C и D . Продолжимъ прямую CD до встрѣчи съ прямою AB въ E и изъ E проведемъ касательную EF къ кругу O , гдѣ F точка касанія. Продолжимъ OF до встрѣчи въ G съ перпендикуляромъ, составленнымъ изъ середины AB . Точка G будетъ центръ искомой окружности. Въ самомъ дѣлѣ, изъ $\triangle GBE$ имѣемъ, что $GE^2 = BE^2 + GB^2 - BE \cdot AB$, а изъ $\triangle GEF$, что $GE^2 = GF^2 + EF^2 = GF^2 + AE \cdot BE$, такъ какъ $EF^2 = AE \cdot BE$. Изъ этихъ равенствъ выходитъ, что $BE^2 + GB^2 - BE \cdot AB = GF^2 + AE \cdot BE$ или $BE^2 + GB^2 = GF^2 + BE (AE + AB)$; откуда $GB^2 = GF^2$ или $GB = GF$.

420. Отложимъ на прямой XY часть $CD = CB$, а изъ A опишемъ окружность радіусомъ $2a$. Опишемъ окружность, проходящую чрезъ точки C и D и касающуюся проведенной окружности; пусть E будетъ точкою касанія окружностей. Проведемъ прямую AE , которая пересѣчетъ прямую CZ въ M . Точка M будетъ искомая. Задача возможна, если $AD < 2a$.

421. Проведемъ прямую $M'N' \parallel MN$ на разстояніи радіуса данной окружности и найдемъ на KL точку G , равноотстоящую отъ $M'N'$ и O (III, 292); опустимъ $\perp GF$ на MN . Окружность, описанная изъ G радіусомъ GF , будетъ искомая.

422. Опустимъ $\perp OB$ на MN , кот. пересѣчетъ окружн. въ C , и продолжимъ BO до встрѣчи съ окружн. въ D ; на прямой DA отложимъ часть DE , равную четвертой пропорціальной DC , DB и DA . Окружн. K , проходящая чрезъ точки A и E и касающаяся прямой MN (III, 415), будетъ искомая. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что окружность K касается прямой MN въ F и пересѣкаетъ прямую FD въ G . Изъ подобія $\triangle DFB$ и DCG слѣдуетъ, что $DB \cdot DC = DF \cdot DG$; изъ построенія, что $DB \cdot DC = DA \cdot DE$, а потому $DF \cdot DG = DA \cdot DE$; это показываетъ, что точка G общая для окружностей O и O' . Изъ равенства $\angle KFG$ и GDO въ равнобедренныхъ $\triangle KFG$ и DOG слѣдуетъ, что $\angle KGF = \angle DGO$. Но такъ какъ линія FGD прямая, то и линія KGO будетъ также прямая, т.-е. точки K , G и O лежатъ на одной прямой. Задача допускаетъ два рѣшенія.

423. Проведемъ прямую XY , равноотстоящую отъ данныхъ прямыхъ. Проведемъ, внѣ ихъ, прямую $M'N' \parallel MN$, на разстояніи радіуса данной окружности. Опустимъ $\perp OA$ на $M'N'$, кот. пересѣчетъ MN въ B и XY въ D . Опишемъ изъ O окружность радіусомъ AD , кот. пересѣчетъ XY въ C и C' . Окружность, описанная изъ C или C' радіусомъ DB , будетъ искомая.

424. R радіусъ окружности O . Проведемъ прямую $M'N' \parallel MN$ на разстояніи R отъ нея и прямую $K'L' \parallel KL$ на разстояніи также R (прямая $M'N'$ и $K'L'$ должны быть одновременно или между данными прямыми,

или внѣ ихъ). Опишемъ окружн. O' , касающуюся $M'N'$ и $K'L'$ и проходящую чрезъ O (III, 414), а изъ O' опишемъ окружн. радіусомъ, равнымъ разности полученной окружности и R . Эта окружность будетъ искомая. Задача допускаетъ два рѣшенія.

425. R и R' радіусы окружностей O и O' , гдѣ $R > R'$. Проведемъ прямую $M'N' \parallel MN$ на разстояніи R' отъ нея и изъ O опишемъ окружн. радіусомъ $R - R'$. Опишемъ еще окружн. O'' , проходящую чрезъ O' , касающуюся прямой $M'N'$ и окружн. радіуса $R - R'$ (III, 422); пусть R'' будетъ радіусъ этой окружн. Тогда окружность, описанная изъ O'' радіусомъ $R'' - R'$ или $R'' + R'$, смотря, по какую сторону лежитъ прямая $M'N'$ относительно данныхъ окружностей, будетъ искомая. Задача допускаетъ четыре рѣшенія.

426. Означимъ радіусы окружностей O и O' чрезъ R и R' , и положимъ, что $R > R'$. Проведемъ общую касательную къ окружностямъ O и O' , кот. пересѣчетъ линіи центровъ въ K ; пусть G и G' точки касанія къ кругамъ O и O' . Соединивъ A съ точкою K , отложимъ на AK часть KC , равную четвертой пропорціональной KG , KG' и KA , т.-е. чтобы $KC : KG = KG' : KA$. Окружность O'' , проходящая чрезъ точки A и C и касающаяся круга O' (III, 419), будетъ искомая. Въ самомъ дѣлѣ, пусть D будетъ точка касанія окружностей O' и O'' . Продолжимъ прямую KD до пересѣченія съ окружностью O въ E и пусть F будетъ точка пересѣченія KD съ окружностью O' . Найдемъ, что $KG : KG' = R : R'$ или $KG = KG' \cdot \frac{R}{R'}$, $KG^2 = KD \cdot KF$ и $KE : KF = R : R'$, слѣдоват. $KG \cdot KG' = KG^2 \cdot \frac{R}{R'} = KD \cdot KF \cdot \frac{KE}{KF} = KD \cdot KE$. Изъ пропорціи $KC : KG = KG' : KA$ найдемъ, что $KG \cdot KG' = KA \cdot KC$ и потому $KA \cdot KC = KD \cdot KE$, а это показываетъ, что точка E находится на окружности O'' . Сверхъ того, такъ какъ $O'E$ и OE параллельны $O'F$, то точки O , E и O'' лежатъ на одной прямой, т.-е. E будетъ точкою касанія. Задача допускаетъ четыре рѣшенія.

427. Пусть R , R' и R'' радіусы окружностей O , O' и O'' и $R < R' < R''$. Опишемъ окружность изъ O' радіусомъ $R' - R$, а изъ O'' радіусомъ $R'' - R$, и начертимъ еще окружность O''' , касающуюся этихъ окружностей и проходящую чрезъ точку O (III, 426); пусть R''' будетъ радіусъ этой окружности. Тогда окружность, описанная изъ O''' радіусомъ $R''' - R$, будетъ искомая. Задача допускаетъ четыре рѣшенія.

428. Проведемъ касательную къ даннымъ кругамъ, кот. пересѣчетъ линію центровъ въ K . Проведемъ прямую чрезъ O' и точку B пересѣченія окружности O' съ прямою AK , кот. пересѣчетъ прямую OA въ точкѣ O'' . Окружность, описанная изъ O'' радіусомъ $O''A$, будетъ искомая.

429. Проведемъ общую касательную къ даннымъ окружностямъ, которая пересѣчетъ линію центровъ въ точкѣ K . Прямая AK пересѣчетъ окружности O и O' въ E и E' , F и F' ; проведемъ прямые OE' и $O'F$ до встрѣчи въ точкѣ O'' и опишемъ окружность изъ O'' радіусомъ $O''E$, которая и будетъ искомая. Точно такъ же проведемъ прямые OE и $O'F'$

до встрѣчи въ точкѣ O''' и изъ O''' опишемъ окружность радіусомъ $O'''F$, которая тоже будетъ исконая.

430. Опишемъ произвольными радіусами двѣ окружности, проходящія чрезъ точки A и B и пересѣкающія данную окружность; хорды пересѣченія продолжимъ до встрѣчи въ точкѣ K . Проведемъ прямую MK , которая пересѣчетъ данную окружность въ точкахъ C и D ; проведемъ прямую $OX \perp CD$, кот. пересѣчетъ \perp , возставленный изъ середины AB , въ точкѣ O' . Окружность, описанная изъ O' радіусомъ $O'A$, будетъ исконая.

431. Положимъ, что задача рѣшена и окружность O'' , касается данныхъ окружностей въ точкахъ A и B такъ, что $AB=a$. Продолжимъ AB до встрѣчи съ линіей центровъ въ точкѣ K и изъ K проведемъ общую касательную KCD кругамъ O и O' (C точка касанія на окружн. O' и D на O''); тогда $AK-BK=a$ и $AK \cdot BK=KC \cdot KD$. Такъ какъ разность и произведеніе отрезковъ AK и BK извѣстны, то ихъ можемъ построить (III, 401). Дальнѣйшее построеніе очевидно.

432. На $\perp AX$ къ KL отложимъ часть AB , равную радіусу окружн. O , и проведемъ прямую $AU \parallel BO$, кот. пересѣчетъ окружность O въ D и E . Проведемъ прямую OD , которая пересѣчетъ KL въ F . Въ окружности O проведемъ хорду $GH=a$ и опишемъ изъ O окружность, касательную къ GH , а изъ F проведемъ касательную FM къ этой окружности, гдѣ M точка касанія; прямая OM пересѣчетъ AX въ точкѣ O' . Окружность, описанная изъ O' радіусомъ $O'A$, будетъ исконая.

433. Пусть M будетъ исконая точка, т.-е. $MA^2-MB^2=a^2$. Опустимъ $\perp MC$ на AB и соединимъ M съ D серединою AB . Тогда $MA^2-MB^2+AB^2-2 \cdot AB \cdot BC$, или $MA^2-MB^2=AB(AB-2BC)$, или $a^2=AB(AB-2BC)$; но $BC=\frac{1}{2}AB-CD$, а потому $a^2=AB(AB-AB+2CD)$ или $a^2=AB \cdot 2CD$; откуда видимъ, что CD величина постоянная. Слѣд. исконое геометрическое мѣсто будетъ прямая MN , перпендикулярная къ AB и проходящая отъ середины ея на разстояніи $CD=a^2:2AB$.

434. Пусть M будетъ одна изъ исконыхъ точекъ, т.-е. $MA^2+MB^2=a^2$ и O середина AB . Тогда $MA^2+MB^2=2(MO^2+AO^2)$ или $a^2=2(MO^2+AO^2)$. Но a и AO данныя величины, а потому MO будетъ величина постоянная. Слѣдовательно, исконое геометрическое мѣсто будетъ окружность, описанная изъ O радіусомъ, равнымъ $\sqrt{\frac{1}{2}a^2-AO^2}$ (III, 399).

435. Изъ D , середины AB , возставимъ $\perp DE$ и проведемъ такую прямую MN , чтобы разность квадратовъ разстояній отъ точекъ ея до A и C была равна a^2 (III, 433). Окружность, описанная изъ O , точки пересѣченія прямыхъ MN и DE , радіусомъ OA , будетъ исконая.

436. Начертимъ такую прямую MN , чтобы разность квадратовъ разстояній отъ точекъ ея до B и A равнялась a^2 (III, 433), и еще такую прямую KL , чтобы разность квадратовъ разстояній отъ точекъ ея до C и A равнялась b^2 (III, 433). Окружность, описанная изъ O , точки пересѣченія прямыхъ MN и KL , радіусомъ OA , будетъ исконая.

437. Начертимъ такую прямую MN , чтобы разность квадратовъ разстояній отъ точекъ ея до A и B равнялась a^2-b^2 (III, 433), и еще такую прямую KL , чтобы разность квадратовъ разстояній отъ точекъ ея до

B и C равнялась $b^2 - c^2$ (III, 433). Точка O , пересѣченія прямыхъ MN и KL , будетъ центрѣ искомой окружности. Чтобы получить радиусъ ея, опишемъ на OA полуокружность и изъ A — дугу радиусомъ a , которая пересѣчетъ полуокружность въ D ; тогда OD будетъ радиусъ искомой окружности.

438. Возставимъ $\perp AX$ къ KL и проведемъ прямую MN такъ, чтобы разность квадратовъ разстояній отъ точекъ ея до A и O равнялась R^2 (III, 433), гдѣ R радиусъ данной окружн. Окружность, описанная изъ O' , точки пересѣченія прямыхъ MN и AX , радиусомъ $O'A$, будетъ искомая.

439. Означимъ радиусы окружностей O и O' чрезъ R и R' . Искомое геометрическое мѣсто будетъ прямая MN , разность квадратовъ разстояній отъ точекъ которой до O и O' равно $R'^2 - R^2$ (III, 433).

440. Означимъ радиусы окружностей чрезъ R и R' . Искомое геометрическое мѣсто будетъ прямая MN , разность квадратовъ разстояній отъ точекъ которой до O и O' равно $R^2 - R'^2$ (III, 433).

441. Пусть R , R' и R'' радиусы данныхъ окружностей и G центрѣ искомой. Тогда $GO^2 - GO'^2 = R'^2 - R^2 \dots (1)$ и $GO^2 - GO''^2 = R''^2 - R^2 \dots (2)$, т.-е. центрѣ искомой окружности лежитъ на пересѣченіи (1) и (2) геометрическихъ мѣстъ (III, 433), а радиусъ ея равенъ $\sqrt{R^2 + GO^2}$.

442. Пусть C середина AB и R радиусъ окружности. Возставимъ $\perp CX$ къ AB и на прямой CX найдемъ такую точку G , чтобы $GO^2 - GC^2 = AC^2 - R^2$ (III, 433). Окружность, описанная изъ G радиусомъ GA , будетъ искомая.

443. Пусть R и R' радиусы данныхъ окружностей. Центрѣ искомой окружности G лежитъ на пересѣченіи геометрическихъ мѣстъ, для которыхъ $GO^2 - GO'^2 = R'^2 - R^2$ и $GO^2 - GA^2 = R^2$ (III, 433).

444. Пусть R , R' и R'' радиусы данныхъ окружностей. Центрѣ искомой окружности G лежитъ на пересѣченіи геометрическихъ мѣстъ: $GO^2 - GO'^2 = R'^2 - R^2$ и $GO'^2 - GO''^2 = R''^2 - R'^2$ (III, 433). Радиусъ же искомой окружности равенъ катету прямоугольнаго \triangle , въ которомъ гипотенуза равна $O''G$ и другой катетъ равенъ R'' .

445. Центрѣ искомой окружности G лежитъ въ пересѣченіи геометрическихъ мѣстъ: $GO'^2 - GO''^2 = R''^2 - R'^2$ и $GO'^2 - GO^2 = R'^2 + R^2$ (III, 433). Радиусъ же искомой окружности найдемъ, какъ въ предыдущей задачѣ.

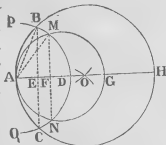
446. Центрѣ искомой окружности G лежитъ на пересѣченіи геометрическихъ мѣстъ: $GO^2 - GO'^2 = R'^2 - R^2$ и $GO'^2 - GO''^2 = R''^2 - R'^2$ (III, 433). Радиусъ искомой окружности найдемъ, какъ указано въ 444 зад. этого отд.

447. Положимъ, задача рѣшена и M искомая точка, т.-е. $MA \cdot MB = k^2$. Проведемъ діаметръ MC и опустимъ перпендикуляръ MD на AB . Тогда (III, 140) $MC \cdot MD = MA \cdot MB$ или $MC \cdot MD = k^2$, т.-е., длина MD будетъ четвертая пропорціональная k , k и MC . Построеніе очевидно.

448. Означивъ буквою R радиусъ окружности, описанной около искомаго \triangle , найдемъ (III, 140) $2Rh_a = k^2$ или $R = k^2 : 2h_a$. А потому опишемъ окружность радиусомъ R и проведемъ въ ней хорду $BC = a$; проведемъ прямую $XU \parallel BC$ на разстояніи h_a , которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ A и A' . $\triangle ABC$ и $A'BC$ будутъ искомыя.

440. Изъ точки A (фиг. 52) окружности опишемъ дугу произвольнымъ радиусомъ, которая пересѣчетъ данную окружность въ B и C . Изъ B и C опишемъ дуги тѣмъ же радиусомъ, которыя пересѣкнутся въ точкѣ D , симметричной A , относительно BC . Изъ D опишемъ окружность радиусомъ DA , которая пересѣчетъ дугу BC въ M и N ; изъ M и N опишемъ дуги радиусомъ AB , которыя пересѣкнутся въ O . Точка O будетъ центръ данной окружности.

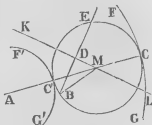
Фиг. 52.



Доказ. Прямая AO пересѣкаетъ BC въ E , MN въ F , меньшую окружность въ G и данную въ H . Тогда $AB^2 = AH \cdot AE$... (1) и $AM^2 = AG \cdot AF = 2AD \cdot AF$... (2). Но $AM = AB$, $AD = 2AE$ и $AF = \frac{1}{2}AO$, а потому (2) $AB^2 = 2 \cdot 2AE \cdot \frac{1}{2}AO = 2AO \cdot AE$... (3). Сравнивъ это равенство съ (1), найдемъ, что $AO = \frac{1}{2}AH$, т.-е. O будетъ центръ круга.

450. Изъ точки A (фиг. 53) опишемъ дугу FG радиусомъ s и опустимъ $\perp BD$ на KL . На продолженіи его отложимъ часть $DE = BD$ и опишемъ окружность, проходящую чрезъ A и B и касающуюся дуги FG (III, 419). Пусть C точка касанія. Проведемъ прямую AC , которая пересѣчетъ прямую KL въ точкѣ M . Точка M будетъ искомая.

Фиг. 53.



451. Построеніе то же, что и въ предыдущей зад. (надо найти точку C').

452. На произвольной прямой отложимъ $BC = a$ и проведемъ прямую $KL \parallel BC$ на разстояніи h_a . На прямой KL найдемъ такую точку A , чтобы сумма (или разность) разстояній отъ A до B и C равнялась s (III, 450). $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

453. Пусть R и R' радиусы окружностей O и O' . Построимъ прямую KL , разность квадратовъ разстояній точекъ которой до A и O' равнялась бы R'^2 (III, 433); на прямой KL найдемъ такую точку G , чтобы разность разстояній отъ нея до O и A равнялась R (III, 451). Окружность, описанная изъ точки G радиусомъ GA , будетъ искомая.

454. Опустимъ $\perp MD$ на AX и продолжимъ DM на такую длину ME , чтобы $DM \cdot ME = k^2$ (III, 378). На ME опишемъ окружность, которая пересѣчетъ прямую AU въ точкахъ C и C' . Прямая, проходящая чрезъ точки M и C , или точки M и C' , будетъ искомая.

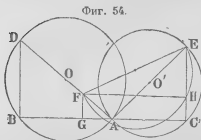
455. Опустимъ $\perp MD$ на AX и продолжимъ его на такую длину DE , чтобы $MD \cdot ME = k^2$ (III, 379). Дальнѣйшее построеніе то же, что и въ 454 задачѣ.

456. Положимъ, что задача рѣшена и BMC (B на AX , C на AU) искомая сѣкущая. Проведемъ прямую $MK \parallel AX$, кот. пересѣчетъ AU въ D , и прямую $ML \parallel AU$, кот. пересѣчетъ AX въ E ; отрѣзки AD и AE извѣстны.

По условию, $AD+DC+AE+EB=s$ или $EB+DC=s-(AD+AE)\dots(1)$. $\triangle EBM \sim \triangle DMC$, а потому $EB:DM=EM:DC$ или $EB:AE=AD:DC$; откуда $EB \cdot DC=AD \cdot AE\dots(2)$. Зная сумму и произведение отрезков EB и DC , можем их найти (III, 400). Построение очевидно.

457. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

458. Пусть $n > m$. Тогда положимъ, что задача рѣшена и BAC (фиг. 54)



Фиг. 54.

искомая сѣкущая т.-е. $m \cdot AB + n \cdot AC = l\dots(1)$. Проведемъ діаметры AD и AE окружностей O и O' ; раздѣлимъ AD въ точкѣ F такъ, чтобы $AD:AF=m:m$; опустимъ $\perp FG$ на AB . Тогда $AB:AG=AD:AF$ или $AB:AG=n:m$; откуда $m \cdot AB=n \cdot AG$. Подставивъ эту величину въ (1) равенство, найдемъ: $n \cdot AG+n \cdot AC=l$, или $n(AG+AC)=l$ или $n \cdot GC=l$; откуда $GC=l:n$. Соединимъ F съ E

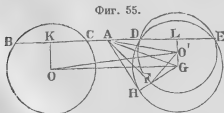
и опустимъ $\perp FH$ на CE . Тогда въ прямоугольномъ, $\triangle FEH$ извѣстны гипотенуза и катетъ $FH=GC$ а потому можемъ опредѣлить положеніе точки H и сѣкущей $BAC \parallel FH$. Построеніе очевидно.

459. Положимъ, задача рѣшена и пусть параллельные радіусы $OC=R$ и $O'D=R'$ будутъ искомыми. Отложимъ на OC часть $OE=O'D$ и проведемъ прямую $EX \parallel CA$, которая пересѣчетъ OA въ F ; $\triangle EOF \sim \triangle COA$, а потому $OF:OA=OE:OC$ или $OF:OA=R':R$; откуда $OF=\frac{R' \cdot OA}{R}$. Проведемъ прямую $O'Y \parallel OA$ и отложимъ на ней часть $O'G=OF$; тогда $\triangle GO'D=\triangle FOE$ и $\angle O'GD=\angle OFE=\angle O'BD$. Слѣдовательно точки G и B лежатъ на дугѣ сегмента, описаннаго на $O'D$.

Построеніе. Проведемъ прямую $O'Y \parallel OA$, отложимъ на ней часть $O'G=\frac{R'}{R}OA$ и опишемъ окружность, проходящую чрезъ O', G и B , кот. пересѣчетъ окружность O' въ D ; проведемъ радіусъ $OC \parallel O'D$. Тогда OC и $O'D$ будутъ искомыми радіусы.

460. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

461. Пусть R и R' радіусы окружностей O и O' . Положимъ, что задача



Фиг. 55.

рѣшена и $BCADE$ искомая сѣкущая. Опустимъ $\perp OK$ и $O'L$ на сѣкущую и на LO' отложимъ часть $LG=KO$; изъ точки G опишемъ окружность радіусомъ GD . Тогда увидимъ, что $\angle OGO'$ прямой и слѣд. точка G лежитъ на окружности, описанной на OO' , какъ діаметрѣ.

Проведемъ касательныя AF и AP къ окружностямъ O' и G ; увидимъ, что онѣ равны, такъ какъ $AF^2=AD \cdot AE$ и $AP^2=AD \cdot AE$. Тогда изъ $\triangle ACH$ и AFG , имѣемъ: $AC^2=AH^2+R^2=AF^2+R^2=AO'^2-R'^2+R^2$.

т.-е. AG известно, и потому легко опредѣлить положеніе точки G . Построеніе очевидно.

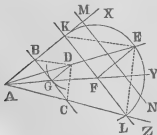
462. Опишемъ изъ точки C дугу радіусомъ CA , а изъ B дугу радіусомъ, равнымъ $\sqrt{4k^2 + AB^2}$, которая пересѣкнется въ точкахъ D и D' . Прямая $CX \perp AD$ и прямая $CY \perp AD'$ будутъ искомыми.

463. Пусть O будетъ (фиг. 56) искомая окружность и концы ея діаметра EF лежать на AB и AC . Тогда прямая DO будетъ $\perp BC$ и $\angle EDF = d$. На продолженіи FD отложимъ часть $DG = DF$ и проведемъ прямую $KL \parallel AC$, которая пересѣчетъ прямую BC въ H . Тогда $DH = DC$, что видно изъ равенства $\triangle DGH$ и DFC ; прямая $EG \parallel CD$ и слѣд. $\perp BC$. Такимъ образомъ рѣшеніе задачи приводится къ опредѣленію точекъ H и G .

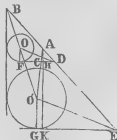
Рѣшеніе. Возставимъ $\perp DX$ къ BC и отложимъ на BC часть $DH = DC$. Проведемъ прямую $KHL \parallel AC$, которая пересѣчетъ AB въ N , и чрезъ произвольную точку E' стороны AB проведемъ прямую $\perp BC$, которая пересѣчетъ KL въ G' . На $E'G'$ опишемъ окружность, которая пересѣчетъ прямую ND въ D' . Изъ D проведемъ прямую, параллельно $D'E'$ в $G'D'$, кот. пересѣкутъ AB и AC въ E и F ; пусть O пересѣченіе EF съ DX . Окружность, описанная изъ O радіусомъ OD , будетъ искомая.

464. Проведемъ (фиг. 57) произвольно прямую, параллельно MN , которая пересѣчетъ прямые AX , AY и AZ въ точкахъ K , F и L . На KL опишемъ полуокружность, а изъ F восставимъ \perp къ KL , который пересѣчетъ полуокружность въ E . Между прямыми AE и AY проведемъ прямую $DG = k$ и $\parallel FE$. Прямая, проходящая чрезъ G , параллельно MN , будетъ искомая.

Фиг. 57.



Фиг. 58.

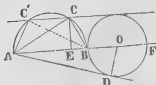


465. Назначимъ (фиг. 58) радіусы окружностей O и O' чрезъ R и R' , гдѣ $R < R'$; пусть $m < n$. На линіи центровъ найдемъ такую точку B ,

чтобы $BO : BO' = R : R'$ и прямую $O'A$ разделим въ C такъ, чтобы $AC : AO' = m : n$. Проведемъ прямую OC и прямую $O'X$, параллельную OC , кот. пересѣкутъ прямую AB въ точкахъ D и E . Касательная DF къ окружности O и касательная EG къ окружности O' будутъ искомыя прямыя.

466. Опишемъ окружность радиусомъ h (фиг. 59) и къ произвольной точкѣ D ея проведемъ касательную, на кот. отложимъ часть $DA = s$. Проведемъ прямую AO , которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ B и F . На AB опишемъ полуокружность и проведемъ касательную къ окружности O , параллельную AO , кот. пересѣчетъ полуокружность въ C и C' . $\triangle ABC$ и ABC' будутъ искомыя.

Фиг. 59.

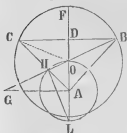


467. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

468. Положимъ, задача рѣшена и искомый путь будетъ $ABCA$ (Фиг. 60).

Тогда OA и OC будутъ равнодѣлящими $\angle LVB$ и C . $\triangle BOC$ равнобедренный, а потому $\angle OBC = \angle OCB$, а слѣд. и $\angle B = \angle C$ и $AC = AB$. Отсюда выходитъ, что діаметръ EF , проведенный чрезъ A , будетъ \perp къ BC . Возставимъ $\perp AG$ къ EF и продолжимъ BO , кот. пересѣчетъ AC въ H и AG въ G ; $\triangle ABG$ и AOH равнобедренные и потому $GH = OB$, т. е. радиусу даннаго круга, или $OG - OH = R \dots (1)$. $\triangle HOL \sim \triangle AOG$, а потому $OH : OA = OL : OG$; откуда $OH \cdot OG = OA \cdot OL$ или $OH \cdot OG = 2OA^2 \dots (2)$.

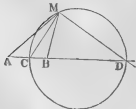
Фиг. 60.



Зная изъ (1) и (2) разность и произведение OH и OG , легко построить ихъ (III, 401). Когда найдемъ OG , то возставимъ \perp изъ A къ OA и изъ O опишемъ дугу радиусомъ, равнымъ OG , которая пересѣчетъ этотъ \perp въ G . Продолжимъ GO до встрѣчи съ окружностью въ B и изъ A опишемъ дугу радиусомъ AB , которая пересѣчетъ окружность въ C . Путь $ABCA$ будетъ искомый.

469. Пусть данное отношеніе будетъ $m : n$, гдѣ $m > n$, и M — одна изъ искомыхъ точекъ (Фиг. 61), т. е. такая, что $MA : MB = m : n$. Разделимъ данную прямую AB въ точкѣ C на такія двѣ части, чтобы $AC : CB = m : n$; тогда получимъ пропорцію: $MA : MB = AC : BC$, которая показываетъ, что прямая CM будетъ равнодѣлящею $\angle AMB$. На продолженіи AB опредѣлимъ такую точку D , чтобы $DA : DB = m : n$ и, сравнивъ эту пропорцію съ первою, найдемъ пропорцію: $MA : MB = DA : DB$, которая показываетъ, что прямая MD будетъ равнодѣлящею дополнительнаго угла къ

Фиг. 61.



углу AMB . Такъ какъ MC и MD равнодѣляція двухъ смежныхъ угловъ, лежащихъ по одну сторону прямой, то онѣ взаимно перпендикулярны, а потому уголъ CMD будетъ прямой. Отсюда выходитъ, что точка M

принадлежитъ окружности, описанной на CD , какъ діаметръ. Слѣдовательно, искомое геометрическое мѣсто точекъ M будетъ окружность.

470. Пусть точка M пересѣченіе прямыхъ AP и BQ . $\triangle AMB \sim \triangle PMQ$, а потому $AP : AM = BQ : BM$; откуда $AM : BM = AP : BQ = \text{постоянн.}$ Слѣдовательно (III, 469), geometr. мѣсто M будетъ окружность.

471. Опишемъ окружность, разстоянія точекъ кот. до точекъ A и B находится въ отношеніи $m : n$ (III, 469). Точки пересѣченія окружности съ прямою KL будутъ искомыя.

472. Опредѣлимъ геометрическое мѣсто такихъ точекъ, отъ кот. разстоянія до A и B въ отношеніи $m : n$ (III, 469); потомъ опредѣлимъ геометрическое мѣсто точекъ, отъ кот. разстоянія до A и C въ отношеніи $m : p$. Точка пересѣченія геометрическихъ мѣстъ будетъ искомая.

473. Опишемъ окружность, отношеніе разстояній точекъ которой до C и D равно отношенію $OC : OD$ (III, 469). Точки M и N пересѣченія проведенной окружности съ данной будутъ искомыя.

474. Проведемъ прямою AB , кот. пересѣчетъ KL въ C . Начертимъ окружность, отношеніе разстояній точекъ которой до A и B равно отношенію AC къ BC . Точки M и N пересѣченія проведенной окружности съ прямою KL будутъ искомыя.

475. На произвольной прямой отложимъ часть $BC = a$ и опишемъ такую окружность, отношеніе разстояній каждой точки кот. до B и C равно $m : n$ (III, 469). Изъ середины AB опишемъ дугу радіусомъ m_a , кот. пересѣчетъ описанную окружность въ точкѣ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

476. На прямой MN отложимъ часть $AB = c$ и на AB опишемъ такую окружность $ADBE$, отношеніе разстояній каждой точки которой до A и B равнялось бы отношенію $m : n$ (III, 469). Положимъ, что эта окружность пересѣчетъ прямою KL въ C и C' . $\triangle ABC$ и ABC' будутъ искомыя.

477. Пусть M будетъ одна изъ искомыхъ точекъ, т.-е. $\frac{MA}{MB} = \frac{a^2}{b^2}$. Построимъ $\frac{a^2}{b^2} = c$; тогда $\frac{MA}{MB} = \frac{c}{b}$. Слѣдовательно, приводимся къ задачѣ 469, III отд.

478. Задача рѣшается на основаніи предыдущей задачи.

479. Возьмемъ произвольную длину x и построимъ прямыя a и b , средне-пропорціональныя между k и x , l и x , т.-е. $a^2 = kx$ и $b^2 = lx$ (III, 377). Тогда искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность, отношеніе разстояній точекъ кот. до A и B равно отношенію a къ b (III, 469).

480. Опишемъ на $BC = a$ сегментъ BDC , вмѣщающій $\angle A$, и окружность, отношеніе квадратовъ разстояній отъ точекъ которой до B и C равно отношенію $k : l$ (III, 477); эта окружность пересѣчетъ дугу BDC сегмента въ A и A' . $\triangle ABC$ и $A'BC$ будутъ искомыя.

481. Такъ какъ въ $\triangle AMC$ прямая MB есть равнодѣлящая $\angle AMC$, то $MA : MC = AB : BC$ и слѣд. приводимся къ 469-й зад. этого отдѣла.

482. Искомая точка M лежитъ на пересѣченіи окружности, отношеніе разстояній точекъ которой до A и C равно отношенію AB къ CD (III, 469), съ окружностью, отношеніе разстояній точекъ которой до B и D равно отношенію AB къ CD (III, 469)

483. Пусть R , R' и R'' будутъ радіусы большей, средней и меньшей окружностей. Тогда, на какой-либо прямой XU , отложимъ равныя части $A'B'$ и $B'C'$ и найдемъ такую точку O' , разстоянія отъ кот. до A' , B' и C' пропорціональны R , R' и R'' (III, 472). Проведемъ въ большей окружности радіусъ OA и построимъ $\angle XOA = \angle A'O'B'$, кот. бока OX пересѣчетъ среднюю окружн. въ B . Прямая, проходящая чрезъ A и B , будетъ искомая сѣкущая. Если сѣкущая должна быть проведена такъ, чтобы $AB:BC=m:n$, то на прямой XU отложимъ такія части $A'B'$ и $B'C'$, чтобы $A'B':B'C'=m:n$, и далѣе поступимъ такъ, какъ было выше сказано.

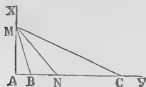
484. O центръ окружностей; R , R' и R'' радіусы большей, средней и меньшей окружностей. Тогда въ $\triangle ABC$, или внѣ его, найдемъ такую точку G , что $GA:GB:GC=R:R':R''$ (III, 472). Проведемъ радіусъ OA' большей окружности; проведемъ радіусъ $O'B'$ средней и радіусъ $O'C'$ меньшей окружности такъ, чтобы $\angle A'O'B' = \angle AGB$ и $\angle B'O'C' = \angle BGC$. $\triangle A'B'C'$ будетъ искомымъ.

485. Положимъ, задача рѣшена и M искомая точка. Проведемъ равнодѣлящую угла BMC , кот. пересѣчетъ AU въ N . Тогда $CM:BM=CN:BN \dots (1)$. $\triangle BMC \sim \triangle BNM$, а потому $BM:BN=BC:BM$ или $BM^2=BN \cdot BC \dots (2)$. Изъ $\triangle MCN$ получимъ:

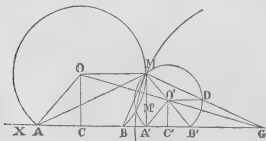
$CM^2=NM^2+CN^2+2CN \cdot AN=2CN^2+2CN \cdot AN=2CN(CN+AN)$ или $CM^2=2CN \cdot AN \dots (3)$. Раздѣлимъ почленно (2) на (3) равенство и умножимъ на (1); найдемъ, по сокращеніи, $BM:CM=BC:2AC$. Слѣд. точка M лежитъ на пересѣченіи прямой AX съ окружностью, построенною какъ указано въ 469-й задачѣ этого отдѣла.

486. На AB и $A'B'$ (фиг. 63), гдѣ $AB > A'B'$, опишемъ сегменты O и O' ,

Фиг. 62.



Фиг. 63.



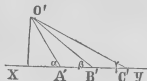
вмѣщающіе одинакіе (произвольной величины) углы; точки M и M' пересѣченія дугъ этихъ сегментовъ принадлежатъ искомому геометрическому мѣсту. Чрезъ точки O и O' проведемъ прямую, кот. пересѣчетъ XU въ G и прямую GM , кот. пересѣчетъ дугу O' въ D . Такъ какъ, по построению, $\angle AOC = \angle A'O'C'$, то $OA \parallel O'A'$ и $\triangle AOC \sim \triangle A'O'C'$ и $\triangle AOG \sim \triangle A'O'G$; поэтому $AO:A'O'=AC:A'C'=AB:A'B' \dots (1)$ и $AO:A'O'=GO:GO'$ или $MO:DO=GO:GO'$, а это показываетъ, что $MO \parallel DO'$ и слѣд. $\triangle OMG \sim$

$\odot \triangle O'DG$; откуда $GM : GD = MO : DO' = AO : A'O'$ или (1) $GM : GD = AB : A'B' \dots$ (2). По свойству сѣкущихъ, $GM \cdot GD = GA' \cdot GB' \dots$ (3); умноживъ (2) равенство на (3), найдемъ: $GM^2 = \frac{AB \cdot GA' \cdot GB'}{A'B'} \dots$ (4), т.-е. GM

величина постоянная. Отсюда видимъ, что искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность, описанная изъ точки G радиусомъ GM , определеннымъ въ (4) равенствѣ.

487. Начертимъ прямую XU (фиг. 64) и въ нея возьмемъ точку O' . Изъ O' проведемъ къ XU прямые: $O'A'$ подъ $\angle \alpha$; $O'B'$ подъ $\angle \beta$ и $O'C'$ подъ $\angle \gamma$. Найдемъ такую точку O , разстоянія отъ которой до A , B и C были бы пропорциональны прямымъ: $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$ (III, 472). Тогда точка O будетъ центромъ искомой окружности. Если построимъ на AO уголъ $KAO = \alpha$ и опустимъ $\perp OD$ на AK , то OD будетъ радиусъ искомой окружности.

Фиг. 64.



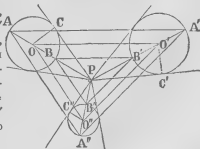
488. Пусть M будетъ одна изъ искомымъ точекъ. Проведемъ касательныя MA и MB къ кругу O и касательныя MA' и MB' къ кругу O' . Тогда, по условію, найдемъ, что $\angle AMB$ и $\angle A'MB'$ между собой равны $\triangle OMA \sim \triangle O'MA'$; слѣд. $OM : O'M = OA : O'A'$. Откуда видимъ, что отношеніе разстояній точки M до центровъ данныхъ круговъ O и O' будетъ величина постоянная, а потому (III, 469) искомое геометрическое мѣсто точекъ M будетъ окружность.



489. Рѣшеніе основывается на предыдущей задачѣ.

490. Пусть P (фиг. 65) точка, изъ кот. данныя круги видимы подъ однимъ угломъ (III, 489). Проведемъ прямыя PO , PO' и PO'' , кот. пересѣкутъ окружности въ A и B , A' и B' , A'' и B'' . Тогда $\triangle AA'A''$ и $BB'B''$ будутъ искомыя. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ касательныя PC , PC' и PC'' къ каждой изъ этихъ окружностей; $\triangle OCP$, $O'C'P$ и $O''C''P$ подобны, а потому $PO : OA = PO' : O'A' = PO'' : O''A''$; слѣд. $\triangle APA' \sim \triangle OPO'$ и $AA' \parallel OO'$. Также докажемъ, что $AA'' \parallel OO''$ и $A'A'' \parallel O'O''$.

Фиг. 65.



491. Положимъ, что вадача рѣшена и O (фиг. 66) искомая окружность, т.-е. O лежитъ на \perp , возставленномъ изъ середины AB , и $\angle ECF$, составленный касательными, проведенными къ кругу, равенъ ϕ . Впишемъ въ $\angle \phi$ окружность O' , касающуюся бо-

козъ угла, и пусть G точка касанія его къ боку CE . Изъ подобія

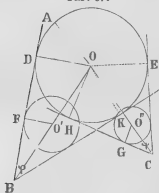
Фиг. 66.



$\triangle EOC$ и $GO'C$, найдемъ: $OE:OC=O'G':O'C$ или $OA:OC=O'G':O'C$. Такъ какъ $\angle \varphi$ данъ, то $O'G'$ и $O'C$ всегда можно найти, а потому центръ искомой окружности лежитъ въ пересѣченіи перпендикуляра, возставленнаго изъ середины AB , съ окружностью, отношеніе разстояній точекъ которой до A и C равно отношенію $O'G'$ къ $O'C$. Построеніе очевидно.

492. Построимъ $\angle KBL=\angle \varphi$ (фиг. 67) и произвольнымъ радіусомъ R' опишемъ окружность O' , касающуюся боковъ угла. Такъ же построимъ

Фиг. 67.



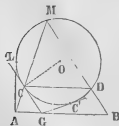
$\angle HCE=\angle \psi$ и произвольнымъ радіусомъ R'' опишемъ окружность O'' , касающуюся боковъ угла. Опишемъ окружность, отношеніе разстояній точекъ которой до A и B равно отношенію R' къ BO' ; опишемъ окружность, отношеніе разстояній точекъ которой до A и C равно отношенію R'' къ CO'' . Окружность, описанная изъ точки O пересѣченія этихъ окружностей радіусомъ OA , будетъ искомая.

493. Построимъ $\angle \varphi$ и ψ и въ каждомъ изъ нихъ опишемъ окружности O' и O'' произвольнымъ радіусомъ R , касающіяся боковъ угла. Начертимъ такую окружность O , отношеніе разстояній отъ каждой точки которой до точекъ A и B было бы равно отношенію AO' къ BO' ; она пересѣчетъ прямую KL въ O . Точка O будетъ центръ искомой окружности.

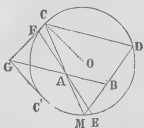
494. Здѣсь могутъ быть два случая:

1) Точки A и B лежатъ внѣ круга (фиг. 68).

Фиг. 68.



Фиг. 69.



чненія ея съ окружностью, получимъ другую искомую точку M' .

2) Точки A и B лежатъ внутри круга (фиг. 69). Проведемъ хорду FAE , кот. дѣлилась бы въ A пополамъ. На продолженіи BA отложимъ такую

Проведемъ касательную AL къ данному кругу и на AB отложимъ такую часть AG , чтобы $AL^2=AG \cdot AB$. Проведемъ касательныя EC и GC' къ кругу и продолжимъ прямую AC до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ M , кот. будетъ искомою. Если проведемъ прямую AC' , то, въ пересѣ-

часть AG , чтобы $AE^2 = AG \cdot AB$, а изъ G проведемъ касательныя GC и GC' къ данному кругу. Дальнѣйшее построение такое же, какъ и въ 1-мъ случаѣ.

495. Точки P' и Q' между P и Q . 1) A и T по разнымъ сторонамъ PQ . $\angle TRP' = \angle RAP'$ и $\angle TQ'Q' = \angle QAQ'$. Но $\angle RAP' = \angle QAQ'$, по заданію, а потому $\angle TRP' = \angle TQ'Q'$; слѣд. $TP = TQ$, т.-е. точка T лежитъ на радикальной оси. 2) Если A и T по разнымъ сторонамъ PQ , то $\angle TRP' = 2d - \angle RAP'$ и $\angle TQ'Q' = 2d - \angle QAQ'$; слѣд. $\angle TRP' = \angle TQ'Q'$ и $TP = TQ$, т.-е. точка T лежитъ на радикальной оси.

496. Построимъ $\square MABC$ и изъ C опишемъ окружность радиусомъ CM , кот. пересѣчетъ прямую MRS въ Q . Пусть T точка пересѣченія прямыхъ BM и AC . Опустимъ \perp -ы AD , BE , CF и TU на SM ; тогда $AT = CT$ и $AD \parallel TU \parallel CF$ и слѣд. $DU = UF$. Также $EU = UM$; слѣдоват. $DE = MF$ и тогда $SR = OE + ER = 2OE - OR = 2OE - 2OD = 2DE$. слѣдоват. $DE = MF$ и слѣд. $SR = MQ$ и $MP \cdot RS = MP \cdot MQ = \text{постоянному}$. Мѣсто Q на окружности C , а потому geometr. мѣсто точки P (III, 375) будетъ прямая, перпендикулярная къ AC или AB .

497. Проведемъ произвольно сѣкущую GEF къ окружности O' , гдѣ E и G на окружности. Опишемъ окружность черезъ точки F , E и A , кот. пересѣчетъ прямую AG въ H , а окружность O въ B и C . Продолжимъ прямую BC до пересѣченія съ GA въ K и изъ K проведемъ касательную KD къ окружности O , гдѣ D точка касанія. Окружность, проходящая черезъ D , H и A , будетъ искомая.

498. Пусть O и O' искомыя окружности, касающіяся SQ и SP въ M и N и между собою въ K ; тогда $OM : O'N = a : b$. Проведемъ прямую MK , пересѣкающую окружность O' въ B , и прямую NK' , пересѣкающую окружность O въ A . Въ $\triangle MOK$ и $K'O'B$ уголь $OKM = \angle O'KB$; слѣд. $\angle OMK = \angle O'BK$ и потому $OM \parallel O'B$. Также $OA \parallel O'N$ и слѣд. $\angle MOA = \angle NO'B = \angle PSQ$. Въ $\triangle MOA$, уголь $AMO = d - \angle MOA = d - \frac{1}{2}\angle PSQ$, а потому $MA \parallel$ равнодѣлящей $\angle S$; также $NB \parallel$ равнод. $\angle S$. Проведемъ прямую $KC \parallel AM$, которая пересѣчетъ MN въ C . Тогда $MC : NC = MK : NK = OK : O'K = a : b$, т.-е. точка K лежитъ на дугѣ, описанной на MN и вмѣщающей $\frac{1}{2}\angle PSQ$.

Рѣшеніе. Прямую MN раздѣлимъ въ C въ отношеніи a къ b и проведемъ прямую $CX \parallel$ равнодѣлящей $\angle PSQ$. На MN , въ сторону противоположную S , опишемъ сегментъ, вмѣщающій уголь $2d - \frac{1}{2}\angle PSQ$; дуга сегмента пересѣчетъ CX въ K . Точка K будетъ точкою касанія окружностей, а потому приводимся къ задачѣ (II, 262).

499. Назначимъ буквою φ уголь между прямыми AB и KL (фиг. 70) и положимъ, что задача рѣшена. Пусть M искомая точка, а C и D точки пересѣченія AM и BM съ окружн.; тогда, по условію, $CD \parallel KL$. Проведемъ хорду $DE \parallel AB$ и получимъ $\angle CDE = \angle \varphi$; продолжимъ хорду EC до пересѣченія съ AB въ G и уви-

Фиг. 70.



503. Пусть O центр описаннаго круга около равносторонняго $\triangle ABC$, а M одна из искомымъ точекъ, т.-е. $AM^2 + BM^2 + CM^2 = k^2$. Тогда (III, 122) $AM^2 + BM^2 + CM^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + 3OM^2$; но $AO = BO = CO = R$ и потому $k^2 = 3R^2 + 3OM^2$; откуда $OM = \sqrt{\frac{1}{3}k^2 - R^2}$, т.-е. OM будетъ величина постоянная, а потому искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность, описанная изъ O радиусомъ, равнымъ $\sqrt{\frac{1}{3}k^2 - R^2}$.

504. Пусть M будетъ одна изъ искомымъ точекъ, а MT и MT' касательныя къ кругамъ O и O' , гдѣ T и T' точки касанія. Означивъ радиусы окружн. чрезъ R и R' , найдемъ, по условію, что $MT^2 + MT'^2 = k^2$. Изъ $\triangle MTO$ и $MT'O'$ имѣемъ: $MT^2 = MO^2 - R^2$ и $MT'^2 = MO'^2 - R'^2$, а $MT^2 + MT'^2 = MO^2 + MO'^2 - (R^2 + R'^2)$ или $k^2 = MO^2 + MO'^2 - (R^2 + R'^2)$; откуда $MO^2 + MO'^2 = k^2 + R^2 + R'^2$, т.-е. сумма квадратовъ MO и MO' постоянная, а потому (III, 434) искомое геом. мѣсто точекъ M будетъ окружность.

505. Поступая такъ же, какъ въ предыд. случаѣ, найдемъ: $MO^2 - MO'^2 = k^2 + R^2 - R'^2$, т.-е. постоянному. Поэтому (III, 385) искомое геометрическое мѣсто будетъ прямая.

506. Означимъ радиусы окружностей чрезъ R и R' , и пусть M одна изъ искомымъ точекъ, а MT и MT' касательныя къ даннымъ кругамъ. Тогда $MT = MT'$. Но, изъ $\triangle OMT$ и $O'MT'$, имѣемъ: $MT^2 = MO^2 - R^2$ и $MT'^2 = MO'^2 - R'^2$; слѣд. $MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$ или $MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$. Слѣд. (III, 433) искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ прямая XY , перпендикулярная къ линіи центровъ въ точкѣ A , которая отстоитъ отъ середины OO' въ разстояніи равномъ $(R^2 - R'^2) : 2OO'$. Прямая XY наз. радикальною осью. Если окружности пересѣкаются, то радикальная ось будетъ прямая, проходящая чрезъ точки пересѣченія окружностей.

507. Точка пересѣченія радикальныхъ осей для окружностей O и O' , и окружностей O' и O'' (III, 506) будетъ искомая.

508. Проведемъ радикальную ось (III, 506) и на OO' опишемъ дугу, вѣщающую уголъ $180^\circ - \varphi$, кот. пересѣчетъ радикальную ось въ точкѣ A . Продолжимъ прямую AO до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ B и прямую AO до встрѣчи съ окружностью въ C . Проведемъ касательныя къ кругамъ O и O' въ точкахъ B и C , кот. пересѣкутся въ M . Точка M будетъ искомая.

509. Изъ равенства $AP \cdot BP = AC \cdot BD$ выходитъ, что $AP : AC = BD : BP$; слѣд. $\triangle APC$ и BDP подобны, а потому $\angle ACP = \angle DPB$ и $\angle APC = \angle PDB$. Окружность, описанная около $\triangle CAP$, пройдетъ и чрезъ точку M , такъ какъ $\angle CMP = d$; по той же причинѣ, окружность, описанная около $\triangle DBP$, пройдетъ чрезъ точку M . Тогда $\angle AMP + \angle BMP = \angle ACP + \angle PDB = \angle ACP + \angle APC = d$, а потому искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ полуокружность, описанная на AB , какъ діаметръ.

510. Пусть M одна изъ искомымъ точекъ; MP , MQ и MK перпендикуляры на стороны BC , CA и AB треугольника ABC . Положимъ, что PQ прямая; тогда $\angle BRP = \angle ARQ$. $\diamond MBP$ вписуемый въ кругъ діаметра MB , такъ какъ углы при точкахъ P и R прямые. Описавъ окруж-

ность около этого четырехугольника, найдемъ, что $\angle BRP = \angle BMP$, какъ опирающіеся на одну и ту же дугу BP . Также $\diamond MQAR$ вписуемый въ кругъ діаметра AM ; слѣд. $\angle ARQ = \angle AMQ$ и $\angle BMP = \angle AMQ$. Дополненія этимъ угламъ въ $\triangle MPB$ и MAQ равны, т.-е. $\angle MBP = \angle MAQ$. Но $\angle MAQ = 2d - \angle MAC$ и слѣд. $\angle MBP + \angle MAC = 2d$, а потому $\diamond AMBC$ вписуемый въ кругъ. Итакъ, M будетъ точкою окружности, описанной около $\triangle ABC$.

511. Пусть M одна изъ искомымъ точекъ. Тогда прямую AB раздѣлимъ въ точкѣ D на такія двѣ части, чтобы $AD : BD = n : m$, и точку D соединимъ съ M . На основаніи теоремы 123, III отдѣла, получимъ:

$$AM^2 \cdot BD + BM^2 \cdot AD = (MD^2 + AD \cdot BD)AB,$$

а изъ предыдущей пропорціи найдемъ, что

$$BD = \frac{m}{m+n} \cdot AB \text{ и } AD = \frac{n}{m+n} \cdot AB.$$

Замѣнивъ въ предыдущемъ равенствѣ BD и AD ихъ величинами, получимъ:

$$m \cdot AM^2 + n \cdot BM^2 = (m+n)MD^2 + \frac{mn}{m+n} AB^2;$$

но, по условію, $m \cdot AM^2 + n \cdot BM^2 = l^2$, а потому

$$(m+n)MD^2 + \frac{mn}{m+n} AB^2 = l^2.$$

Изъ этого равенства видимъ, что MD будетъ величина постоянная, а потому искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность.

512. Этотъ вопросъ рѣшается сходно съ предыдущимъ, и искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность. При рѣшеніи надо взять точку D на продолженіи BA .

513. Пусть точка M будетъ одна изъ искомымъ. Проведя касательныя MT и MT' къ окружностямъ O и O' , получимъ $MT^2 = OM^2 - OT^2$ и $MT'^2 = O'M^2 - O'T'^2$; откуда

$$\frac{OM^2 - OT^2}{O'M^2 - O'T'^2} = \frac{MT^2}{MT'^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Изъ этой пропорціи найдемъ:

$$n^2 \cdot OM^2 - m^2 \cdot O'M^2 = n^2 \cdot OT^2 - m^2 \cdot O'T'^2,$$

гдѣ вторая часть есть величина постоянная, а поэтому и разность квадратовъ разстояній OM и $O'M$, умноженныхъ, соответственно, на данныя числа, будетъ величина постоянная. Слѣдовательно (III, 512) искомое геометрическое мѣсто будетъ окружность.

514. Пусть P искомая точка внутри $\triangle ABC$; D и E середины AB и AC ; DE и CD пересѣкаются въ F . Раздѣлимъ CF въ G пополамъ; тогда $CG = GF = FD$. Имѣемъ: $PA^2 + PB^2 = 2PD^2 + 2DA^2$, $PF^2 + PC^2 = 2PG^2 + 2GF^2$ и $PD^2 + PG^2 = 2PF^2 + 2GF^2$; слѣд. $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PF^2 = PD^2 + 2DA^2 + PG^2 + 2PF^2 + 4GF^2 = 2DA^2 + 2PF^2 + 2GF^2 + 2PF^2 + 4GF^2 = 2DA^2 + 3PF^2 + 6GF^2$. Но DA и GF величины постоянныя, а потому сумма: $PA^2 + PB^2 + PC^2$ будетъ minimum тогда, когда $PF = 0$, т.-е. когда P совпадаетъ съ F . Слѣд. F , точка пересѣченія медианъ треугольника, будетъ искомая.

515. 2 фута. 516. $\sqrt{ab} = \sqrt{1,25} = 1,118$ арш. 517. $3\frac{7}{10}$ метра. 518. 1,8 фута, 1,2 фута и 1,5 фута. 519. Нѣтъ. 520. Будеть. 521. $3\frac{13}{64}$ арш. и $5\frac{19}{28}$ арш. 522. 6 саж. 523. Въ 3 сажени. 524. 2,8 фута. 525. $1\frac{11}{37}$ арш. и $1\frac{23}{37}$ арш. 526. 4,8 фута. 527. $2\frac{4}{7}$ арш. и $3\frac{4}{7}$ арш. 528. Нѣтъ. 529. Будеть. 530. 13,5 метра. 531. $k\left(\frac{2p}{k+l}-1\right) = 22\frac{1}{28}$ арш. и $l\left(\frac{2p}{k+l}-1\right) = 6\frac{1}{6}$ аршина. 532. $\frac{b'h}{b} = 1,5$ саж. 533. $\frac{ac}{b} = 1,96$ фута. 534. $\frac{bh}{b+h} = 0,462$ метра. 535. $4\frac{4}{9}$ арш. 536. $\frac{ph'}{h+h'} = 1,6$ саж.; $\frac{ph}{h+h'} = 2,4$ саж. 537. 8,28 арш.. 538. 27,43 дюйма. 539. $\sqrt{6,75} = 2,598$ дюйма. 540. $\sqrt{30,76} = 5,546$ дюйма. 541. $\sqrt{8,82} = 2,97$ арш. 542. $\sqrt{\frac{100}{3}} = 5,77$ фута. 543. Отрѣзокъ = 3,9 фута, а катеть = $\sqrt{24,96} = 4,996$ фута. 544. $\sqrt{23,04} = 4,8$ арш. и $\sqrt{28,8} = 5,37$ арш. 545. Гипот. = $\sqrt{40} = 6,324$ фута, а катеть = $\sqrt{24} = 4,899$ фута. 546. $\sqrt{13} = 3,605$ фута и $\sqrt{29,25} = 5,408$ фута. 547. $\sqrt{1,2} = 1,095$ саж. 548. Уменьшится на $\sqrt{40} - \sqrt{24} = 1,425$ фута. 549. На $\frac{1}{2}\sqrt{13} = 1,803$ арш. и $\frac{1}{2}\sqrt{13} = 1,202$ аршина. 550. 4,8 фута. 551. 4 арш. 552. $\frac{25}{12}\sqrt{6} = 5,1$ фута. 553. $1\frac{4}{8}$ арш. и $2\frac{4}{8}$ арш. 554. Прямой. 555. Тупой. 556. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2+a^2}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$. 557. $\frac{1}{2}(a+\sqrt{2b^2-a^2}) = 4$ арш. и $\frac{1}{2}(a-\sqrt{2b^2-a^2}) = 3$ арш. 558. $\frac{p^2+h^2}{2p} = 6,8$ арш. и $\frac{p^2-h^2}{p} = 6,4$ арш. 559. Катеты = $\frac{p}{n}(m+n-\sqrt{n^2+m^2}) = 4,375$ метра и $\frac{p}{m}(m+n-\sqrt{m^2+n^2}) = 2,916$ метра; гипотенуза = $\frac{p}{mn}(m+n-\sqrt{m^2+n^2})\sqrt{m^2+n^2} = 5,208$ метра. 560. Катеть = $\frac{2p(p-a)}{2p-a} = 1\frac{1}{2}$ арш., а гипотенуза = $\frac{\sqrt{a^2(2p-a)^2+4p^2(p-a)^2}}{2p-a} = 4\frac{1}{2}$ арш. 561. $\frac{a(m^2-n^2)+an\sqrt{m^2-n^2}}{2n^2-m^2} = 9$ метр. и $\frac{an(n+\sqrt{m^2-n^2})}{2n^2-m^2} = 12$ метр. 562. $a-b+\sqrt{2a(a-b)} = 10,93$ арш. и $a+\sqrt{2a(a-b)} = 12,93$ аршина. 563. $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. 564. $\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} = 86\frac{29}{151}$; $\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} = 131\frac{57}{151}$. 565. Половина гипот. 566. $2\sqrt{a^2+b^2} = 2,12$. 567. $\frac{1}{2}\sqrt{2(k^2+l^2)-4a^2}$. 568. $\frac{1}{2}\sqrt{2(k^2+l^2)-4a^2}$. 569. $\sqrt{2(a^2+b^2)-k^2}$. 570. $\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, гдѣ $2p = a+b+c$. 571. $\sqrt{a^2+b^2-ab}\sqrt{2} = 5$ фут. 572. $\sqrt{a^2+b^2-ab} = 1\frac{1}{6}$ арш. 573. $\sqrt{a^2+b^2+ab} = 1,74$ фута. 574. $\sqrt{a^2+b^2-ab}\sqrt{3}$. 575. $\frac{1}{2}(p+\sqrt{2b^2-p^2}) = 4,87$ дюйма и $\frac{1}{2}(p-\sqrt{2b^2-p^2}) = 1,13$ дюйма. 576. $\sqrt{\frac{dk^2+bl^2}{b+d}+bd}$ и $\sqrt{\frac{bk^2+dl^2}{b+d}-bd}$. 577. $\sqrt{\frac{da^2-bc^2}{d-b}+bd}$ и $\sqrt{\frac{dc^2-ba^2}{d-b}+bd}$. 578. $\sqrt{97}$. 579. 2; 2,4; 2,8 и 3,2 арш.

580. $\frac{am}{n} = 6\frac{2}{3}$ арш. 581. $\frac{aP_1}{P} = 3$ арш. 582. $\frac{Pb}{a} = 11,25$ арш. 583. $\frac{2ap}{a+b+c} = 7\frac{2}{3}$ фута, $\frac{2bp}{a+b+c} = 4,8$ фута и $\frac{2cp}{a+b+c} = 3\frac{8}{15}$ фут. 584. Основания $= \frac{ap}{p-p'} = 6,34$ саж. и $\frac{ap'}{p-p'} = 3,64$ саж. 585. $\frac{ms}{m+n} = 27\frac{8}{11}$ арш. и $\frac{ns}{m+n} = 22\frac{8}{11}$ арш.
586. $\frac{md}{m-n} = 8$ саж. и $\frac{nd}{m-n} = 6$ саж. 587. $\frac{1}{2}\sqrt{d^2-b^2} = 2$ арш. 588. $2\sqrt{r^2-a^2} = 8$ метр. 589. $\sqrt{a^2+4b^2} = 2,23$ саж. 590. $\sqrt{a(a+2r)} = 8,06$ аршина. 591. $\sqrt{a^2-b^2} = 3,0298$ арш. 592. $\sqrt{b^2-r^2} = 1,8$. 593. $r = 0,4$ арш. 594. $r\sqrt{2} = 5,65$ фута. 595. $r\sqrt{2-V^3} = 1,03$ метра. 596. $r\sqrt{2+V^3} = 7,72$ сажени. 597. $r\sqrt{3} = 4,04$ дюйма. 598. $\sqrt{a^2-4b^2+4b\sqrt{4r^2-a^2}} = 4,38$ вер. 599. $\frac{m}{m+n} \cdot 180^\circ = 100^\circ$ и $\frac{n}{m+n} \cdot 180^\circ = 80^\circ$. 600. $\frac{ab}{c} = 12\frac{1}{18}$ арш. 601. $\frac{b \pm \sqrt{b^2-4c(a-c)}}{2} = 3,4$ фута и $0,7$ фута. 602. $(m+n)\sqrt{\frac{ab}{mn}} = 20$ саж. 603. $\frac{d}{\sqrt{2}} = 0,565$ метра.
604. $\frac{1}{2}d = 0,4$ арш. 605. $r\sqrt{3} = 2,88$ фута. 606. $\sqrt{2br} = 2,236$ метра. 607. $\frac{a^2+4c^2}{8c} = 7\frac{2}{3}$ арш. 608. $\frac{a(m+n)}{\sqrt{m(m+2n)}} = 0,35$ арш. 609. $2\sqrt{b(d-b)} = 4,109$ арш. 610. $\frac{1}{2}(\sqrt{4b^2+3a^2}+b) = 2,5$ дюйма. 611. $\frac{1}{2}a\sqrt{m+1} = 0,9$ фута. 612. $\frac{1}{5}(b+\sqrt{b^2+8a^2}) = 2,35$ арш. 613. $a\sqrt{c:b} = 7,745$ фута. 614. $\sqrt{2a^2+b^2+2a\sqrt{a^2+2b^2}} = 3,46$ саж. 615. $\frac{a(a-b)}{c} = 3,4375$ фута. 616. $\sqrt{(a+b)b} = 3\frac{1}{2}$ арш. 617. $\frac{b^2}{a} = 6\frac{4}{9}$ саж. 618. $\frac{ac}{b} = 1\frac{2}{3}$ метра.
619. $\frac{as}{a+b} = 1\frac{5}{19}$ метра и $\frac{bs}{a+b} = 6\frac{14}{19}$ метра. 620. $\frac{ns}{m+n} = 1$ арш. и $\frac{ms}{m+n} = 1,4$ арш. 621. $\frac{a^2}{2a-b} = 3,125$ дюйма, $\frac{a(b-a)}{2a-b} = 0,625$ дюйма. 622. $\frac{ab+bc-a^2}{b-a} = 14\frac{11}{18}$ арш. и $\frac{b^2-ab+ac}{b-a} = 12\frac{7}{9}$ арш.
623. Отрѣзки одной: $\frac{mb^2}{ma+nb} = 2\frac{1}{27}$ арш. и $\frac{ma^2+nab-mb^2}{ma+nb} = 6\frac{26}{27}$ арш.; отрѣзки другой: $\frac{mab}{ma+nb} = 3\frac{24}{27}$ арш. и $\frac{nb^2}{ma+nb} = 1\frac{19}{27}$ арш. 624. $\frac{1}{2}(\sqrt{c^2+8a^2+8ab}-c) = 1,7$ арш. 625. $\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4ac+4c^2}-b) = 1,24$ арш. 626. $\frac{1}{5}(a+\sqrt{a^2+4b^2}) = 6,85$ фута. 627. Касат. $= \frac{a(m+\sqrt{m^2+4n^2})}{2n} = 3$ фут.; сѣк. $= \frac{a(m^2+2n^2+m\sqrt{m^2+4n^2})}{2n^2} = 6$ фут. 628. Касат. $= \frac{1}{2}(2a+b+\sqrt{8a^2+8ab+b^2}) = 8,34$ сажени; сѣкующая $= \frac{1}{2}(4a+b+\sqrt{8a^2+8ab+b^2}) = 10,84$ сажени. 629. $\frac{m(a+b)}{m+n} = 2,54$ метра и $\frac{n(a+b)}{m+n} = 1\frac{2}{13}$ метра. 630. $\frac{(m+n)b+\sqrt{(m+n)(mb+nb+4ma)b}}{2(m+n)} = 4\frac{1}{2}$ арш. и

$$\frac{(m+n)(2a+b)+\sqrt{(m+n)(mb+nb+4ma)b}}{2(m+n)}=4\frac{59}{60} \text{ арш. } 631. \frac{a^2+b^2-r^2}{2(a\pm r)}.$$

$$632. \frac{br}{a+r-b} \quad 633. \sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}+\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}.$$

$$634. \frac{1}{a}\sqrt{(R+r+a)(R+r-a)(R+a-r)(r+a-R)}. \quad 635. \text{ Если внешняя касательная, то искомое расстояние } = \frac{ar}{R-r}, \text{ а если внутренняя, то искомое}$$

$$\text{расстояние } = \frac{ar}{R+r}. \quad 636. \text{ Если внешняя касательная, то длина ее равна } \sqrt{a^2-(R-r)^2}, \text{ а если внутренняя, то длина ее равна } \sqrt{a^2-(R+r)^2}.$$

$$637. r+\frac{r^2}{R}, \text{ гдѣ } r < R. \quad 638. 4R: \left[\left(\frac{r}{r_1} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{r_1}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

$$639. \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}=5,93 \text{ арш. и } \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}=6,56 \text{ арш.}$$

$$640. AE=\frac{a(ad+bc)}{2(a^2-c^2)} \text{ и } BE=\frac{a(ab+cd)}{2(a^2-c^2)}.$$

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ. 1. $\angle QAO + \angle QCO = \frac{1}{2}A + 2d - \frac{1}{2}C = 2d$, такъ какъ, по заданію, $\angle A = \angle D = \angle C = \dots$

2. Въ 6-угольникѣ $ABCDEF$ равнодѣлящія $\angle \angle ABC$ и BCD пересѣкаются въ O ; проведемъ OA , OD , OE и OF . По заданію $BA=BC$; $\angle ABO=\angle CBO$, а потому $\angle OAB=\angle OCB$ и слѣд. $\triangle AOB=\triangle BOC$. Но $\angle FAB=\angle DCB$, а потому $\angle OAF=\angle OCD$ и $\angle OCD=\angle OCB=\angle OAB$; слѣд. $\angle OAF=\angle OAB$, т.-е. OA будетъ равнод. $\angle FAB$. Также OD , OE и OF равнод. $\angle D$, E и F и $\triangle \triangle BOC$, COD , EOF и AOF равны; слѣдовательно, перпендикуляры изъ O на стороны 6-угольника равны, а потому можно вписать кругъ въ 6-угольн. $ABCDEF$.

3. G , H , K и L точки касанія сторонъ BC , CD , DE и EA . Такъ какъ AF и AL касательныя къ кругу изъ A , то $AF=AL$. Также $BF=BG$, $CH=CG$, $DH=DK$, $EL=EK$ и $AB+AE+CD=AF+FB+AL+LE++CH+HD=AF+BG+AF+EK+CG+DK=2AF+BC+DE$; откуда $2AF=(AB+AE+CD)-(BC+DE)$.

4. Въ правильномъ 5-угольникѣ $ABCDE$ проведемъ діагонали AC и AD . Описавъ окружность около этого многоугольника, найдемъ, что дуги BC , CD и DE равны, а слѣд. $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$.

5. Каждый изъ пяти этихъ угловъ $=\frac{2}{5}d$, а потому ихъ сумма $=5 \cdot \frac{2}{5}d=2d$.

6. Въ пятиугольникѣ $ADCDE$, стороны AB , BC , CD , DE и AE равны и $\angle A=\angle B=\angle C$. Проведемъ діагонали AC , BD и BE ; означимъ буквою F точку пересѣченія AC съ BE . Тогда $\triangle ABE=\triangle ABC$ и слѣд. $AC=BE$, $\angle ACB=\angle AEB$ и $\angle BAC=\angle ABE$. Поэтому $\triangle AFB$ будетъ равнобедренный и $AF=BF$; также $AC-AF=BE-BF$ или $CF=EF$. $\triangle DFE=\triangle DFC$ и потому $\angle FED=\angle FCD$; сложивъ это равенство съ равен-

ствомъ: $\angle AEB = \angle ACB$, найдемъ: $\angle E = \angle C$. $\triangle BAE = \triangle BCD$; откуда $BD = BE$ и $\angle BDC = \angle BEA$. Но $\triangle DBE$ равнобедренный и потому $\angle BDE = \angle BED$; сложивъ это равенство съ предыдущимъ, получимъ $\angle D = \angle E$.

7. Каждый изъ \angle пятиугольника $= \frac{2}{5}d$, а потому $\angle FBC = \frac{2}{5}d = \angle FCB$. Слѣд. $FC = FB$; $\angle ABF = \frac{2}{5}d = \angle AFB$, а потому $AF = AB$ и $AC = AB + BF$.

8. G середина $\cup CD$. $\cup AP + \cup CQ = \cup PQ$; $\angle PAF$ измѣряется $\frac{1}{2}\cup PQ$; $\angle PFA$ измѣряется $\frac{1}{2}(\cup AP + \cup QC) = \frac{1}{2}\cup PQ$, а потому $\angle PAF = \angle PFA$ и $PA = PF$; $\cup AP = \cup CG$, а потому $\angle PCA = \angle CAG$ и слѣд. $PC \parallel AG$. Также можно показать, что $AQ \parallel CO$. Слѣд. $AOCF$ будетъ параллелограммъ и $CF = AO$, а потому $PC = PF + FC = AP + AO$.

9. Въ прав. 5-угольн. $ABCDE$, диагонали AD и CE пересѣкаются въ точкѣ F ; $\triangle DEF \sim \triangle DAE$ и слѣд. $DF : AE = DE : AD$ или, такъ какъ $AE = DE = AF$, то $DF : AF = AF : AD$.

10. $ABCDE$ прав. 5-угольникъ; F точка пересѣченія AC и BD . Слѣд. (IV, 9) $AF^2 = AC \cdot CF = AB^2$. Имѣемъ: $AC^2 = AC \cdot AC = AC(AF + FC) = AC \cdot AF + AC \cdot FC = AC \cdot AB + AB^2$ или $AC^2 - AB^2 = AC \cdot AB$.

11. Въ прав. 5-угольникѣ $ABCDE$ соединимъ A съ C , C съ E , E съ B , B съ D и D съ A ; получимъ многоугольникъ $A'B'C'D'E'$. $\triangle \triangle AC'E$, $EB'D$, $DA'C$,... равны между собою и равнобедренные; слѣд. $\angle AC'E = \angle EB'D = \angle DA'C = \dots$ или $\angle D'C'B' = \angle C'B'A' = \dots$. Также $BE = AD = EC = \dots$ и, слѣдовательно, $BE - BD' - EC' = AD - AC' - DB' = EC - EB' - CA' = \dots$ или $D'C' = C'B' = B'A' = \dots$. Отсюда заключаемъ, что пятиугольникъ $A'B'C'D'E'$ будетъ правильнѣй.

12. Очевидно, можно сложить такіе равные многоугольники, у которыхъ уголъ при вершинѣ содержится кратное число разъ въ $4d$, потому что сумма угловъ при точкѣ равна $4d$. Къ этимъ многоугольникамъ принадлежатъ правильные треугольники, шестиугольники и квадраты.

13. У квадрата углы прямые, а у прав. 8-уг. $= \frac{5}{2}d$; но $d + \frac{5}{2}d + \frac{5}{2}d = 4d$, а потому эти многоугольники надо складывать такъ, чтобы при вершинѣ былъ одинъ квадратъ и два 8-угольника. Можно такимъ же образомъ сложить правильн. \triangle и два правильн. 12-угольника, потому что каждый изъ угловъ \triangle равенъ $\frac{2}{3}d$, а 12-угольн. равенъ $\frac{5}{3}d$; а $\frac{2}{3}d + \frac{5}{3}d + \frac{5}{3}d = 4d$. Можно такимъ же образомъ сложить правильнѣй 10-угольникъ и два правильнѣй 5-угольника, потому что $\frac{5}{5}d + \frac{5}{5}d + \frac{5}{5}d = 4d$.

14. $\triangle ABC$ можно дать положеніе $\triangle A'B'C'$ вращеніемъ около O . Слѣд. $\angle ANA' = \angle APA' = \angle AOA'$, а потому можно описать окружность около $ANOPA'$; тогда $\angle NPO = \angle NAO = \angle CAO = \angle ACO$. Также $\angle MPO = \angle MBO = \angle CBO = \angle BOC$. Слѣд. $\angle NPM = \angle BCA$. Также $\angle PMN = \angle CAB$ и $\angle MNP = \angle ABC$.

15. Стороны данного многоугольника равны, а потому и дуги, соответствующія этимъ сторонамъ, также равны. Слѣд. каждый изъ угловъ многоугольника измѣряется окружностью безъ двухъ дугъ, соответствующихъ бокамъ многоугольника, т.-е. всѣ углы многоугольника имѣютъ одинаковую мѣру, а потому равны.

16. Возьмемъ для примѣра правильнѣй описанный 5-угольн. $ABCDE$, въ кот. $AB = BC = CD = DE = EA$. Пусть F, G, H, K и L — точки прикос-

новения боковъ многоугольника къ кругу; O — центръ круга. По свойству касательныхъ, $AL=AF$ и, слѣдовательно, $EL=BF=BG=EK$; $CG=CH$, а потому $BG=DH=DK$ или $EK=DK$, т.-е. K — середина ED . Отсюда выходитъ, что F — середина AB , G — середина BC и т.д. Прямая OA , OB , OC ,... будутъ равнодѣлящими $\angle A, B, C$...; тогда изъ $\triangle AOB$, въ которомъ $AF=BF$ и $FO \perp AB$, найдемъ, что $\angle OAB=\angle ABO$ или, что то же, что $\angle A=\angle B$. Также докажемъ, что $\angle B=\angle C$ и т.д.

Примѣчаніе. Когда многоугольникъ — четнаго числа сторонъ, то не всегда точки касанія будутъ серединами боковъ.

17. Для доказательства положимъ, что вписанъ въ кругъ 7-угольникъ $ABCDEFG$, въ кот. $\angle A=\angle B=\angle C=...$; $\angle A$ измѣрится $\frac{1}{2}(\cup BC + \cup CG)$, а $\angle B$ измѣрится $\frac{1}{2}(\cup AG + \cup CG)$; поэтому $\cup BC = \cup AG$. Другими словами, дуги чрезъ одну равны между собою, т.-е. $AG=BC=DE=FG=AB=CD=EF$; отсюда видимъ, что и хорды AB, BC, CD ,... равны. Слѣдовательно, многоугольникъ $ABCDEFG$ будетъ правильнѣй.

Примѣчаніе. Когда многоугольникъ — четнаго числа сторонъ, то нельзя показать, что всѣ дуги, соответствующія бокамъ многоугольника, равны.

18. Около круга описанъ многоугольникъ $ABCDE...$, въ кот. $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=...$; K, L, M ,... точки касанія AB, BC, CD ,... къ кругу; O — центръ круга. Прямая OA, OB, OC ,... равнодѣлящая $\angle A, B, C$,... $\triangle AOK=\triangle BOK$ (OK общая и $\angle OAK=\angle OBK$, какъ половины равныхъ $\angle A$) и потому $AK=BK$. $\triangle KOB=\triangle LOB$ и слѣд. $BK=BL=CL$ и т.-д. Отсюда выходитъ, что $AB=BC=CD=...$, т.-е. многоугольникъ $ABCDE...$ будетъ правильнѣй.

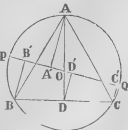
19. Пусть O центръ вписаннаго круга въ многоугольникъ. Тогда \perp изъ O на всѣ его стороны будутъ равны; слѣд. стороны многоугольника, какъ хорды, равноудаленныя отъ центра, будутъ равны. Въ многоугольникъ углы будутъ равны, такъ какъ они опираются на равныя дуги, а потому многоугольникъ будетъ правильнѣй.

20. Пусть ABC равносторонній \triangle и BD его высота. На BC , какъ діаметръ, опишемъ окружность, кот. пересѣчетъ AB въ E и AC въ D . Тогда $BE=ED=DC=\frac{1}{2}BC$, и слѣд. полуокружность BC будетъ раздѣлена въ E и D на три равныя части. Поэтому BD будетъ бокомъ правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругъ діаметра, равнаго BC .

21. ABC — правильнѣй \triangle (фиг. 74), вписанный въ кругъ O . Проведемъ діаметръ PQ и на него опустимъ \perp AA', BB' и CC' ; опустимъ \perp AD на BC и \perp DD' на PQ . Тогда $B'D'=C'D'$, или $OB'+OD'=OC'-OD'$ или $OB'+2OD'=OC'$. Но $OA=2OD$ и $\triangle AOA' \sim \triangle DOD'$; слѣд. $OA'=2OD'$ и $OB'+OA'=OC'$.

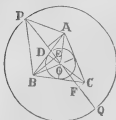
22. Пусть O — центръ круга (фиг. 75), вписаннаго въ правильнѣй $\triangle ABC$. Опишемъ окружность радіусомъ, неравнымъ OA , на кот. возьмемъ точку P . Опустимъ \perp AD, BE и CF

Фиг. 74.



на диаметръ PQ ; тогда изъ $\triangle APO$, BPO и CPO имѣемъ: $AP^2 = OP^2 + OA^2 - 2OP \cdot OD$, $BP^2 = OP^2 + OB^2 - 2OP \cdot OE$ и $CP^2 = OP^2 + OC^2 + 2OP \cdot OF$.

Фиг. 75.



Сложивъ почленно эти равенства, получимъ: $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3OP^2 + 3OA^2 - 2OP(OD + OE - OF)$; но $OD + OE = OF$ (IV, 21), а потому $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3OP^2 + 3OA^2$.

23. По 22-й теоремѣ имѣемъ: $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3OP^2 + 3OA^2$ и $A'P^2 + B'P^2 + C'P^2 = 3OP^2 + 3OA'^2$; но вторыя части въ этихъ равенствахъ одинаковы, а потому и первыя равны между собою.

24. Положимъ, что въ A , B , C , D , E , F , G , H , K и L окружность раздѣлена на 10 равныхъ частей. Соединивъ A съ D , D съ G , G съ L , L съ C , C съ F , F съ K , K съ B , B съ E , E съ H и H съ A , получимъ правильный вѣдчатый десятиугольникъ, а соединивъ A съ B , B съ C , C съ D , ..., получимъ правильный вписан. десятиугольникъ. Проведемъ радиусъ OB , кот. пересѣчетъ AD въ M ; въ $\triangle AMB$ и MOD имѣемъ: $\angle ABM = \angle AMB$ и $\angle DMO = \angle DOM$, какъ измѣряющіеся равными дугами, а потому $AM = AB$ и $DM = DO$, а слѣд. $AD = AM + DM = AB + OD$.

25. $\triangle AOD = \triangle DOC$; слѣд. $AD = CD$ и $\triangle ACD$ будетъ равнобедренный, такъ же, какъ и $\triangle ABC$. Эти \triangle будутъ подобны, потому что имѣютъ общій $\angle CAB$. Въ $\triangle AOB$ уголъ $ABO = \angle BAO = 54^\circ$ и $\angle AOB = 72^\circ$; слѣдовательно, въ $\triangle BOD$ уголъ $DBO = 54^\circ$ и $\angle DOB = 72^\circ - 18^\circ = 54^\circ$, то-есть $\triangle AOB \sim \triangle BOD$. Изъ подобія $\triangle ACD$ и ABC , $\triangle AOB$ и BOD , найдемъ, что $AC : AB = AD : AC$ или $AC^2 = AD \cdot AB$ и $AB : BO = BO : BD$ или $BO^2 = AO^2 = AB \cdot BD = AB(AB - AD)$; откуда $AO^2 = AB^2 - AD \cdot AB = AB^2 - AC^2$ или $AO^2 + AC^2 = AB^2$.

26. Касательныя къ кругу O въ точкахъ A и B пересѣкаются въ M , а касательныя въ точкахъ A и C въ N . $\angle AOB = \frac{2}{3}d$; слѣд. $\angle MNO = \frac{1}{3}d = \frac{1}{3}\angle AOB = \angle MOB$; поэтому $OM = MN$. Пусть P середина MO ; $\angle OBM$ прямой, а потому $PO = PB = PM$; слѣд. $\angle PBM = \angle PMB = \frac{2}{3}d$ и $\angle MPB = \frac{2}{3}d = \angle MBP$, а потому $MB = MP$ и P на окружности M . Но $NA = NM + MA = MO + MP = 3MP = 3MA$, а потому диаметръ окружн. N равенъ 3 диаметрамъ окружн. M .

27. Пусть O будетъ центръ окружности, вписанной въ многоугольникъ $ABCDE$. Опишемъ окружность около $\triangle BOC$; тогда $\angle ABO = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BCD = \angle BCO$, т.-е. AB касательная къ окружности BOC . Также CD касательная къ окружности BOC .

28. $OE = DE - OD = AD - OD$, а $OE^2 = AD^2 - 2AD \cdot OD + OD^2 = OA^2 + OD^2 - 2AD \cdot OD + OD^2 = OF^2 + 2OD^2 - 2AD \cdot OD = OF^2 - 2OD(AD - OD) = OF^2 - OF \cdot OE$, потому что $2OD = OC = OF$. Отсюда $OE^2 = OF(OF - OE) = OF \cdot EF$ или $OE : EF = EF : OE$, т.-е. въ точкѣ E радиусъ OF раздѣленъ въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, и OE есть большая его часть; поэтому OE равна боку правильного вписаннаго 10-угольника въ кругѣ O . Изъ равенства же $AE^2 = AO^2 + EO^2$ заключаемъ (IV, 25), что AE будетъ бокъ правильнаго 5-угольника, вписаннаго въ томъ же кругѣ.

29. Пусть $A_1A_2=A_2A_3=\dots=a$ и $A_1A_3=A_2A_4=\dots=d$. Положимъ, что въ данномъ многоугольникѣ напр. 7 сторонъ. Тогда $\diamond PA_1A_2A_3$ можетъ быть вписанъ въ кругъ, а потому $PA_1 \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot PA_3 = PA_2 \cdot A_1A_3$ или

$$(PA_1 + PA_3)a = PA_2 \cdot d.$$

Также

$$(PA_3 + PA_5)a = PA_4 \cdot d \text{ и } (PA_2 + PA_4)a = PA_3 \cdot d;$$

$$(PA_5 + PA_7)a = PA_6 \cdot d \text{ и } (PA_4 + PA_6)a = PA_5 \cdot d;$$

$$(PA_2 - PA_7)a = PA_1 \cdot d \text{ и } (PA_6 - PA_1)a = PA_7 \cdot d.$$

Отсюда

$$\{PA_2 + PA_4 + PA_6 - (PA_1 + PA_3 + PA_5 + PA_7)\}d =$$

$$= 2a\{PA_1 + PA_3 + PA_5 + PA_7 - (PA_2 + PA_4 + PA_6)\};$$

$$\text{или } \{PA_2 + PA_4 + PA_6 - (PA_1 + PA_3 + PA_5 + PA_7)\}(d+2a) = 0.$$

Но $d+2a > 0$, а потому другой множитель равенъ 0, т. е.

$$PA_1 + PA_3 + PA_5 + PA_7 = PA_2 + PA_4 + PA_6.$$

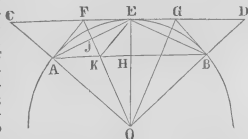
Употребляя такой же приемъ, покажемъ, что это справедливо для всякаго правильнаго многоугольника нечетнаго числа сторонъ.

30. AB (фиг. 76) — бокъ правильн. вписан. многоуг. о n сторонахъ.

Опустимъ $\perp OH$ на AB , кот. пересѣчетъ окружн. въ

E ; чрезъ E проведемъ касательную къ кругу до пересѣченія съ прямыми OA и OB въ C и D . Хорды AE и BE будутъ сторонами правильнаго вписаннаго многоугольника о $2n$ сторонахъ; а если проведемъ равнодѣлящія $\angle \angle AOE$ и BOE до пересѣченія съ CD въ F и

Фиг. 76.



G , то CF будетъ бокъ прав. описан. многоугольника о $2n$ сторонахъ.

Тогда $p = n \cdot AB$, $P = n \cdot CD = 2n \cdot CE$, $p' = 2n \cdot AE$, $P' = 2n \cdot FG = 4n \cdot EF$.

Такъ какъ OF равнодѣлящая $\angle COE$ и $AB \parallel CD$, то $CF : EF = OC : OE = OC : OA = CD : AB$; откуда $(CF + EF) : EF = (CD + AB) : AB$ или $CE : EF = (AB + CD) : AB$. Умноживъ члены перваго отношенія на $4n$, а втораго на n , найдемъ: $4nCE : 4nEF = (nAB + nCD) : nAB$ или $2P : P' = (p + P) : p$; откуда $P' = \frac{2Pp}{p+P}$. Пусть J точка пересѣченія AE съ OF . $\triangle E J F \sim \triangle A E H$

и слѣд. $EJ : AH = EF : AE$ или $\frac{1}{2}AE : AH = EF : AE$. Умноживъ всѣ члены на $4n$, получимъ $p' : 2p = P' : 2p'$ или $p'^2 = P'p$; откуда $p' = \sqrt{P'p}$.

31. Пусть p и P означаютъ периметры вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ того же числа сторонъ; p' и P' — периметры вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ съ двойнымъ числомъ сторонъ. Тогда $p : P = m$ и $p' : P' = m'$ или $p = mP$ и $p' = m'P'$; а мы знаемъ (IV, 30), что $P' = \frac{2Pp}{p+P}$ и $p' = \sqrt{P'p}$ или $P' = \frac{2P \cdot mP}{P+mP} = \frac{2mP}{m+1}$ и $m'P' = \sqrt{P' \cdot mP}$ или

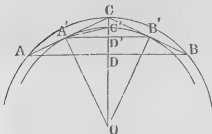
$$m'^2 P' = mP. \text{ Замѣнивъ } P' \text{ его величиною, найдемъ: } m' = \sqrt{\frac{m+1}{2}}.$$

32. P, P' и P'' периметры правил. описан. многоугольн. о n , $2n$ и $4n$ сторонахъ. Тогда (IV, 30) $P' = \frac{2Pp}{P+p}$, $p'^2 = P'p$, $P'' = \frac{2P'p'}{P'+p'}$ и $p''^2 = P''p'$; отсюда $P''^2 = \frac{2P'p'^2}{P'+p'}$ и $P' = \frac{p'^2}{p}$. Замѣнивъ P' его величиною, найдемъ: $p''^2 = \frac{2p'^3}{p+p'}$.

Замѣчаніе. Если въ данный кругъ впишемъ неограниченное число правил. многоугольн., имѣющихъ вдвое болѣе сторонъ предшествующаго и означимъ ихъ периметры черезъ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{k-1}, P_k, P_{k+1}, \dots$, то (IV, 32), $(P_{k+1})^2 = \frac{2P_k^3}{P_k + P_{k-1}}$ или $\left\{ \frac{P_{k+1}}{P_k} \right\}^2 = \frac{2P_k}{P_{k-1}} : \left\{ \frac{P_k}{P_{k-1}} + 1 \right\}$. Если отношеніе периметра P_{k+1} къ периметру P_k будетъ m_k , то $m_k = \sqrt{\frac{2m_{k-1}}{m_{k-1} + 1}}$.

33. AB сторона правил. многоуг.; R радіусъ описан., а $OD = r$ радіусъ вписан. круга. Продолжимъ OD до пересѣченія съ AB въ C ; опустимъ $\perp \perp OA'$ и OB' на AC и BC . Тогда $A'B' = \frac{1}{2}AB$ и $\angle A'OB' = \frac{1}{2}\angle AOB$; слѣд. OA' будетъ радіусъ R' описан. круга около второго многоуг. и $OD' = r' =$ его апогема. Точка D' середина CD и слѣд. $r' = OC - CD' = R - DD'$ и $r' = OD + DD' = r + DD'$; откуда $2r' = R + r$, а $r' = \frac{1}{2}(R + r)$. Изъ $\triangle A'OC$

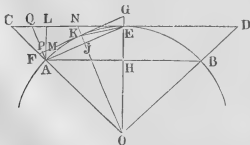
Фиг. 77.



найдемъ, что $OA'^2 = OC \cdot OD'$ или $R'^2 = Rr'$; откуда $R' = \sqrt{Rr'}$.

34. Пусть апогеи этихъ многоугольниковъ будутъ соответственно r, r' и r'' . Тогда (IV, 33) $r' = \frac{1}{2}(R + r)$, $R' = \sqrt{Rr'}$, $r'' = \frac{1}{2}(R' + r')$ и $R'' = \sqrt{R'r''}$; отсюда $R''^2 = R' \cdot r'' = R' \cdot \frac{1}{2}(R' + r')$. Но изъ равенства $R' = \sqrt{Rr'}$ выходитъ, что $r' = \frac{R'^2}{R}$, а потому $R''^2 = \frac{R'}{2} \left[R' + \frac{R'^2}{R} \right] = \frac{R'^2(R + R')}{2R}$.

Фиг. 78.



35. Пусть C' (фиг. 77) означаетъ точку пересѣченія OC съ дугою $A'B'$; тогда $CD = OC - OD = R - r$ и $C'D' = OC' - OD' = R' - r'$. Прямая $A'C'$ будетъ равнодѣляющею $\angle CA'D'$ въ $\triangle A'D'C$, въ которомъ $A'D' < A'C$; поэтому $C'D' < \frac{1}{2}CD$, а $CD' = \frac{1}{2}CD$ и слѣдоват. $C'D' < \frac{1}{2}CD$ или $R' - r' < \frac{1}{2}(R - r)$.

36. AB и CD (фиг. 78) — бока правил. вписан. и описан. многоугольн. о n сторонахъ; AE бока

правил. вписан. многоугол. о $2n$ сторонахъ. Чрезъ K , середину дуги AE , проведемъ касательную къ кругу до пересѣченія съ прямыми OA и OE въ F и G . Тогда FG будетъ бокъ правильного описан. многоугольника о $2n$ сторонахъ и слѣдовательно,

$$p = n \cdot AB = 2n \cdot AH, P = 2n \cdot CE, p' = 2n \cdot AE \text{ и } P' = 2n \cdot FG.$$

Поэтому достаточно показывать, что $FG - AE < \frac{1}{4}(CE - AH)$. Проведа прямую $AML \parallel OE$, найдемъ: $FM = FG - AE$, $CL = CE - AH$, а потому достаточно показать, что $FM < \frac{1}{4}CL$. Хорда KE есть равнодѣлящая $\angle AEC$ и $EJ < EN$, а потому $JK < \frac{1}{2}JN$. Проведа прямую $APQ \parallel ON$, увидимъ, что $JN = \frac{1}{2}AQ$ и слѣд. JK или $AP < \frac{1}{4}AQ$. Поэтому, прямая, проведенная въ $\triangle ACL$ чрезъ точку P между боками $\angle CAL$, параллельно CL , будетъ менѣе $\frac{1}{4}CL$; но прямая FM равно наклонена къ бокамъ этого же угла, а потому она менѣе проведенной прямой и слѣдовательно менѣе $\frac{1}{4}CL$.

37. Окружность болѣе периметра вписан. шестиугольника и менѣе периметра описан. около него квадрата, т. е. $2\pi r > 6r$ и $< 8r$ или $\pi > 3$ и < 4 .

38. Пусть p и P периметры вписан. и описан. правил. многоугольн. о n сторонахъ около круга радіуса $r=1$; P' периметръ правил. описаннаго многоуг. около того же круга о $2n$ сторонахъ. Пусть AB сторона правильнаго вписан. многоуг. и O центръ круга. Проведемъ діаметръ $DOD' \perp AB$ и чрезъ D и B проведемъ касательныя къ кругу до встрѣчи въ F . Пусть E будетъ точка пересѣченія AB съ DD' . Такъ какъ DF половина стороны многоуг. P' , а OD и OE апогеи многоугольниковъ о n сторонахъ, то

$$\frac{P}{p} = \frac{OD}{OE} \text{ или } \frac{P-p}{P+p} = \frac{OD-OE}{OD+OE} = \frac{DE}{D'E}.$$

Уголъ $DA'D$ прямой .. слѣд. $\frac{AD^2}{AD'^2} = \frac{DE}{D'E}$; поэтому $\frac{P-p}{P+p} = \left(\frac{AD}{AD'}\right)^2$; $\triangle DAD' \sim \triangle FOD$; слѣд. $\frac{AD}{AD'} = \frac{DF}{DO}$. Но $DF = \frac{P'}{4n}$ и потому $\frac{P-p}{P+p} = \left(\frac{P'}{4n}\right)^2$. Также (IV, 30) $P' = \frac{2Pr}{P+p}$, а потому $P' - p = p \cdot \frac{P-p}{P+p} = p \cdot \left(\frac{P'}{4n}\right)^2$ или $P' - p = a \cdot \frac{P^2}{16n}$.

Когда $n=3$, то $P' = 4\sqrt{3}$, $\frac{P^2}{16n} = \frac{48}{48} = 1$ и $P' - p = a$; откуда $P' = (n+1)a$.

Когда же $n > 3$, то периметръ P' уменьшается, а слѣд. и дробь $\frac{P^2}{16n}$ уменьшается. Поэтому, для $n > 3$, $P' - p < a$, или $P' < p + a$ или $P' < (n+1)a$. Но окружность менѣе P' , а потому окружность менѣе $(n+1)a$.

39. Примемъ радіусъ круга за единицу. Тогда периметры квадрата и восьмиугольника, вписанныхъ въ этотъ кругъ, будутъ $p_1 = 4\sqrt{2}$ и $p_2 = 8\sqrt{2-\sqrt{2}}$. По формулѣ (IV, 32) найдемъ:

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = m_1, \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = m_2, \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = m_3, \dots$$

Пусть p_k означаетъ периметръ правильнаго вписаннаго многоуг. о 2^{k+1}

сторонахъ. Тогда $p_k = p_1 \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_3}{p_2} \dots \frac{p_k}{p_{k-1}}$ или $p_k = p_1 \cdot m_1 \cdot m_2 \dots m_{k-1}$. Слѣ-

довательно $p_k = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$

Но предѣлъ для p_k будетъ окружность или 2π , а потому

$$\frac{\pi}{2} = \text{предѣлу } \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \dots$$

40. Проведемъ въ данномъ кругѣ два взаимно-перпендикулярные діаметра AB и CD . $\diamond ABCD$ будетъ искомый квадратъ.

41. Изъ точки A окружн. опишемъ дугу радіусомъ R , кот. пересѣчетъ окружн. въ B и F . Изъ B опишемъ дугу радіусомъ R , кот. пересѣчетъ окружн. въ C и т. д. Тогда $ABCDEF$ будетъ искомый шестиугольникъ.

42. Изъ произвольной точки A данной окружности, опишемъ дугу радіусомъ R , кот. пересѣчетъ окружность въ B и C . Хорда BC будетъ бокомъ искомага треугольника. Дальнѣйшее построение очевидно.

43. Раздѣлимъ радіусъ даннаго круга въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (III, 403) и станемъ послѣдовательно описывать дуги, какъ въ 41 задачѣ. Полученныя точки на окружности будутъ вершинами искомага десятиугольника.

2) Построение можно сдѣлать на основаніи 28-й теоремы этого отдѣла.

44. 1) Построимъ сторону правильнаго десятиугольника, вписан. въ данн. кругѣ, кот. означимъ буквою a . Изъ какой-либо точки A окружности опишемъ дугу радіусомъ a , кот. пересѣчетъ окружн. въ B и C . Прямая BC будетъ бокомъ искомага пятиугольника. Построение очевидно.

2) Можно построение сдѣлать на основаніи 28-й теоремы этого отдѣла.

3) Проведемъ два взаимно-перпендикулярные діаметра AOB и COD . Въ A и B проведемъ касательныя AX и BY къ кругу, въ противоположныя стороны. Отъ A на AX отложимъ часть AE , равную $\frac{1}{2}$ радіусамъ даннаго круга, а на BY часть BF , равную радіусу. Проведемъ прямую EF , кот. пересѣчетъ окружн. въ M и N . Положимъ прямыя AM и AN пересѣкнуть CD въ K и L . Проведемъ чрезъ K и L прямую, параллельно AB , пересѣкающую окружн. въ точкахъ H и G , P и Q , получимъ искомый пятиугольникъ $PDQGH$.

45. Построимъ сторону правильнаго десятиугольника (IV, 43), кот. означимъ буквою a . Опишемъ изъ A дугу радіусомъ R , кот. пересѣчетъ окружн. въ B , и еще дугу радіусомъ a , кот. пересѣчетъ дугу AB въ C . Хорда BC будетъ бокомъ искомага 15-тиугольника. Построение очевидно.

46. Проведемъ въ кругѣ два взаимно-перпендикулярные радіуса OA и OB . Тогда хорда AB будетъ стороною квадрата, вписаннаго въ кругѣ. Дугу AB раздѣлимъ пополамъ въ C ; получимъ сторону AC искомага правильнаго 8-угольника, вписаннаго въ кругѣ. Раздѣлимъ пополамъ дугу AC въ D , получимъ сторону AD правильнаго шестнадцатиугольника и т. д.

47. Построение то же, что и въ предыд. задачѣ, только бокомъ AB долженъ быть стороною правильнаго шестиугольника, вписан. въ данномъ кругѣ.

48. Построение то же, что и въ 46-й задачѣ; только бокъ AB долженъ быть стороною правильного десятиугольника, вписаннаго въ кругѣ.

49. Построение то же, что и въ 46-й задачѣ; только бокъ AB долженъ быть стороною правильного пятнадцатугольника, вписаннаго въ кругѣ.

50. 1) Раздѣлимъ окружность данного круга на три равныя части въ точкахъ: A , B и C (IV, 42) и чрезъ нихъ проведемъ касательныя къ кругу, которыя въ пересѣченіи дадутъ искомый треугольникъ.

2) Касательныя къ кругу, проведенныя параллельно AB , BC и AC , составятъ правильный треугольникъ.

51. Раздѣливъ сперва окружность круга на четыре равныя части (IV, 40) поступаемъ далѣе такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ.

52. Построение то же, что въ 50-й задачѣ, только окружность надо раздѣлить на пять равныхъ частей (IV, 44).

53. Раздѣливъ окружность круга на шесть равныхъ частей (IV, 41), поступаемъ далѣе такъ же, какъ и въ 50-й задачѣ этого отдѣла.

54. Раздѣливъ окружность круга на восемь равныхъ частей (IV, 46), поступаемъ далѣе такъ же, какъ и въ 50-й задачѣ этого отдѣла.

55. Раздѣливъ окружность данного круга на десять равныхъ частей (VI, 43), поступаемъ далѣе такъ же, какъ и въ 50-й задачѣ этого отдѣла.

56. Раздѣлимъ окружность данного круга на пять равныхъ частей (IV, 44), въ точкахъ A , B , C , D и E . Точку A соединимъ съ C , C съ E , E съ B , B съ D и D съ A и получимъ искомый пятиугольникъ $ACEBD$.

57. Раздѣлимъ окружность данного круга на десять равныхъ частей (IV, 43) въ A , B , C , D , E , F , G , H , K и L и соединимъ A съ D , D съ G , G съ L , L съ C и т. д. Получимъ искомый многоугольникъ.

58. Изъ концовъ A и B данной прямой AB опишемъ дуги радіусомъ AB , которыя пересѣкнутся въ O ; и изъ O опишемъ окружность радіусомъ OA . Тогда AB будетъ стороною правильного шестиугольника, вписаннаго въ кругѣ. Построение очевидно.

59. На данной сторонѣ AB , какъ основаніи, построимъ равнобедренный $\triangle OAB$, въ которомъ $\angle AOB = \frac{1}{2}d$; изъ O опишемъ окружн. радіусомъ OA . Тогда AB будетъ бокомъ правильного восьмиугольника, вписаннаго въ кругѣ O . Построение очевидно.

60. Продолжимъ данную прямую AB на такую длину BC , чтобы $AB^2 = AC \cdot BC$ (III, 404), и на сторонѣ BC построимъ равнобедренный $\triangle BDC$, въ которомъ $DB = DC = AB$. Опишемъ окружность, проходящую чрезъ точки A , B и D , въ которой прямая AB будетъ стороною правильного пятиугольника, вписаннаго въ кругѣ. Дальнѣйшее построение очевидно.

61. Продолжимъ данную сторону AB на такую длину BC , чтобы $AB^2 = AC \cdot BC$ (III, 404), и на AB построимъ равнобедренный $\triangle AOB$, въ которомъ $OA = OB = AC$; изъ O опишемъ окружность радіусомъ OA . Прямая AB будетъ бокомъ правильного десятиугольника, вписан. въ этомъ кругѣ.

62. 1) Проведя чрезъ точки A , B , C ,... касательныя къ кругу, получимъ въ пересѣченіи искомый многоугольникъ.

2) Изъ O опустимъ \perp на стороны многоугольника и продолжимъ ихъ до пересѣченія съ окружностью въ M , N , P ,... Проведя чрезъ точки

$M, N, P...$ касательныя къ кругу, получимъ въ пересѣченіи искомый многоугольникъ.

63. Положимъ прямая BO пересѣчь окружность въ G . Тогда чрезъ G проведемъ касательную къ кругу, кот. пересѣчь бокъ AB въ M , а бокъ BC въ N . Соединивъ C съ O , проведемъ касательную чрезъ H , точку пересѣченія окружн. съ OC , кот. встрѣтитъ бокъ BC въ P , а бокъ CD въ Q и т. д. Многоугольникъ $MNPQ...$ будетъ искомый.

64. Въ правильномъ треугольникѣ ABC раздѣлимъ на три равныя части его стороны: BC въ E и F ; CA въ G и H ; AB въ K и L . Шестиугольникъ $EFGHKL$ будетъ искомый.

65. Въ $\square ABCD$ проведемъ діагонали, кот. пересѣкнутся въ E . Проведемъ прямую $FEH \parallel AD$, кот. пересѣчь AB и CD въ F и H , и еще прямую $KEG \parallel AB$, кот. пересѣчь BC и AD въ G и K . Проведемъ равнодѣлящія $\angle \angle AEF, FEB, BEG, GEC, CEN, HED, DEK$ и KEA , кот. пересѣкнутъ стороны квадрата въ точкахъ L, M, N, O, P, Q, R и S . Восьмиугольникъ $LMNOPQRS$ будетъ искомый.

66. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ.

67. Проведемъ діагонали AC и BD , кот. пересѣкнутся въ точкѣ O . Отложимъ на AB части AF и BE , равныя AO ; на BC части BH и CG , равныя AO ; на CD части CL и DK , равныя AO , и на AD части DM и AN , также равныя AO . Многоугольникъ $EFGHKLME$ будетъ искомый.

68. Вовставимъ \perp къ BE и на немъ отложимъ часть $BF=BE$; прямая FA пересѣчь BC въ G . Проведемъ прямую $GK \parallel BE$, до встрѣчи съ DE въ H , а изъ G и H проведемъ прямыя, перпендикулярныя къ BE , которыя пересѣкнутъ AB и AE въ K и L . $\diamond GHLK$ будетъ искомый квадратъ.

69. Пусть O центръ данного многоугольника. Опустимъ $\perp OC$ на AB и, продолживъ его, отложимъ часть $OD=OA$. Опустимъ $\perp OE$ и OF на прямыя AD и BD . Тогда EF будетъ бокъ искомаго многоугольника, а OE радіусъ круга, описаннаго около этого многоугольника.

70. Окружность, описанная радіусомъ вдвое большимъ радіуса данной окружности, будетъ искомая.

71. Окружность, описанная радіусомъ въ семь разъ меньшимъ радіуса данной окружности, будетъ искомая.

$$72. r=2\frac{1}{3}. \quad 73. r\sqrt{3}=2,08. \quad 74. r\sqrt{2}=0,7. \quad 75. \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)=4,94.$$

$$76. r\sqrt{2-V\sqrt{3}}=5,17. \quad 77. r\sqrt{2-V\sqrt{2}}=1,02. \quad 78. r\sqrt{2-V\sqrt{2+V\sqrt{2}}}=0,39.$$

$$79. \frac{1}{2}r(\sqrt{3+V\sqrt{5}}-\sqrt{5-V\sqrt{5}})=0,07. \quad 80. r\sqrt{\frac{1}{2}(5-V\sqrt{5})}=0,39.$$

$$81. \frac{2}{3}r\sqrt{3}=1,73. \quad 82. 2r\sqrt{3}=1,73. \quad 83. 2r(\sqrt{2}-1)=0,35.$$

$$84. \frac{2}{3}r\sqrt{25-10V\sqrt{5}}=1,95. \quad 85. 2r(2-V\sqrt{3})=1,14. \quad 86. 2r\sqrt{5-2V\sqrt{5}}=0,73.$$

$$87. \frac{1}{2}r=3\frac{7}{9}. \quad 88. \frac{1}{2}r\sqrt{2}=0,56. \quad 89. \frac{1}{2}r\sqrt{3}=1,59. \quad 90. \frac{1}{2}r\sqrt{2+V\sqrt{2}}=1,84.$$

$$91. \frac{1}{4}r\sqrt{10+2V\sqrt{5}}=3,8. \quad 92. \frac{1}{4}r\sqrt{6+2V\sqrt{5}}=0,32. \quad 93. a_6=15.$$

$$94. \frac{1}{2}a_2V\sqrt{3}=1,04. \quad 95. \frac{1}{2}a_4V\sqrt{2}=0,38. \quad 96. \frac{1}{2}a_{10}(V\sqrt{5}+1)=3,24.$$

$$97. a_6V\sqrt{1+V\sqrt{\frac{1}{2}}}=1,56. \quad 98. a_6V\sqrt{\frac{1}{10}(5+V\sqrt{5})}=0,17. \quad 99. \frac{1}{6}a_3V\sqrt{3}=1,04.$$

$$100. \frac{1}{2}b_8V\sqrt{3}=17,32. \quad 101. \frac{1}{2}b_{10}\sqrt{5+2V\sqrt{5}}=7,69. \quad 102. \frac{1}{2}b_6(V\sqrt{2}+1)=1,69.$$

103. $\frac{1}{2}b_5\sqrt{1+\sqrt{0,8}}=1,37$. 104. $2\alpha_3=11$. 105. $\alpha_4\sqrt{2}=1,18$.
 106. $\frac{2}{3}\alpha_6\sqrt{3}=2,07$. 107. $\alpha_8\sqrt{4-2\sqrt{2}}=5,41$. 108. $\alpha_{10}\sqrt{2-\sqrt{0,8}}=1,05$.
 109. $\frac{1}{2}\alpha_4\sqrt{2}=2,12$. 110. $\alpha_4\sqrt{1,5}=1,63$. 111. $\alpha_4\sqrt{6}=0,49$.
 112. $\alpha_4\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}=1,08$. 113. $\frac{1}{6}\alpha_3(\sqrt{15}-\sqrt{3})=0,76$. 114. $\frac{1}{2}b_4\sqrt{2-\sqrt{2}}=0,96$.
 115. $\alpha_4(2-\sqrt{2})=0,29$. 116. $\alpha_8\sqrt{2+\sqrt{2}}=7,39$. 117. $\alpha_8\sqrt{3+\frac{3}{2}\sqrt{2}}=9,05$.
 118. $\alpha_{12}\sqrt{2+\sqrt{3}}=5,79$. 119. $\frac{1}{2}b_3=0,04$. 120. $b_4(\sqrt{2}-1)=0,21$.
 121. $3b_6=8,5$. 122. $b_8(\sqrt{2}+1)=7,24$. 123. $\alpha_5\sqrt{\frac{1}{10}(5+\sqrt{5})}=0,11$.
 124. $\alpha_{10}\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}=3,8$. 125. $\frac{1}{5}b_5\sqrt{5}=0,89$. 126. $\alpha_6\sqrt{6-2\sqrt{5}}=0,76$.
 127. $\alpha_{10}\sqrt{3+\sqrt{5}-\frac{1}{3}\sqrt{50+22\sqrt{5}}}=0,5$. 128. $\frac{1}{5}r(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}-\sqrt{15})=$
 $=1,16$ саж. 129. $\frac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}}=0,38$ фута. 130. $r'=\frac{1}{2}(R+r)$; $R'=V\sqrt{Rr'}$.
 131. $p'\sqrt{\frac{2p'}{p+p'}}$. 132. $R'\sqrt{\frac{R+R'}{2R}}$. 133. Пусть r радиусъ даннаго круга
 и $r\left(1-\frac{4}{n}\right)=\delta$. Тогда найдемъ, что $AF=r\sqrt{2\left(1-\delta\cdot\frac{3r+\sqrt{3r^2-2\delta^2}}{3r^2+\delta^2}\right)}$
 При $n=3$, $AF=r\sqrt{3}$; при $n=4$, $AF=r\sqrt{2}$; при $n=6$, $AF=r$.
 134. 1) 5,024 саж.; 2) 11 арш.; 3) 8,36 метра; 4) 59,062 аршина.
 135. 1) $\frac{21}{40}$ арш.; 2) 1,59 фута; 3) 0,064 метра; 4) $1\frac{52}{80}$ саж. 136. 1) 2520 саж.;
 2) 4,59 фута. 137. 1) 1,88495; 2) $4\frac{64}{889}$ фута; 3) 0,7222 саж.; 4) 108,644 метра.
 138. 1) 10° ; 2) $112^\circ 30'$; 3) $51^\circ 25' 43''$. 139. 1) 8,4 фута; 2) 12 метр.; 3) 64 саж.
 140. 1) $25^\circ 12'$; 2) $111^\circ 6' 40''$; 3) $343^\circ 38' 14''$. 141. $57^\circ 17' 44''$, 81. 142. 1) 0,5236;
 2) 2,504, '3) 0,0002. 143. 1) 14,6607 фута; 2) $9\frac{87}{180}$ саж.; 3) 5,866 метра.
 144. $25^\circ 46' 22''$. 145. $mr=11$ саж. 146. 2,825 фут. 147. $r+r_1+r_2=8\frac{1}{8}$ фута.
 148. На $2\pi a=4\frac{5}{7}$ арш. 149. На $\frac{2\pi r(m-1)}{m}=15,072$ саж. 150. 35 саж.+3 фута.
 151. 1,98 верш. 152. $\frac{7}{22}$ арш. 153. $\frac{an}{m+n+p}=1,5$; $\frac{an}{m+n+p}=4,5$; $\frac{ap}{m+n+p}=$
 $=7,5$. 154. $\frac{a}{4\pi}+\frac{b}{2}=1\frac{1}{30}$ саж., $\frac{a}{4\pi}-\frac{b}{2}=1\frac{11}{80}$ саж. 155. $\frac{mb}{m+n}=2\frac{11}{12}$ ф. и $\frac{nb}{m+n}=$
 $=1\frac{1}{4}$ фута. 156. $\frac{ma}{m-n}=3,5$ верш. и $\frac{na}{m-n}=1\frac{5}{12}$ верш. 157. $\frac{a}{2}+r=3\frac{1}{30}$ метра
 и $\frac{a}{2}-r=1\frac{19}{80}$ метра. 158. $2\pi\sqrt{a^2+b^2}=25,13$ метра. 159. $2a:(\pi-2\sqrt{2})=20$ фут.
 160. $2\pi r\sqrt{2}=11,31$ фута. 161. $4\pi r\sqrt{3}=5,44$ саж. 162. $2\pi r\sqrt{48}=6,92$ метра.
 163. $0,1\pi n(\sqrt{5}+1)=5,08$ арш. 164. $\frac{4r}{\pi}\sqrt{2-\sqrt{2}}=3,57$ дюйм. 165. $\frac{3s}{\pi}=2\frac{1}{4}$ саж.
 166. $\pi(a+b-\sqrt{a^2+b^2})=4\frac{8}{9}$ арш. 167. $a:\pi=2,61$ саж. 168. $\pi a\sqrt{3}=11,43$ ф.
 169. $2\pi r(\sqrt{2}+1)=2,12$ саж. 170. $\frac{2}{3}\pi r(2\sqrt{3}+3)$.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ. 1. Данъ треугольникъ ABC . Черезъ A проведемъ прямую XU и опустимъ на нее $\perp \perp BD$ и CE ; проведемъ прямую $CF \parallel BA$ до пересѣченія съ прямою XU въ точкѣ F . $\triangle ADB = \triangle FEC$, и слѣд. площадь прямоугольника $BDCE =$ площади параллелограмма $ABCF$.

2. Въ $\triangle ABC$ уголъ A прямой. Проведемъ прямую $XAY \parallel BC$ и опустимъ на нее $\perp \perp BD$ и CE ; проведемъ прямую $BF \parallel AC$ и $CF \parallel AB$. Площ. $\square BDEC = 2 \triangle ABC$ и площ. $\square ABFC = 2 \triangle ABC$; слѣдов. площади прямоугольниковъ $BDEC$ и $ABFC$ равны.

3. Въ равнобедр. $\triangle \triangle ABC$ и DEF проведемъ высоты AG и DH . Дано $AG = EH$ и $AB = DE$. Тогда $\triangle ABG = \triangle DEH$; слѣд. $\triangle ABC = \triangle DEF$.

4. Въ $\diamond ABCD$ опустимъ $\perp \perp BE$ и DF на AC . $\triangle ABC = \frac{1}{2} AC \cdot BE$ и $\triangle ADC = \frac{1}{2} AC \cdot DF$; откуда $\diamond ABCD = \frac{1}{2} AC(BE + DF)$.

5. $\triangle BDE = \frac{1}{2} \triangle ADB$ и $\triangle BDF = \frac{1}{2} \triangle DBC$. Откуда $\diamond DEBF = \frac{1}{2} \diamond ABCD$.

6. Въ $\diamond ABCD$ точка E середина AC . $\triangle ABE = \frac{1}{2} \triangle ABC$ и $\triangle ADE = \frac{1}{2} \triangle ADC$; слѣд. $\diamond ABED = \frac{1}{2} \diamond ABCD$.

7. Въ $\diamond ABCD$ точки E, F, G и H середины AB, BC, CD и DA ; O пересѣченіе EG съ FH . Имѣемъ: $\triangle BOE = \triangle AOE$, $\triangle BOF = \triangle COF$, $\triangle DOG = \triangle COG$ и $\triangle DOH = \triangle AOH$. Сложивъ эти равенства, найдемъ: $\diamond BEOF + \diamond DGOH = \diamond CFOG + \diamond ABOH$.

8. Возьмемъ какую-нибудь точку P внутри параллелограмма $ABCD$ и соединимъ ее съ A, B, C и D . Изъ точки P опустимъ $\perp PN$ на BC и продолжимъ его до пересѣченія съ AD въ точкѣ M . $\triangle APD + \triangle BPC = \frac{1}{2} AD \cdot PM + \frac{1}{2} BC \cdot PN = \frac{1}{2} AD(PM + PN) = \frac{1}{2} AD \cdot MN = \frac{1}{2}$ площ. $\square ABCD$.

9. Въ трапеціи $ABCD$, гдѣ BC и AD основанія, E и F середины BC и AD ; O точка на прямой EF . Имѣемъ: $\diamond ABEF - \triangle BOE - \triangle AOF = \diamond DCEF - \triangle COE - \triangle DOF$ или $\triangle AOB = \triangle COD$.

10. Въ ромбѣ $ABCD$ точка O пересѣченіе AC съ BD . Площадь ромба $ABCD = 4 \triangle AOB = 4 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 2AO \cdot 2BO = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

11. Проведемъ прямую $AG \parallel BE$ до встрѣчи съ продолженіемъ CD въ точкѣ G . Площ. $\square ABCD =$ площ. $\square ABEG = BE \cdot AF$.

12. Въ $\triangle \triangle ABC$ и DEF дано: $AC = DE$, $BC = EF$ и $\angle ACB + \angle DEF = 180^\circ$. Приложимъ $\triangle DEF$ къ $\triangle ABC$ такъ, чтобы сторона DE совпала съ стороною AC . Тогда EF пойдетъ по продолженію BC и $\triangle DEF$ займетъ положеніе $\triangle ACG$; $\triangle ABC$ равновеликъ $\triangle ACG$, а слѣд. и $\triangle DEF$.

13. Даны $\triangle \triangle ABC$ и DBC такъ, что прямая AD дѣлится въ точкѣ O основаніемъ BC пополамъ, т.-е. $AO = DO$. $\triangle AOB = \triangle DOB$ и $\triangle AOC = \triangle DOC$, а потому и $\triangle ABC = \triangle DBC$.

14. Въ равновеликихъ $\triangle \triangle ABC$ и $A'B'C'$ дано: $AC = A'C'$ и $\angle A = \angle A'$. Имѣемъ: $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = AB : A'B' \cdot AC : A'C' = 1$ или $AB \cdot AC = A'B' \cdot A'C'$; но $AC = A'C'$ и потому $AB = A'B'$.

15. Въ равновеликихъ $\triangle \triangle ABC$ и $A'B'C'$ дано: $\angle B = \angle B'$ и $\angle C = \angle C'$. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, а потому $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = BC^2 : B'C'^2$ или $1 = BC^2 : B'C'^2$. Откуда $BC^2 = B'C'^2$ или $BC = B'C'$.

16. Въ равновеликихъ $\triangle \triangle ABC$ и $A'B'C'$ дано: $AB = A'B'$ и $BC = B'C'$.

Пусть AD и $A'D'$ высоты этихъ треугольниковъ. Тогда, по заданію, $BC \cdot AD = B'C' \cdot A'D'$ или $AD = A'D'$. Слѣд. $\triangle ABD = \triangle A'B'D'$ или $\angle B = \angle B'$.

17. Въ $\triangle ABC$ и $A'B'C'$ дано, что $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = BC^2 : B'C'^2$ и $\angle B = \angle B'$. Но $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = AB : A'B' \cdot BC : B'C'$. Слѣд. $BC^2 : B'C'^2 = AB : A'B' \cdot BC : B'C'$ или $BC : B'C' = AB : A'B'$.

18. $\triangle ABC$, CGL и KAF имѣютъ съ $\triangle ABC$ по двѣ равныхъ стороны, между которыми углы дополнительные одинъ другому до $2d$, а потому (IV, 12) они равномѣрны.

19. Въ $\triangle ABC$ и DBC проведемъ къ основанію прямыя AE и DF такъ, чтобы $\angle AEC = \angle DFC$, т.-е. $AE \parallel DF$. Пусть AM и DN высоты данныхъ \triangle . $\triangle AEM \sim \triangle DFN$ и потому $AM : DN = AE : DF$; но $\triangle ABC : \triangle DBC = AM : DN$, а потому $\triangle ABC : \triangle DBC = AE : DF$.

20. Опустимъ $\perp OK$ и AL на BC . Тогда $\triangle BOC : \triangle ABC = OK : AL = OM : AN$.

21. Черезъ вершины A и D въ $\triangle ABC$ и DBC проведемъ прямую, которая пересѣчетъ продолженіе BC въ точкѣ M . Пусть AE и DF высоты данныхъ треугольниковъ. $\triangle AEM \sim \triangle DMF$ и потому $AE : DF = MA : MD$; слѣд. $\triangle ABC : \triangle DBC = AE : DF = MA : MD$.

22. $\triangle BEF : \triangle AEF = BF : AF = BD : AD$; $\triangle AEF : \triangle CEF = AD : CD$. Слѣд. $\triangle BEF : \triangle CEF = BD : CD = BA : CA$.

23. Равновеликіе $\triangle ABC$ и ADE имѣютъ общій $\angle A$. $\triangle ABC : \triangle ADE = AB : AC : AD : AE$, или $AB : AC : AD : AE = 1$. Откуда $AB : AD = AE : AC$, т.-е. $CD \parallel BE$.

24. Такъ какъ $AD = BD$, то $\triangle ADC = \frac{1}{2} \triangle ABC$. Такъ какъ $AE = EC$, то $\triangle EBC = \frac{1}{2} \triangle ABC$, а потому $\triangle ADC = \triangle EBC$. Отнявъ по $\triangle EFC$, найдемъ: $\triangle ADFE = \triangle BFC$.

25. Въ трапеціи $ABCD$, сторона $AD \parallel BC$; E и F середины AB и CD . Опустимъ $\perp DM$ на BC , который пересѣчетъ прямую EF въ точкѣ N . $\triangle CDE = \triangle DEF + \triangle CEF = \frac{1}{2} EF \cdot DN + \frac{1}{2} EF \cdot MN = \frac{1}{2} EF (DN + MN) = \frac{1}{2} EF \cdot DM = \frac{1}{2}$ площ. трапеціи $ABCD$.

26. $DE \parallel AB$, а потому $OD : OB = OE : OA$. Слѣдов. $\triangle DOE : \triangle EOB = \triangle EOB : \triangle BOA$.

27. Въ трапеціи $ABCD$, гдѣ $BC \parallel AD$ и $BC < AD$, продолжимъ стороны AB и DC до ихъ встрѣчи въ точкѣ E . Имѣемъ: $\triangle BEC : \triangle AEC = BE : AE$ и $\triangle AEC : \triangle AED = CE : DE$. Но $BE : AE = CE : DE$ и потому $\triangle BEC : \triangle AEC = \triangle AEC : \triangle AED$.

28. Въ трапеціи $ABCD$, гдѣ $BC \parallel AD$, AC и BD пересѣкаются въ O . $\triangle BOC : \triangle AOB = OC : OA$; $\triangle AOB : \triangle AOD = OB : OD$; $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ и потому $OC : OA = OB : OD$, т.-е. $\triangle BOC : \triangle AOB = \triangle AOB : \triangle AOD$.

29. M и N точки пересѣченія BE' съ AA' и CC' ; P и Q точки пересѣченія DD' съ CC' и AA' ; $\square MNPQ$ будетъ \square . D середина AB , а потому $AQ = QM$ и площадь $\square MNPQ = 2 \triangle MPQ = 2 \triangle AC'Q = \triangle AQD$. Также площадь $\square MNPQ = \triangle BNC = \triangle CPD = \triangle DAQ$. Но сумма площадей $\triangle AQD$, BNC , CPD , DAQ и площади $\square MNPQ$ равна площади $\square ABCD$ или пять площадей $\square MNPQ =$ площ. $\square ABCD$.

30. Въ трапеци $ABCD$, точка E пересѣченіе діагоналей и $AD \parallel BC$ и $=2BC$. Слѣдов. $\triangle ABD = 2 \triangle BCD$. Но $\triangle ABD : \triangle BCD = DE : EB$ или $2 = DE : EB$; откуда $DE = 2BE$, т.-е. $BE = \frac{1}{3}BD$. Также $AE = \frac{1}{3}AC$.

31. $AF = Ff = Bf$, а потому $\triangle AFC = \triangle FfC = \triangle fBC = \frac{1}{3} \triangle ABC$. Также $Ae = eE = EC$, а потому $\triangle AFe = \triangle eFE = \triangle EFC = \frac{1}{3} \triangle AFC$; слѣд. $\triangle AFe = \frac{1}{9} \triangle AFC = \frac{1}{9} \triangle ABC$. Также $\triangle BfD = \frac{1}{9} \triangle ABC$ и $\triangle dEC = \frac{1}{9} \triangle ABC$, а потому площадь $DdEeFf = \triangle ABC - \frac{1}{9} \triangle ABC - \frac{1}{9} \triangle ABC - \frac{1}{9} \triangle ABC = \frac{2}{3} \triangle ABC$.

32. Положимъ, прямая BE пересѣкаетъ AC въ точкѣ F . $\triangle AEF$ и DEF , такъ же, какъ и $\triangle AEB$ и BED , равновелики, а потому $\triangle ABF$ равновеликъ $\triangle DBF$ или $\frac{1}{2} \triangle BFC$. Слѣд. $AF = \frac{1}{2}CF$ или $CF : AF = 2 : 1$.

33. $\triangle ABD : \triangle ADC = BD : CD$; $\triangle OBD : \triangle ODC = BD : CD$. Слѣдовательно, $\triangle ABD : \triangle ADC = \triangle OBD : \triangle ODC$. Откуда $(\triangle ABD - \triangle OBD) : (\triangle ADC - \triangle ODC) = \triangle OBD : \triangle ODC$ или $\triangle AOB : \triangle AOC = BD : CD$.

34. G пересѣченіе AF и BC ; $\angle ABD = \angle DBG$ и $BD \perp AG$, а потому $\triangle ABD = \triangle BGD$ и $AD = DG$; $\triangle ADC = \triangle GDC$ и $\triangle ABC = 2 \triangle BGD + 2 \triangle GDC = 2 \triangle BDC$. Слѣд. площ. $\square BEFD = 2 \triangle BDC = \triangle ABC$.

35. $AB > AC$. Продолжимъ CF до пересѣченія съ AB въ G . $\triangle AGF = \triangle ACF$ и потому $GF = FC$; $\triangle AGC = 2 \triangle AGF$ и $\triangle BGC = 2 \triangle BGF$; слѣд. $\triangle ABC = 2 \triangle ABF$. $\triangle AFC \sim \triangle ABE$ и потому $AF : AE = CF : BE$; откуда $AE \cdot CF = AF \cdot BE = 2 \triangle ABF = \triangle ABC$.

36. ACB окружность; AB діаметръ и O середина AB . Касательная въ C пересѣкаетъ касательныя въ A и B въ F и E . Проведемъ OC и OE . Тогда $\triangle COE = \triangle BOE$; слѣд. $\diamond OCEB = 2 \triangle COE = CO \cdot CE$. Также $\diamond AFCE = CO \cdot CF$, а потому $\diamond AFEB = CO \cdot EF = \frac{1}{2} AB \cdot EF$.

37. $DE \parallel BC$, а потому $\triangle BDC - \triangle BFC = \triangle BEC - \triangle BFC$ или $\triangle BDF = \triangle CEF$. $\triangle BDF : \triangle ADF = BD : DA$ и $\triangle CEF : \triangle AEF = CE : EA$. Но $BD : DA = CE : EA$, а потому $\triangle BDF : \triangle ADF = \triangle CEF : \triangle AEF$; откуда $\triangle ADF = \triangle AEF$.

38. Впишемъ въ кругъ $\diamond ABCD$, въ кот. діагональ $AC \perp$ къ діагонали BD и пересѣкаетъ ее въ точкѣ E . На основаніи Птолемеевой теоремы, имѣемъ: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD = AC(BE + DE) = AC \cdot BE + AC \cdot DE = 2 \triangle ABC + 2 \triangle ACD = 2 \diamond ABCD$.

39. $\diamond ABCD$ вписанъ въ кругъ O . Опустимъ $\perp \perp OE, OF, OG$ и OH на AB, BC, CD и DA ; проведемъ AC и BD . $\triangle ANE = \frac{1}{4} \triangle ABD$ и $\triangle CFG = \frac{1}{4} \triangle BCD$; слѣд. $\triangle ANE + \triangle CFG = \frac{1}{4} \diamond ABCD$. Также $\triangle BEF + \triangle HDG = \frac{1}{4} \diamond ABCD$. Сумма площадей этихъ \triangle -въ составляетъ $\frac{1}{2} \diamond ABCD$, а потому $\diamond EFGH = \frac{1}{2} \diamond ABCD$.

40. На сторонахъ BC и CD прямоугольника $ABCD$ построимъ квадраты $BCEF$ и $CDGH$. Тогда $CF = BC\sqrt{2}$, $CG = CD\sqrt{2}$ и $CF \cdot CG = BC \cdot CD \cdot 2 = 2$ площ. $\square ABCD$.

41. Пусть ABC правил. \triangle , вписанъ въ кругъ O . Черезъ точки A, B и C проведемъ касательныя къ кругу, кот. въ пересѣченіи дадутъ правильный $\triangle DEF$. Такъ какъ $\triangle ABC = \triangle ACE = \triangle ABF = \triangle BCD$, то $\triangle DEF = 4 \triangle ABC$.

42. AB бокъ правил. вписан. 6-угольника въ кругѣ O . Проведемъ касательныя CA и CB къ кругу и равнодѣлящія $\angle ABO$ и BAO до пересѣченія въ D ; OC пересѣчетъ AB въ E . $\angle DOA = \angle DAO$ и $\angle DAC = \angle DCA$; слѣд. $OD = AD = CD$ и $CE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}OC$. Поэтому $\triangle AOE = \frac{2}{3}\triangle AOC$. Умноживъ обѣ части на 12, найдемъ, что площадь правильнаго вписан. 6-угольника $= \frac{2}{3}$ площади правильнаго описан. 6-угольника.

43. Пусть $ABCDEF$ будетъ правильный впис. 6-угольн. въ кругѣ O ; q — его площадь; ACE и LMN будутъ правильные вписанные и описанные \triangle въ кругѣ. Такъ какъ $\triangle ABC = \triangle AOC$, то $q = 2\triangle ACE$ и $\triangle LMN = 4\triangle ACE = 2q$ (IV, 41); отсюда $\triangle ACE : q = q : \triangle LMN$.

44. AB и CD два \perp -ые діаметра; OE и OF радіусы, радѣляющіе пополамъ $\angle AOC$ и COB . Тогда EC будетъ бокъ прав. впис. 8-угольника. Соединивъ E съ F и означивъ буквою K точку пересѣченія OC съ EF , увидимъ, что площадь 8-угольника $= 8\triangle EOC = 4 \cdot OC \cdot EK = EF \cdot CD$.

45. Пусть O будетъ центръ шестиугольника. AC пересѣкаетъ BD и BF въ N и M ; AE пересѣкаетъ FB и FD въ P и L ; CE пересѣкаетъ DB и DF въ H и K . Полученный шестиугольникъ $MNHKLP$ будетъ правильный. Соединимъ O съ B , M и N ; пусть Q точка пересѣченія OB съ AC . Въ равносѣстороннемъ $\triangle AOB$, $MQ = \frac{1}{3}AQ$, а потому $\triangle MOQ = \frac{1}{3}\triangle AOQ = \frac{1}{6}\triangle AOB$; $\triangle NOQ = \frac{1}{6}\triangle BOC$; слѣд. $\triangle MON = \frac{1}{3}\triangle BOC$. Также $\triangle NOH = \frac{1}{3}\triangle BOC$ и т. д. Поэтому площадь 6-угольника $MNHKLP = \frac{1}{3}$ площади $ABCDEF$.

46. $ABCDE...$ правил. многоуг. о n сторонахъ; O его центръ и OK — апогема. Изъ точки J внутри многоугольника опустимъ \perp на JM , JN , $JP, ...$ на стороны $AB, BC, CD, ...$ Площадь многоуг. $ABCDE... = \triangle AJB + \triangle BJC + \triangle CJD + ... = \frac{1}{2}AB(JM + JN + JP + ...)$ и также площадь многоугольника $= n \cdot \frac{1}{2}AB \cdot OK$; сравнивъ эти выраженія, найдемъ: $n \cdot OK = JM + JN + JP + ...$ Эта теорема будетъ справедлива и въ томъ случаѣ, когда точка J внѣ многоугольника, если согласимся ставить знак $(-)$ передъ длинами \perp , направленныхъ извнѣ во внутрь многоугольника, относительно какой-либо стороны.

47. Въ $\triangle ABC$, изъ точки D , взятой на BC , проведемъ хорды: $DE \parallel CA$ и $DF \parallel BA$; означимъ площадь параллелограмма $AEDF$ буквою q . Имѣемъ: $2\triangle BDE : q = BE : AE = BE : DF$; $q : 2\triangle CDF = AF : CF = DE : CF$. Но $\triangle BDE \sim \triangle CDF$ и потому $BE : DF = DE : CF$; слѣд. $2\triangle BDE : q = q : 2\triangle CDF$.

48. O точка внутри $\triangle ABC$. Проведемъ хорды EOH , GOD и KOF , параллельно BC , CA и AB . $\triangle DEO$, KOH и OFG подобны, а потому площади ихъ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ; но площади ихъ равны, по заданію, а потому сходственныхъ стороны равны, т. е. $EO = OH = FG$ или $BF = FG = GC$. $\triangle ABC : \triangle OFG = BC^2 : FG^2 = 3^2 : 1 = 9 : 1$; отсюда $\triangle ABC = 9\triangle OFG$.

49. $\triangle AOC' = \triangle A'OC$ и потому $A'C \parallel AC'$. Точно такъ же $\triangle AOB' = \triangle A'OB$ и $\triangle BOC' = \triangle B'OC$ и слѣд. $AB' \parallel A'B$ и $BC' \parallel B'C$. Отсюда площ. 6-угол. $= 2(\triangle A'OC + \triangle B'OC + \triangle A'OB) = 2(\triangle AOC + \triangle BOC + \triangle AOB) = 2\triangle ABC$.

50. Означивъ сторону данного квадрата буквою a , найдемъ, что площадь его $= a^2$. Площадь 1-го впис. $\square = \frac{1}{2}a^2$; площ. 2-го впис. $\square = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}a^2$ и т. д. Слѣдовательно искомая сумма равна $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 + \dots = \frac{1}{2}a^2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots) = a^2$.

51. D , E и F середины сторонъ BC , CA и AB въ $\triangle ABC$. На продолженіи FE отложимъ часть $EG = FE$; тогда $EG = EF = DC$ и слѣд. $CG \parallel DE$ и $\parallel AB$, а потому $CG = BF = AF$ и $DG =$ и $\parallel BE$; также $AG =$ и $\parallel CF$. Слѣд. стороны $\triangle ADG$ равны медианамъ данного $\triangle ABC$. Пусть H пересѣченіе AD съ FE ; тогда $HE = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}EG$ и слѣд. E будетъ точкою пересѣченія медианъ въ $\triangle ADG$. Поэтому $\triangle ADG = 3 \triangle ADE$; но $\triangle ADE = \frac{1}{2} \triangle ADC = \frac{1}{4} \triangle ABC$. Означивъ $\triangle ABC$ и ADG буквами q и q' , получимъ:

$$q' = 3 \cdot \frac{1}{4}q = \frac{3}{4}q.$$

Составивъ новый \triangle изъ медианъ $\triangle ADG$ и означивъ его площадь черезъ q'' , найдемъ $q'' = \frac{3}{4}q' = (\frac{3}{4})^2 q$ и т. д. Слѣд. сумма площадей всѣхъ \triangle -въ равна

$$\lim. (q + q' + q'' + \dots) = \lim q[1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + \dots] = q \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4q.$$

52. Дана трапеція $ABCD$, въ кот. $BC \parallel AD$ и E середина AB . Изъ точки E опустимъ $\perp EF$ на CD и проведемъ прямую $EG \parallel BC$ до пересѣченія съ CD въ точкѣ G ; опустимъ $\perp DK$ на BC . $\triangle EFG \sim \triangle CDK$ и потому $EG : CD = EF : DK$ или $EG \cdot DK = CD \cdot EF$, гдѣ $EG \cdot DK =$ площади трапеція $ABCD$.

53. Въ трапеція $ABCD$, гдѣ $BC \parallel AD$ и $BC < AD$, пусть $AD = a$, $BC = b$ и h высота трапеція. Продолжимъ AB и DC до ихъ встрѣчи въ точкѣ E и опустимъ $\perp EF$ на AD , кот. пересѣчетъ BC въ точкѣ G . Площ. трапеція $ABCD = \triangle AED - \triangle BEC = \frac{1}{2}a \cdot EF - \frac{1}{2}b \cdot EG$. Но $EG : EF = b : a$ или $EG : (EF - EG) = b : (a - b)$ и $EF : (EF - EG) = a : (a - b)$; откуда $EG = \frac{bh}{a - b}$ и $EF = \frac{ah}{a - b}$. Слѣдовательно площадь трапеція $ABCD = \frac{1}{2}a \cdot \frac{ah}{a - b} - \frac{1}{2}b \cdot \frac{bh}{a - b} = \frac{a^2h - b^2h}{2(a - b)} = \frac{a + b}{2} \cdot h$.

54. G означаетъ пересѣченіе AF съ DE . $\triangle ADF$, DFG и ADE равновелики, соответственно, $\triangle AEF$, EFG и BDE ; откуда $2 \triangle ADG = \triangle ADE = \triangle BDE = \triangle BDF + 2 \triangle DFG = \triangle ADF + 2 \triangle DFG = \triangle ADG + 3 \triangle DFG$ или $\triangle ADG = 3 \triangle DFG$, а потому $\triangle ADE = 3 \triangle DEF$.

55. $\angle EDF = \angle BAC$, а потому $\triangle DEF : \triangle ABC = DE \cdot DF : AB \cdot AC$. $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ и $\triangle FBD \sim \triangle ABC$, а потому $DE : AB = DC : BC$ и $DF : AC = BD : BC$; откуда $DE \cdot DF : AB \cdot AC = DB \cdot DC : BC^2$. Слѣдовательно, $\triangle DEF : \triangle ABC = DB \cdot DC : BC^2$.

56. Въ $\diamond ABCD$, точки M , N , P и Q середины AB , BC , CD и DA ; E и F середины AC и BD ; O точка пересѣченія прямихъ, проведенныхъ чрезъ точки E и $F \parallel BD$ и AC . $\diamond AMOQ = \triangle AQM + \triangle MOQ = \triangle AQM + \triangle MEQ = \diamond AMEQ$ или $\diamond AMEQ = \triangle AQE + \triangle AME = \frac{1}{2} \triangle ACD + \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{1}{2} \diamond ABCD$ и слѣд. $\diamond AMOQ = \frac{1}{4} \diamond ABCD$.

57. Черезъ точку B проведемъ прямую, параллельно AC , до пересѣченія съ продолженіями DA и DC въ точкахъ M и N . Тогда $\triangle ABCG = \triangle NAG$; но $NC = DG$, а потому $\triangle NAG = \triangle ADG$ и $\triangle ABCG = \triangle ADG$.

58. $\angle B$ и C острые. Опустимъ $\perp AK$ на BC , $\perp AL$ на EC и $\perp GM$ на EC . $\triangle ACK = \frac{1}{2} AK \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} CE \cdot 2GM = \frac{1}{2} CE \cdot GM = \triangle CEG$. Такъ же $\triangle AKB = \triangle BDF$; откуда $\triangle ABC = \triangle AKC + \triangle AKB = \triangle CEG + \triangle BDF$.

59. $BD : AD = BC : AC = 1 : 2$; откуда $AD = 2BD$ и $AB = 3BD$. Также $BE : AE = BC : AC = 1 : 2$; откуда $AE = 2BE = 6BD$ и $DE = AE - AD = 4BD$. Разсматриваемые \triangle имѣютъ общую вершину, а основанія ихъ лежатъ на одной прямой; поэтому $\triangle BCD : \triangle ACD : \triangle ABC : \triangle CDE = BD : 2BD : 3BD : 4BD = 1 : 2 : 3 : 4$.

60. $\triangle AOB : \triangle AOC = BD : CD = 2 : 1$; $\triangle AOB : \triangle BOC = AE : EC = 1 : 2$; слѣд. $\triangle BOC + \triangle AOB = 3 \triangle AOB = 6 \triangle AOC$. Но $BO : OE = \triangle BOA : \triangle EOA = \triangle BOC : \triangle EOC$; откуда $BO : OE = (\triangle BOA + \triangle BOC) : \triangle AOC = 6 : 1$; слѣд. $\triangle BOA : \triangle EOA = 6 : 1$ или $\triangle BOA = 6 \triangle EOA$ и $\triangle ABE = 7 \triangle EOA$. Также $\triangle ABD : \triangle ABC = BD : BC = 2 : 3 = 14 : 21$; слѣд. $\triangle ABD = 14 \triangle EOA$ и $\triangle BOD = \triangle ABD - \triangle AOB = 8 \triangle EOA$. Откуда $\triangle EOA : \triangle AOB : \triangle BOD : \triangle ABC = 1 : 6 : 8 : 21$.

61. G точка пересѣченія BE съ CD ; прямая AG пересѣкаетъ BC въ F . $\triangle ADE : \triangle ABC = AD^2 : AB^2$ и $\triangle ADE : \triangle ABC = AD \cdot AE : AB \cdot AC$; откуда $AD^2 : AB^2 = AD \cdot AE : AB \cdot AC$ или $AD : AB = AE : AC$. $\triangle BEC = \triangle BDC$, $\triangle BEC - \triangle BCG = \triangle BCD - \triangle BCG$, или $\triangle EGC = \triangle BGL$. Имѣемъ: $\triangle ADG : \triangle ABC = \triangle AGE : \triangle AGC$, или $\triangle ADG : \triangle BDG = \triangle AGE : \triangle EGC$; откуда выходитъ, что $\triangle ADG$ равнобѣренъ $\triangle AGE$. Кроме того, $\triangle ADG : \triangle ABF = AD \cdot AG : AB \cdot AF$ и $\triangle AGE : \triangle ACF = AE \cdot AG : AC \cdot AF$. Сравнимъ двѣ послѣднія пропорціи, найдемъ, что $\triangle ACF$ равном. $\triangle ABF$, а потому ихъ основанія CF и BF равны.

62. $\triangle OBC : \triangle ABC = OM : AM'$ (V, 23); $\triangle AOC : \triangle ABC = ON : BN'$ и $\triangle OAB : \triangle ABC = OP : CP'$. Сложивъ почленно эти равенства и замѣтивъ, что $\triangle OBC + \triangle OAC + \triangle OAB = \triangle ABC$, найдемъ требуемое отношеніе.

63. $\triangle ABB' : \triangle CBB' = AB' : CB' = \triangle AOB' : \triangle COB'$; откуда выходитъ, что $\triangle AOB : \triangle COB = AB' : CB'$. Также $\triangle AOC : \triangle AOB = CA' : BA'$ и $\triangle COB : \triangle AOC = BC' : AC'$. Перемноживъ почленно эти равенства, найдемъ, что $AB' \cdot CA' \cdot BC' = CB' \cdot BA' \cdot AC'$.

Обратная теорема. Положимъ, что BB' и CC' пересѣкаются въ D и AD пересѣкаетъ BC въ K . Тогда $AB' \cdot BC' \cdot CK = AC' \cdot BK \cdot CB'$; но, по условію, $AB' \cdot BC' \cdot CA' = AC' \cdot BA' \cdot CB'$, а потому, сравнивъ эти равенства, получимъ: $CK : BK = CA' : BA'$ или $BC : BK = BC : BA'$. Откуда $BK = BA'$, т.-е. точки K и A' совпадаютъ.

64. Точка a между B' и C' ; прямая Sc пересѣкаетъ $B'C'$ въ P . Проведемъ Ba , ac , $A'a$ и $A'P$. Такъ какъ $Aa \parallel CP$, то $\angle B'Aa = \angle B'CP$, $\angle B'aA = \angle B'PC$. Въ $\triangle B'aA$ и $B'CP$, $B'a = B'P$; поэтому $\triangle A'aB' + \triangle B'ac = \triangle A'BP + \triangle PBC$. Также $aP \parallel BC$ и $BA' = CA'$; слѣд. $\triangle BaA' = \triangle A'PC$ и $\triangle A'aB' + \triangle B'ac + \triangle BaA' = \triangle A'Cs$. Но $BA' = CA'$; слѣд. $\triangle B'aCs = \triangle A'Cs$ и потому $\triangle A'ac + \triangle B'aA = \triangle BA'c$; слѣд. Bac будетъ прямой.

Также $\triangle Cab$ и $\triangle abc$ будутъ прямыя. Такъ какъ $Bb \parallel Cc$, то $\triangle Cbc = \triangle CBc$; слѣд. $\triangle abc = \triangle Cba$ и потому $\triangle abc = \triangle CBB' = \frac{1}{2} \triangle ABC$.

65. $\triangle ABC$ данный \triangle ; A' , B' и C' вершины равнобедренныхъ \triangle -въ, построенныхъ на BC , CA и AB . Пусть AA' , BB' и CC' пересѣкаютъ BC , CA и AB въ M , N и P . Равнобедренные \triangle -ки подобны, а потому $AB : AC' = AC : AB'$ или $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ и $\angle CAB' = \angle BAC'$; слѣдовательно, $\angle SAC' = \angle BAV'$. Поэтому $\triangle ABB'$ и $\triangle ACC'$, имѣющіе по равному углу и равныя произведенія сторонъ, содержащихъ эти углы, будутъ равномѣрны. Также равномѣрны $\triangle BCC'$ и $\triangle BAA'$ и $\triangle CAA'$ и $\triangle CBB'$. Но $\triangle BAA' : \triangle CAA' = BM : CM$; $\triangle CBB' : \triangle ABB' = CN : AN$ и $\triangle ACC' : \triangle BCC' = AP : BP$. Перемноживъ эти равенства, найдемъ, что $AP \cdot BM \cdot CN = AN \cdot BP \cdot CM$, т.-е. (III, 59) прямыя AA' , BB' и CC' пересѣкаются въ одной точкѣ.

66. $\diamond ABCD = \triangle AEF + \triangle ADF + \triangle ABE + \triangle ECF = \triangle AEF + \frac{1}{2} AD \cdot DF + \frac{1}{2} AB \cdot BE + \frac{1}{2} CE \cdot CF = \triangle AEF + \frac{1}{2} [AD \cdot DF + AB \cdot BE + (AD - BE)(AB - DF)] = \triangle AEF + \frac{1}{2} BE \cdot DF + \frac{1}{2} AD \cdot AB = \triangle AEF + \frac{1}{2} BE \cdot DE + \frac{1}{2} \diamond ABCD$. Отсюда $\diamond ABCD = 2 \triangle AEF + BE \cdot DF$.

67. Пусть $2a$ и $2b$ стороны прямоугольника. Тогда периметръ квадрата будетъ $4a + 4b$, а площадь его равна $(a+b)^2$. Имѣемъ тождество: $(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$, изъ котораго видимъ справедливость теоремы.

68. AO равнод. $\angle BAD$, а потому $BO : OD = BA : AD$. Также $CO : OE = CA : AE$; $\triangle BOE : \triangle COB = EO : OC = AE : AC = AE : AB : AC$. AB и $\triangle COB : \triangle COD = BO : OD = AB : AD = AC : AB : AC$. AD . Отсюда $\triangle BOE : \triangle COD = AE : AB : AC : AD$.

69. $\triangle AOB : \triangle SOT = OA : OB = OT : OS = OP^2 : OT \cdot OS$. Изъ подобія $\triangle POT$ и $\triangle MOP$, $\triangle POS$ и $\triangle MOP$, получимъ: $OP : OT = MP : OP$ и $OP : OS = OM : OP$; откуда $OP^2 : OT \cdot OS = OM \cdot MP : OP^2$ и слѣдовательно, $\triangle AOB : \triangle SOT = OM \cdot MP : OP^2$. Также $\triangle MOP : \triangle AOB = OM \cdot MP : OA \cdot OB = OM \cdot MP : OP^2$; поэтому $\triangle AOB : \triangle SOT = \triangle MOP : \triangle AOB$.

70. AC пересѣкаетъ EH и FK въ точкахъ L и M и касается круга въ N . Слѣд. $ON = CH = AK$ и $\triangle LON = \triangle CLH$, а $\triangle MON = \triangle AKM$. Поэтому площадь прямоугольника $KONH = \diamond KMLHD + \triangle MON + \triangle LON = \diamond KMLHD + \triangle AKM + \triangle CLH = \triangle ACD = \frac{1}{2}$ площ. $\square ABCD$.

71. $\triangle EME' : \triangle ABM = EE' : AB$ и $\triangle FMF' : \triangle ACM = FF' : AC$. Видимъ, что $EE' : BE = PP' : BP$ и $AB : BE = BC : BP$; откуда $EE' : AB = PP' : BC$. Также и $FF' : AC = PP' : BC$; откуда $\triangle EME' : \triangle ABM = \triangle FMF' : \triangle ACM$ или $(\triangle EME' + \triangle FMF') : \triangle ABC = \triangle FMF' : \triangle ACM = FF' : AC = PP' : BC$. Но $\triangle PAP' : \triangle ABC = PP' : BC$, а потому, сравнивъ эти пропорціи, получимъ: $\triangle EME' + \triangle FMF' = \triangle PAP'$.

72. Положимъ, что точка P въ $\triangle BCD$. Проведемъ прямую BP и опустимъ \perp на AM , CN и DK на BP ; проведемъ прямую $CX \parallel BP$, до пересѣченія съ DK въ L . $\triangle ABM = \triangle DCL$, а потому $AM = DL$; но $\triangle BPD = \frac{1}{2} BP \cdot DK = \frac{1}{2} BP(DL - KL) = \frac{1}{2} BP \cdot AM - \frac{1}{2} BP \cdot CN = \triangle APB - \triangle BPC$. Если точка въ параллелограммѣ, то $\triangle BPD = \triangle APB + \triangle BPC$.

73. K середина AC ; L середина BD . $BL = LD$, а потому $\triangle ALD =$

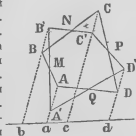
$=\frac{1}{2}\triangle ABD$; также $\triangle BLC=\frac{1}{2}\triangle BDC$. Слѣд. $\triangle ALD+\triangle BLC=\frac{1}{2}\triangle ABCD$. Но $AK=KC$, $\triangle AKL=\triangle LKC$ и $\triangle AKE=\triangle EKC$; слѣд. $\triangle ALE=\triangle ELC$ и $\triangle ALD=\triangle ALE+\triangle ELD=\triangle ELC+\triangle ELB$. Поэтому $\triangle ALD+\triangle BLC=\triangle ELC+\triangle ELB+\triangle BLC=\triangle BEC$, т.-е. $\triangle BEC=\frac{1}{2}\triangle ABCD$. Также $\triangle FAD=\frac{1}{2}\triangle ABCD$.

74. Даны два $\diamond ABCD$ и $A'B'C'D'$ (фиг. 79), гдѣ M, N, P и Q середины сторонъ AB и $A'B'$, BC и $B'C'$ и т. д. Черезъ A и A' , B и B' , C и C' , D и D' проведемъ прямыя до пересѣченія съ произвольной прямой въ точкахъ a, b, c и d ; тогда $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Въ самомъ дѣлѣ, $\triangle AMA'=\triangle BMB'$ и слѣд. $\angle AA'M=\angle BB'M$, т.-е. $AA' \parallel BB'$ и т. д. Отсюда ясно, что площ. трапец. $aA'B'b$ =пл. трапеціи $aABb$; площадь трапец. $bB'C'c$ =пл. трапец. $bBCc$; пл. трапец. $cC'D'd$ =пл. трапеціи $cCDd$ и пл. трапец. $dD'A'a$ =пл. трапец. $dDAa$. Если сложимъ первое равенство съ четвертымъ и изъ полученной суммы вычтемъ второе и третье, то найдемъ, что $\diamond ABCD=\diamond A'B'C'D'$.

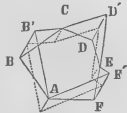
75. Для примѣра (фиг. 80) возьмемъ шестиугольникъ $ABCDEF$, и пусть его вершины B, D и F передвинутся въ одномъ направленіи на длину a и будутъ въ точкахъ B', D' и F' такъ, что $BB'=DD'=FF'=a$. Соединивъ B' съ A и C , D' съ C и E , а F' съ A и E , получимъ многоугольникъ $AB'CD'E'F'$. При движеніи вершинъ, середина каждой изъ сторонъ даннаго многоугольника передвинется, въ томъ же направленіи, на $\frac{1}{2}a$, а потому, если всѣ вершины многоугольника $AB'CD'E'F'$ передвинемъ на $\frac{1}{2}a$ въ обратномъ направленіи съ первымъ, т.-е. B' къ B , D' къ D и F' къ F , то середины сторонъ этого многоугольника совпадутъ съ серединами даннаго. Откуда заключаемъ (V, 74), что эти многоугольники равновелики.

76. Точка A' (фиг. 81) будетъ пересѣченіе прямыхъ AD и BE ; B' —пересѣченіе BE и CF ; C' —пересѣченіе AD и CF . Означимъ $\triangle AA'B'$, $BB'C'$ и $CC'A'$ буквами q, q_1 и q_2 , а пл. $\triangle A'B'C'$ буквою x . Такъ какъ $AF=2BF$, то $\triangle AC'F=2\triangle BC'F$ и $\triangle AB'F=2\triangle BB'F$ или $\triangle AC'F-\triangle AB'F=2\triangle BC'F-2\triangle BB'F$ или $\triangle AC'F-\triangle AB'F=2\triangle BC'F-2\triangle BB'F$; откуда $\triangle AC'B'=2\triangle BB'C'$ или $x+q=2q_1$. Также $x+q_1=2q_2$ и $x+q_2=2q$. Умноживъ первое равенство на 1, второе на 2, а третье на $\frac{1}{2}$, сложимъ ихъ; найдемъ: $7x+q=8q$ или $x=q$; откуда $AA'=A'C'$. Точно такъ же докажемъ, что $BB'=A'B'$ и $CC'=B'C'$. Но $CC'=B'C'$, а потому $\triangle ACC'=\triangle AB'C'=2\triangle AA'B'=2x$ и

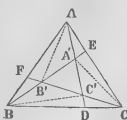
Фиг. 79.



Фиг. 80.



Фиг. 81.



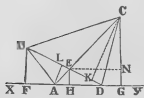
$\triangle BB'C = 2x$. Откуда $\triangle ABC = \triangle A'B'C' + \triangle ACC' + \triangle AA'B + \triangle BB'C = x + 2x + 2x + 2x = 7x$.

77. Пусть $\frac{BM}{AM} = n$. Тогда $\frac{AN}{CN} = n$ и $\frac{PM}{PN} = n$; откуда $\frac{AB}{AM} = n+1$, $\frac{AC}{AN} = \frac{n+1}{n}$, $\frac{MN}{PM} = \frac{n+1}{n}$ и $\frac{MN}{PN} = n+1$ или $\frac{PN}{MN} = \frac{1}{n+1}$. Также $\frac{\triangle ABC}{\triangle AMN} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AC}{AN} = \frac{(n+1)^2}{n}$; $\frac{\triangle BMP}{\triangle AMN} = \frac{BM}{AM} \cdot \frac{PM}{MN} = \frac{n^2}{n+1}$ и $\frac{\triangle CNP}{\triangle AMN} = \frac{CN}{AN} \cdot \frac{PN}{MN} = \frac{1}{n(n+1)}$. Вычтя второе и третье равенство почленно из первого, найдемъ: $\frac{\triangle AMN + \triangle BPC}{\triangle AMN} = \frac{(n+1)^2 - n^2 - 1}{n(n+1)} = 3$; откуда $\triangle BPC = 2\triangle AMN$.

78. $\frac{\triangle AB'C'}{\triangle ABC} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC} = \frac{n}{(n+1)^2}$; $\frac{\triangle A'BC'}{\triangle ABC} = \frac{BC' \cdot BA'}{BC \cdot BA} = \frac{n}{(n+1)^2}$ и $\frac{\triangle A'B'C}{\triangle ABC} = \frac{CA' \cdot CB'}{CA \cdot CB} = \frac{n}{(n+1)^2}$. Сложивъ эти равенства, получимъ: $\frac{\triangle ABC - \triangle A'B'C'}{\triangle ABC} = \frac{3n}{(n+1)^2}$ или $\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC} = 1 - \frac{3n}{(n+1)^2} = \frac{n^2 - n + 1}{(n+1)^2}$.

79. Опустимъ $\perp \perp BF$ и CG на AD и проведемъ прямую изъ $E \parallel AD$

Фиг. 82.



до пересѣченія съ CF въ N . $\frac{\triangle BCD}{\triangle ABD} = \frac{CK}{AL}$;

откуда $\triangle BCD = \triangle ABD \cdot \frac{CK}{AL}$; $\triangle AEL \sim \triangle CEK$

и $\triangle AEH \sim \triangle CEN$, а потому $\frac{CK}{AL} = \frac{CE}{AE} =$

$\frac{CN}{EH} = \frac{CG - EH}{EH} = \frac{CG}{EH} - 1$ и $\triangle BCD = \triangle ABD \times$

$\times \left(\frac{CG}{EH} - 1 \right) = \triangle ABD \cdot \frac{CG}{EH} - \triangle ABD$. Откуда

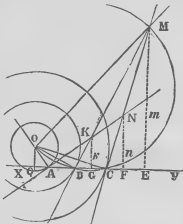
$\triangle BCD + \triangle ABD = \triangle ABD \cdot \frac{CG}{EH}$ или $\diamond ABCD = \frac{1}{2} AD \cdot BF \cdot \frac{CG}{EH} = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{BF \cdot CG}{EH}$.

80. Пусть A_1, A_2, A_3, \dots точки дѣленія AB ; C_1, C_2, C_3, \dots соответствующія вершины многоугольниковъ для вершины C . Имѣемъ: $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AA_1} = \frac{A_1C_2}{A_1A_2} = \dots$ или $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1 + A_1C_2 + \dots}{AA_1 + A_1A_2 + \dots}$; но $AB = AA_1 + A_1A_2 + \dots$, а потому и $AC = AC_1 + A_1C_2 + \dots$. Слѣд. каждая изъ сторонъ данного многоугольника равна суммѣ сходственныхъ сторонъ въ построенныхъ многоугольникахъ, а потому и периметръ данного многоугольника равенъ суммѣ периметровъ построенныхъ многоугольниковъ. Положимъ, что отрѣзки стороны AB , т.-е. $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ равны между собою. Означимъ буквою Q площадь данного многоугольника, а буквами q_1, q_2, q_3, \dots площади многоугольниковъ, построенныхъ на $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$. Тогда $\frac{q_1}{Q} = \frac{AA_1^2}{AB^2} = \frac{1}{n^2}$, $\frac{q_2}{Q} = \frac{A_1A_2^2}{AB^2} = \frac{1}{n^2}, \dots$; откуда $\frac{q_1 + q_2 + \dots}{Q} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

81. Пусть AD , BE и CF высоты $\triangle ABC$; O центръ круга, описаннаго около него; M , N и P точки пересѣченія AO , BO и CO съ EF , DF и DE . Тогда (II, 178) $AO \perp EF$, $BO \perp DF$ и $CO \perp DE$. Изъ чертежа имѣемъ $\triangle ABC = \triangle AEOF + \triangle DOFB + \triangle DOEC = \frac{1}{2}AO \cdot EF + \frac{1}{2}BO \cdot DF + \frac{1}{2}CO \cdot DE = \frac{1}{2}AO(EF + DF + DE)$.

82. Пусть MKN искомымъ треугольникомъ. Опустимъ $\perp \perp ME$, NF и KG на прямую XY . Положимъ $OQ=l$, $QA=a$, $QB=b$ и $QC=c$. Изъ чертежа видимъ, что $\triangle MKN = \triangle BMC + \triangle AKB - \triangle ANC \dots$ (1). $\angle CME = \angle OCQ$, какъ съ перпендикулярными сторонами, а потому $\triangle CEM \sim \triangle OQC$; откуда $ME : CM = QC : CO \dots$ (2). $\angle LOVM$ и OQC прямые, а потому можно провести окружность чрезъ точки O , B , C и M . Тогда $\angle MOC = \angle QOB$, а потому $\triangle OCM \sim \triangle BOQ$; откуда $CM : CO = QB : OQ \dots$ (3). Перемноживъ (2) и (3) равенства, найдемъ: $ME = \frac{QC \cdot QB}{OQ}$, а потому $\triangle BMC = \frac{1}{2}ME \cdot BC = \frac{QC \cdot QB \cdot BC}{2OQ} = \frac{cb(c-b)}{2l}$.

Фиг. 83.



Подобнымъ образомъ найдемъ, что $\triangle AKB = \frac{ba(b-a)}{2l}$ и $\triangle ANC = \frac{ca(c-a)}{2l}$. Подставивъ эти величины въ (1) равенство, найдемъ:

$$\triangle MKN = \frac{cb(c-b) + ba(b-a) - ca(c-a)}{2l} = \frac{(b-a)(c-b)(c-a)}{2l} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{2OQ}.$$

83. Въ прямоугол. $\triangle ABC$, гдѣ $\angle A = d$, вписанъ кругъ O , касающійся AB , BC и AC въ точкахъ D , E и F . $\triangle ABC = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot OD = \frac{1}{2}(BE + AD + CE + AF + BE + CE) \cdot OD = (BE + CE + AD) \cdot OD$. Также $\triangle ABC = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}(BE + OD)(CE + OD) = \frac{1}{2}BE \cdot CE + \frac{1}{2}OD(BE + CE + OD) = \frac{1}{2}BE \cdot CE + \frac{1}{2}\triangle ABC$; откуда $\triangle ABC = BE \cdot CE$.

84. Опустимъ $\perp \perp OD$ и OE на катеты AB и AC . $\triangle ABC = \triangle AOB + \triangle AOC$ или, означивъ радиусъ полукруга буквою r , $\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}br$; откуда $r = \frac{bc}{b+c}$.

85. На основаніи предыдущаго $r_1 = \frac{r(p-a)}{r+p-a}$ или $\frac{1}{r_1} = \frac{r+p-a}{r(p-a)} = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{r}$; слѣд. $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{1}{p-a}$. Также $\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} = \frac{1}{p-b}$ и $\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r} = \frac{1}{p-c}$. Слѣд. первая часть даннаго равенства

$$= \frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)} = \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^2}{q^2} \quad (\text{гдѣ } q \text{ площадь } \triangle) = \frac{p^2}{r^2 r^2} = \frac{1}{r^2}.$$

86. 1) О центрѣ круга, вписаннаго въ $\triangle ABC$, въ кот. $AB=c$, $BC=a$ и $AC=b$; r радиусъ круга. Соединивъ O съ вершинами \triangle , найдемъ: $\triangle ABC = \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle AOC = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr$.

2) Означимъ буквою G центръ описаннаго круга около $\triangle ABC$. Опустимъ перпендикуляръ AD на BC и перпендикуляръ GE на AC . Тогда $\angle AGE = \angle ABC$, а потому $\triangle ABD \sim \triangle AGE$. Откуда $AD : AE = AB : AG$ или $AD = \frac{AB \cdot AE}{AG} = \frac{cb}{2R}$, а $\triangle ABC = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{abc}{4R}$.

87. О центрѣ вѣвписаннаго круга въ $\triangle ABC$, касающагося стороны BC въ D и продолженій сторонъ AB и AC въ E и F . Тогда $OD = OE = OF = r_a$. Соединимъ точку O съ точками A , B и C ; найдемъ: $\triangle ABC = \triangle AOB + \triangle AOC - \triangle BOC = \frac{1}{2}AB \cdot OE + \frac{1}{2}AC \cdot OF - \frac{1}{2}BC \cdot OD = \frac{1}{2}c \cdot r_a + \frac{1}{2}b \cdot r_a - \frac{1}{2}a \cdot r_a = \frac{1}{2}(c+b-a)r_a = (p-a)r_a$.

88. Пусть a меньшая сторона $\triangle ABC$. По условію, $bc = a \cdot 2r$; слѣдовательно, $\frac{bc}{2a} = r = \frac{abc}{4q}$ (V, 86); откуда $q = \frac{1}{2}a^2$.

$$89. 2Rr \text{ (V, 86)} = \frac{abc}{a+b+c} = ac \cdot \frac{a+c}{2} : \frac{3(a+c)}{2} = \frac{ac}{3}.$$

90. Стороны составленнаго \triangle будутъ a' , b' и c' ; периметръ $2p'$ и площадь q' . Тогда $a' = p - a$, $b' = p - b$ и $c' = p - c$; $q = \frac{q'}{p'}$ (V, 86) и $q' = \frac{a'b'c'}{4q'}$ (V, 86); слѣд. $2qq' = \frac{a'b'c'}{2p'} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{3p-(a+b+c)} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} = \frac{q^3}{p^2} = r^2$, откуда $r^2 = 2qq'$.

91. Стороны \triangle будутъ $b+c$, $c+a$ и $a+b$; площадь q' ; периметръ $2p' = 2a+2b+2c$; слѣд. $p' - (b+c) = a$, $p' - (c+a) = b$ и $p' - (a+b) = c$. Тогда $r^2 = \frac{q'^2}{p'^2} = \frac{(a+b+c)abc}{(a+b+c)^2} = \frac{abc}{a+b+c}$; откуда $\frac{1}{r^2} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}$.

92. $\triangle ABC = \frac{1}{2}r(\alpha + \beta + \gamma)$; $\triangle PBC = \frac{1}{2}r_1(\beta + \gamma + \alpha)$, $\triangle CPA = \frac{1}{2}r_2(\gamma + \alpha + \beta)$ и $\triangle APB = \frac{1}{2}r_3(\alpha + \beta + \gamma)$. Но $\triangle PBC + \triangle CPA + \triangle APB = \triangle ABC$; слѣдовательно $r_1(\beta + \gamma + \alpha) + r_2(\gamma + \alpha + \beta) + r_3(\alpha + \beta + \gamma) = r(\alpha + \beta + \gamma)$ или $(r_2 + r_3)\alpha + (r_3 + r_1)\beta + (r_1 + r_2)\gamma = (r - r_1)\alpha + (r - r_2)\beta + (r - r_3)\gamma$.

$$93. (r_2 + r_3) \sqrt{\frac{r_1}{r_2 r_3}} = q \left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = q \cdot \frac{2p-(b+c)}{(p-b)(p-c)} \times \\ \times \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{qa}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{qa}{q} = a.$$

$$94. \frac{ab - r_1 r_2}{r_3} = \left\{ ab - \frac{q}{p-a} \cdot \frac{q}{p-b} \right\} : \frac{q}{p-c} = \frac{p-c}{q} \left\{ ab - \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)} \right\} = \\ = \frac{p-c}{q} \left\{ ab - p(p-c) \right\} = \frac{p-c}{q} \left\{ ab - \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \right\} = \frac{p-c}{4q} \left\{ c^2 - (a-b)^2 \right\} = \\ = \frac{p-c}{4q} (c+a-b)(c-a+b) = \frac{p-c}{4q} \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-a) = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pq} = \\ = \frac{q^3}{pq} = \frac{q}{p}. \text{ Другія отношенія тоже равны } \frac{q}{p}.$$

$$95. r = \frac{q}{p}, \quad r_a = \frac{q}{p-a}, \quad r_b = \frac{q}{p-b} \quad \text{и} \quad r_c = \frac{q}{p-c}, \quad \text{а потому} \quad rr_a + r_b r_c = \frac{q^2}{p(p-a)} + \frac{q^2}{(p-b)(p-c)} = (p-b)(p-c) + p(p-a) = 2p^2 - p(a+b+c) + bc = 2p^2 - p \cdot 2p + bc = bc.$$

96. Заменяя r, r_a, r_b и r_c ихъ величинами, получимъ требуемое равенство.

$$97. r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \frac{q^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{q^2}{(p-b)(p-c)} + \frac{q^2}{(p-c)(p-a)} = p(p-c) + p(p-a) + p(p-b) = 3p^2 - p(a+b+c) = p^2.$$

$$98. r_a r_b r_c = \frac{q}{p-a} \cdot \frac{q}{p-b} \cdot \frac{q}{p-c} = \frac{pq^3}{q^3} = pq. \quad 99. rr_a r_b r_c = \frac{q}{p} \cdot pq = q^2.$$

$$100. \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{q} + \frac{p-b}{q} + \frac{p-c}{q} = \frac{3p - (a+b+c)}{q} = \frac{p}{q} = \frac{1}{r}.$$

$$101. (r_a - r_b)(r + r_c) = \left(\frac{q}{p-a} - \frac{q}{p-b} \right) \left(\frac{q}{p} + \frac{q}{p-c} \right) = \frac{q(a-b)}{(p-a)(p-b)} \cdot \frac{q(2p-c)}{p(p-c)} = (a-b)(2p-c) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

$$102. 2(r_a r_b - rr_c) = 2 \left(\frac{q}{p-a} \cdot \frac{q}{p-b} - \frac{q}{p} \cdot \frac{q}{p-c} \right) = 2q^2 \cdot \frac{pa+pb-pc-ab}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2\{p(a+b-c) - ab\} = a^2 + b^2 - c^2.$$

103. $q = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ или $ah_a = bh_b = ch_c$. Откуда $a : \frac{1}{h_a} = b : \frac{1}{h_b} = c : \frac{1}{h_c}$ или $(a+b+c) : \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = a : \frac{1}{h_a}$. Но $q = \frac{1}{2}(a+b+c)r$ и $q = \frac{1}{2}ah_a$; откуда $a+b+c = \frac{2q}{r}$ и $a = \frac{2q}{h_a}$. Подставляя эти величины въ предыдущее равенство, получимъ: $\frac{2q}{r} : \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) = 2q$ или $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$. Также (V, 86) $q = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}(b+c-a)r_a = \frac{1}{2}(a+c-b)r_b = \frac{1}{2}(a+b-c)r_c$. Откуда $a+b+c = \frac{ah_a}{r}$, $b+c-a = \frac{ah_a}{r_a}$, $a+c-b = \frac{ah_a}{r_b}$ и $a+b-c = \frac{ah_a}{r_c}$. Вычти изъ перваго равенства второе, найдемъ: $2a = \frac{ah_a}{r} - \frac{ah_a}{r_a}$ или $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \right)$, а сложивъ третье равенство съ четвертымъ, получимъ: $2a = \frac{ah_a}{r_b} + \frac{ah_a}{r_c}$ или $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right)$.

104. Поступаемъ такъ же, какъ въ 103 задачѣ.

$$105. h_a h_b h_c = \frac{2q}{a} \cdot \frac{2q}{b} \cdot \frac{2q}{c} = \frac{(2q)^3}{abc} = \frac{\{(a+b+c)r\}^3}{abc} = \frac{(a+b+c)^3}{abc} \cdot r^3.$$

$$106. r_a r_b r_c = pq, \quad h_a h_b h_c = \frac{8q^3}{abc}; \quad \text{слѣд.} \quad \frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c} = \frac{pq \cdot abc}{8q^3} = \frac{pabc}{8q^2} \quad \left(q = \frac{abc}{4R} \text{ или } abc = 4qR, \quad p = \frac{q}{r} \right) = \frac{p \cdot 4qR}{8q^2} = \frac{pR}{2q} = \frac{pR}{2pr} = \frac{R}{2r}.$$

107. Изъ равенства, найденнаго въ 104 задачѣ, $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = \frac{h_a h_b h_c}{r}$
 $= \frac{8q^3}{rabc} = \frac{2q^2}{r} \cdot \frac{4q}{abc} = \frac{2q^2}{r} \cdot \frac{1}{R} = \frac{2p^2 r^2}{rR} = \frac{2p^2 r}{R}$, а $\frac{p^2}{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a} = p^2 : \frac{2p^2 r}{R} = \frac{R}{2r}$.

108. J центръ вписаннаго круга въ $\triangle ABC$. Опустимъ $\perp \perp OD$ и JE на AB ; тогда D и E будутъ точками касанія; $AD=p-a$, $AE=p$, гдѣ $2p=a+b+c$. $\triangle AOB \oslash \triangle JAC$; слѣд. $OA : c = b : AJ$ или $OA \cdot AJ = bc$. $\triangle AOE \oslash \triangle AJD$, а потому $AE : AD = AO : AJ$ или $p : (p-a) = AO^2 : AO \cdot AJ = AO^2 : bc$; $\triangle AOE \oslash \triangle AJD$, а потому $OB : JC = OA : AC$; отсюда $\frac{OB^2}{bc} = \frac{JC^2}{ab} \cdot \frac{OA^2}{bc} = \frac{p-c}{p} \cdot \frac{p}{p-a} = \frac{p-c}{p-a}$. Также $\frac{OC^2}{ab} = \frac{p-b}{p-a}$. Слѣдовательно, $\frac{OA^2}{bc} - \frac{OB^2}{ca} - \frac{OC^2}{ab} = 1$ или $a \cdot OA^2 - b \cdot OB^2 - c \cdot OC^2 = abc$.

109. D , E и F центры окружностей, описанныхъ на BC , CA и AB въ $\triangle ABC$; P центръ окружности, касающейся данныхъ. Точки касанія будутъ очевидно на PD , PE и PF . Тогда $d=2PD+a=2PE+b=2PF+c$; откуда $2d=2(PE+PF)+b+c$, а $PE+PF=d-\frac{1}{2}(2p-a)=d-p+\frac{1}{2}a$; слѣд. $PE+PF+EF=d-p+a$. Если $2p_1$ периметръ $\triangle DEF$, то $p_1=\frac{1}{2}(d-p+a)$. Но

$$\triangle DEF = \triangle PEF + \triangle PFD + \triangle PDE \dots (1); \triangle DEF = \sqrt{\frac{p}{2} \cdot \frac{p-a}{2} \cdot \frac{p-b}{2} \cdot \frac{p-c}{2}},$$

$$\triangle PEF = \sqrt{\frac{d-p+a}{2} \cdot \frac{d-p}{2} \cdot \frac{p-c}{2} \cdot \frac{p-b}{2}}, \triangle PFD = \sqrt{\frac{d-p+a}{2} \cdot \frac{d-p}{2} \cdot \frac{p-c}{2} \cdot \frac{p-a}{2}}$$

$$\text{и } \triangle PDE = \sqrt{\frac{d-p+a}{2} \cdot \frac{d-p}{2} \cdot \frac{p-a}{2} \cdot \frac{p-b}{2}}. \text{ Подставивъ эти величины въ (1)}$$

равенство, раздѣлимъ всѣ члены на $\sqrt{\frac{d-p}{2} \cdot \frac{p-a}{2} \cdot \frac{p-b}{2} \cdot \frac{p-c}{2}}$; получимъ требуемое равенство.

110. Пусть R радиусъ описаннаго круга. Тогда $\diamond ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$ (V, 86) $= \frac{AB \cdot AD \cdot BD}{4R} + \frac{BD \cdot BC \cdot CD}{4R} = \frac{BD}{4R} (AB \cdot AD + BC \cdot CD)$.

Точно такъ же $\diamond ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD = \frac{AC}{4R} (AB \cdot BC + AD \cdot CD)$. Слѣдовательно, первыя части въ этихъ равенствахъ будутъ равны, а потому можно составить требуемую пропорцію.

111. Означимъ буквою q площ. $\triangle ABC$ и буквами h , k и l длины AO , BO и CO . Тогда $\frac{1}{2}a\beta(A'B+A'O+BO) = \triangle BOA' = \frac{1}{2}q$ или $a\beta(A'B + \frac{1}{2}h+k) = \frac{1}{2}q$.

Также $a_\gamma(CA' + \frac{1}{2}h+l) = \frac{1}{2}q$; отсюда $k-l = \frac{q}{3}\left(\frac{1}{a\beta} - \frac{1}{a_\gamma}\right)$. Подобнымъ образомъ

найдемъ: $l-h = \frac{q}{3}\left(\frac{1}{b_\gamma} - \frac{1}{b_\alpha}\right)$ и $h-k = \frac{q}{3}\left(\frac{1}{c_\alpha} - \frac{1}{c_\beta}\right)$. Сложивъ послѣднія три равенства, получимъ требуемое.

112. Пусть q и Q площади правильн. вписан. и описан. многоугольникоу того же числа сторонъ для круга O ; AB бокъ прав. вписаннаго многоуг.; ON радиусъ круга, \perp къ AB въ точкѣ J . Черезъ точку N про-

ведемъ прямую $\parallel AB$ до пересѣченія съ продолженіями радіусовъ OA и OB въ точкахъ C и D . Имѣемъ $Q:q=OC^2:OA^2$ или $(Q-q):q=(OC^2-OA^2):OA^2$. Пусть q' площ. правильн. многоуг. съ тѣмъ же числомъ сторонъ, вписаннаго въ кругъ радіуса CN . Тогда $q':q=CN^2:ON^2$; откуда $(Q-q):q'=(OC^2-OA^2):CN^2=(OC^2-ON^2):CN^2=1$; слѣдовательно, $Q-q=q'$.

Точно такъ же $Q:q=ON^2:OJ^2$ или $(Q-q):Q=(ON^2-OJ^2):ON^2$. Пусть Q' площадь прав. многоуг. того же числа сторонъ, опис. около круга радіуса AJ . Тогда $Q':Q=AJ^2:ON^2$ и, сравнивъ эту пропорцію съ предыдущей, получимъ: $(Q-q):Q'=(ON^2-OJ^2):AJ^2=(OA^2-OJ^2):AJ^2=1$; отсюда $Q-q=Q'$.

113. 1) Видимъ (фиг. 78, стран. 374), что $q=2n \cdot \triangle AOH$, $Q=2n \cdot \triangle COE$, $q'=2n \cdot \triangle AOE$ и $Q'=4n \cdot \triangle FOE$. Имѣемъ: $\triangle AOH:\triangle AOE=OH:OE$ и $\triangle AOE:\triangle COE=OA:OC$; но $OH:OE=OA:OC$, и потому $\triangle AOH:\triangle AOE=\triangle AOE:\triangle COE$, или, умноживъ всѣ члены на $2n$, найдемъ: $q:q'=q':Q$. Откуда $q'=\sqrt{Qq}$.

2) FO есть равнодѣл. $\angle COE$. Поэтому $CF:EF=OC:OE$ или $CE:EF=(OC+OE):OE$; $\triangle COE:\triangle FOE=CE:EF=(OC+OE):OE$; $OC:OE=OC:OA=OE:OH=\triangle AOE:\triangle AOH$ и потому $\triangle COE:\triangle FOE=(\triangle AOE+\triangle AOH):\triangle AOH$. Умноживъ члены перваго отношенія на $4n$, а второго на $2n$, получимъ: $2Q:Q'=(q+q'):q$; откуда $Q'=\frac{2Qq}{q+q'}$.

3) $Q'-q'=4n \cdot \triangle FOE-2n \cdot \triangle AOE=2n \cdot \triangle AEOF-2n \cdot \triangle AOE=2n \cdot \triangle AFE$; $Q-q=2n \cdot \triangle COE-2n \cdot \triangle AOH=2n \cdot \triangle ACEN$. Слѣд. надо показать, что $\triangle AFE < \frac{1}{2} \triangle ACEN$, или $\frac{1}{2}EF \cdot EH < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(AH+CE) \cdot EH$ или $EF < \frac{1}{2}(AH+CE)$. Такъ какъ AE равнод. $\angle BAF$, то $EF=AF=AK=EK$; $\triangle CAF \sim \triangle ENK$ и слѣд. $CF:EK=AF:KN$ или $CF:EF=EF:KN$; откуда $EF=\sqrt{CF \cdot KN}$. Но среднее geometr. вѣсколькихъ чиселъ менѣе средняго ариметическаго тѣхъ же чиселъ, а потому $EF < \frac{1}{2}(CF+KN)$ или $EF < \frac{1}{2}(CE+AH)$.

114. Поступая, какъ въ 32 зад. IV отд., найдемъ требуемое отношеніе.

115. На основаніи 113 теоремы, получимъ:

$$(q_m)^2 = q_{m-1} \cdot Q_{m-1} \quad (1) \text{ и } Q_m = 2 \cdot \frac{q_{m-1} \cdot Q_{m-1}}{q_{m-1} + q_m} \quad (2). \text{ Слѣд. } \frac{Q_m}{(q_m)^2} = \frac{2}{q_{m-1} + q_m} \quad (3).$$

Поставивъ во (2) равенствѣ $m-1$, $m-2$, ..., 2, 1 и 0 вмѣсто m , получимъ:

$$Q_{m-1} = 2 \cdot \frac{q_{m-2} \cdot Q_{m-2}}{q_{m-2} + q_{m-1}}, \quad Q_{m-2} = 2 \cdot \frac{q_{m-3} \cdot Q_{m-3}}{q_{m-3} + q_{m-2}}, \dots, \quad Q_1 = 2 \cdot \frac{q_0 \cdot Q_0}{q_0 + q_1}.$$

Перемноживъ эти равенства, найдемъ:

$$Q_m = 2^m \cdot Q_0 \cdot \frac{q_0 q_1 \cdot \dots \cdot q_{m-1}}{(q_0 + q_1)(q_1 + q_2) \cdot \dots \cdot (q_{m-1} + q_m)} \quad (4).$$

Раздѣливъ (4) равенство на (3); получимъ:

$$(q_m)^2 = 2^{m-1} \cdot Q_0 \cdot \frac{q_0 q_1 \cdot \dots \cdot q_{m-1}}{(q_0 + q_1)(q_1 + q_2) \cdot \dots \cdot (q_{m-2} + q_{m-1})} \quad (5)$$

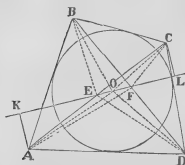
Также $(q_{m-1})^2 = 2^{m-2} \cdot Q_0 \cdot \frac{q_0 q_1 \cdot \dots \cdot q_{m-2}}{(q_0 + q_1) \cdot \dots \cdot (q_{m-3} + q_{m-2})} \quad (6).$

Наконецъ, раздѣлимъ (6) на (5); найдемъ:

$$\left(\frac{q_{m-1}}{q_m}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_{m-2} + q_{m-1}}{q_{m-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{q_{m-2}}{q_{m-1}} + 1\right).$$

116. $\diamond ABCD$ (фиг. 84) описанъ около круга O радиуса R ; F середина

Фиг. 84.

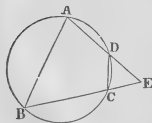


диагонали BD . Требуется доказать, что прямая FO пройдетъ черезъ E , середину диагонали AC . По свойству сторонъ описаннаго четырехугольника, имѣемъ: $AB + CD = AD + BC$ или $\frac{1}{2} AB \cdot R + \frac{1}{2} CD \cdot R = \frac{1}{2} AD \cdot R + \frac{1}{2} BC \cdot R$ или $\triangle AOB + \triangle COD = \triangle AOD + \triangle BOC$; откуда $\triangle AOB + \triangle COD = \frac{1}{2} \diamond ABCD \dots (1)$. Очевидно, что $\frac{1}{2} \triangle ABD + \frac{1}{2} \triangle BCD = \frac{1}{2} \diamond ABCD$ или $\triangle AFB + \triangle CFD = \frac{1}{2} \diamond ABCD \dots (2)$. Изъ (1) и (2) равенствъ получимъ: $\triangle AOB + \triangle COD = \triangle AFB + \triangle CFD$, или $\triangle COD - \triangle CFD = \triangle AFB -$

$-\triangle AOB$, или $\triangle COF + \triangle DOF = \triangle BOF + \triangle AOF$; но $\triangle DOF = \triangle BOF$, а потому $\triangle COF = \triangle AOF$. Отсюда выходитъ, что $\perp \perp AK$ и CL , опущенные на прямую EF , равны. Теперь видимъ, что $\angle AOK = \angle COL$ и слѣд. $AE = CE$, т.-е. прямая FO проходитъ черезъ середину диагонали AC .

117. $\diamond ABCD$ вписанъ въ кругъ и притомъ $AB + CD = BC + AD$. Поло-

Фиг. 85.



жимъ, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$. Продолжимъ стороны AD и BC до ихъ пересѣченія въ точкѣ E . Тогда $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, и слѣдовательно $\triangle ABE : \triangle CDE = a^2 : c^2$, или $(\triangle ABE - \triangle CDE) : \triangle ABE = (a^2 - c^2) : a^2$ или $\diamond ABCD : \triangle ABE = (a^2 - c^2) : a^2$; откуда

$$\diamond ABCD = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cdot \triangle ABE.$$

Изъ подобія $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$ также имѣемъ, что $AE : CE = a : c$ или $AE : (BE - b) = a : c$ и $BE : DE = a : c$ или $BE : (AE - d) = a : c$; изъ этихъ уравненій най-

демъ, что $BE + AE = \frac{a(b+d)}{a-c}$ и $BE - AE = \frac{a(b-d)}{a+c}$. Теперь, имѣя въ виду, что $a+c=b+d$, получимъ:

$$AE + BE + AB = \frac{a(b+d)}{a-c} + a = \frac{a(b+d+a-c)}{a-c} = \frac{2a^2}{a-c},$$

$$AE + BE - AB = \frac{a(b+d-a+c)}{a-c} = \frac{2ac}{a-c}.$$

$$BE - AE + AB = \frac{a(b-d+a+c)}{a+c} = \frac{2ab}{a+c}$$

$$AB + AE - BE = \frac{a(a+c-b+d)}{a+c} = \frac{2ad}{a+c}.$$

и

$$\text{Откуда } \triangle ABE = \sqrt{\frac{a^2}{a-c} \cdot \frac{ac}{a-c} \cdot \frac{ab}{a+c} \cdot \frac{ad}{a+c}} = \frac{a^2}{a^2-c^2} \cdot \sqrt{abcd}$$

$$\text{и слѣд. } \diamond ABCD = \frac{a^2-c^2}{a^2} \cdot \triangle ABE = \frac{a^2-c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{a^2-c^2} \cdot \sqrt{abcd} = \sqrt{abcd}.$$

118. BG пересѣкаетъ OD въ K . $\triangle BOG = \triangle DON$ и слѣд. $\diamond DHGK = \triangle OKB$. Прибавивъ къ обѣимъ частямъ по $\triangle BKD$, получимъ исконое равенство.

119. Площ. сект. $AOB = \frac{1}{2}AO \cdot \cup AB$ и $\triangle AOB = \frac{1}{2}BO \cdot AD = \frac{1}{2}AO \cdot \cup AC$; отсюда площадь сегмента $ACB = \frac{1}{2}AO \cdot \cup BC$ = площади сектора BOC .

120. 1) $\angle DOA = d = \angle ODB$, и слѣд. линія ADB будетъ прямая.

2) Площ. $OACB$: площ. $OEDA = \frac{1}{2}OA^2 : \frac{1}{2}(\frac{1}{2}OA)^2 = 2 : 1$. Также площадь $OACB =$ площ. $OEDA$ + площ. $OEDB$ + площ. $ACBD = 2$ площ. $OEDA$ + + площ. $ACBD$ - площ. $OEDF$. Отсюда видимъ, что фигура $ACBD$ равно-мѣрна фигурѣ $OEDF$.

3) $\angle DOA = \angle OBD$. Откуда площ. сегм. $DA =$ площ. сегм. OFD и площ. фигуры $OFDA = \triangle ODA = \frac{1}{2}OA^2$ и также площ. фигуры $OEDB = \triangle ODB = \frac{1}{2}OA^2$.

121. Пусть O центръ полуокруга и E точка на дугѣ CD . Площадь фигуры $CAD E =$ площ. $\triangle CAD$ + площ. сегмента $CED =$ площ. $\triangle COD$ + площадь сегмента $CED =$ площ. сектора $CODE = \frac{1}{2}$ площ. полуокруга $ACDB$.

122. Площадь квадранта $= \frac{1}{4}\pi r^2$; хорда $AB = r\sqrt{2}$ и площ. полуокруга $ACB = \frac{1}{2}\pi r^2$. Слѣд. площ. квадранта = площ. полуокруга. Отнявъ отъ обѣихъ площадей по площади ADB , найдемъ, что площ. $\triangle AOB =$ площ. $ACBD$.

123. Возьмемъ полуокругъ ADB и изъ произвольной точки C прямой AB воставимъ $\perp CD$; на AC и BC опишемъ полуокруги AEC и BFC . Искомая площадь = площ. ABD - площ. AEC - площ. $BFC = \frac{1}{2}\pi AB^2 - \frac{1}{2}\pi AC^2 - \frac{1}{2}\pi BC^2 = = \frac{1}{2}\pi (AB^2 - AC^2 - BC^2)$; но $AB^2 = (AC+BC)^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC$ и потому искомая площадь $= \frac{1}{2}\pi \cdot 2AC \cdot BC = \frac{1}{2}\pi AC \cdot BC = \frac{1}{2}\pi CD^2$.

124. Пусть r и r' радиусы круговъ; $AB=c$, $BC=a$ и $AC=b$. Слѣдовательно $r = \frac{\triangle ABD}{\frac{1}{2} \text{ пер. } \triangle ABD} = \frac{AD \cdot BD}{AB+AD+BD} = \frac{bc}{a} \cdot \frac{c^2}{a} : \left(c + \frac{bc}{a} + \frac{c^2}{a}\right) = \frac{bc^2}{a(a+b+c)}$ и $r' = \frac{b^2c}{a(a+b+c)}$. Поэтому $\frac{\text{площ. круга въ } \triangle ABD}{\text{площ. круга въ } \triangle ADC} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}$.

125. Пусть $OA=a$ и $OB=r$; r_1, r_2, r_3, \dots радиусы круговъ, гдѣ $r_1 > r_2 > r_3 \dots$. Имѣемъ: $\frac{r_1}{a-r-r_1} = \frac{r}{a}$; откуда $\frac{r_1}{a-r} = \frac{r}{a+r}$ или $\frac{r_1}{a} = \frac{a-r}{a+r}$. Также $\frac{r_2}{r} =$

$$= \frac{(a-r)^2}{(a+r)^2}, \dots \text{ Слѣд. } \frac{\text{сумма площ. круговъ}}{\text{площ. большого круга}} = \frac{\pi r^2 \left[1 + \frac{(a-r)^2}{(a+r)^2} + \dots \right]}{\pi r^2} =$$

$$= 1 + \frac{(a-r)^2}{(a+r)^2} + \frac{(a-r)^4}{(a+r)^4} + \dots = \frac{(a+r)^2}{4ar}.$$

126. Возьмемъ $\angle O$. Изъ O опишемъ дуги радиусами r и r' , гдѣ $r > r'$, которыя пересѣкутъ бока угла въ точкахъ A и B , A' и B' . Означивъ буквою M середину AA' , опишемъ изъ O дугу радиусомъ OM , кот. пересѣчетъ BB' въ M' . Искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}(OA \cdot \cup AB - OA' \cdot \cup A'B') = \frac{1}{2}\left(\frac{OA^2 \cdot MM'}{OM} - \frac{OA'^2 \cdot MM'}{OM}\right) = \frac{MM'}{2OM} \times \\ \times (OA^2 - OA'^2) = \frac{MM'}{2OM} \cdot AA'(OA + OA') = \frac{MM'}{2OM} \cdot AA' \cdot 2OM = AA' \cdot MM'.$$

127. Полуокружн. AP_{m-1} : полуокружн. $AB=AP_{m-1}$: AB и полуокружн. BP_{m-1} : полуокружн. $AB=BP_{m-1}$: AB ; сложивъ почленно эти равенства и замѣтивъ, что во второй части числитель=знаменателю, получимъ: периметръ $AP_{m-1}B$ =полуокружн. AB и периметръ $AP_{m-1}BP_mA=2$ полуокружностямъ AB =окружности данного круга. Сверхъ того $AP_m=m \cdot \frac{AB}{n}$,

а потому площадь полукруга AP_m : площади круга $AB=\left(\frac{m}{n}AB\right)^2$: $2AB^2=$
 $=m^2:2n^2$ и площадь полукруга AP_{m-1} : площади круга $AB=(m-1)^2:2n^2$.
 Вычтя одно равенство изъ другого, получимъ: пл. фиг. $AP_{m-1}P_m$: пл. круга $AB=(2m-1):2n^2$ и точно такъ же пл. фиг. $BP_{m-1}P_m$: пл. круга $AB=[2(n-m)+1]:2n^2$. Сложивъ почленно эти равенства, найдемъ площадь фигуры $AP_{m-1}BP_mA$: площ. круга $AB=2n:2n^2=1:n$.

128. Пусть q, q', q'', \dots площади правильн. вписан. многоугольниковъ о $n, 2n, 4n, \dots$ сторонахъ; Q, Q', Q'', \dots площади правильн. описанныхъ многоуг. около того же круга о $n, 2n, 4n, \dots$ сторонахъ; s площадь круга. Тогда

$$s = q + (q' - q) + (q'' - q') + \dots;$$

легко показавъ, что $q' - q < \frac{1}{2}(Q - q)$, $q'' - q' < \frac{1}{2}(Q' - q')$, \dots

и кромѣ того извѣстно, что $Q' - q' < \frac{1}{4}(Q - q)$ и потому

$$q'' - q' < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(Q - q), \quad q''' - q'' < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(Q' - q'), \dots;$$

слѣд. $s < q + \frac{1}{2}(Q - q) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(Q - q) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}(Q - q) + \dots$

или $s < q + \frac{2}{3}(Q - q)$.

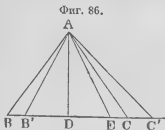
129. Даны стороны a и b . На произвольной прямой отложимъ $AB=a$ и изъ A опишемъ дугу радиусомъ b . Если примемъ AB за основаніе, то тотъ изъ \triangle будетъ имѣть наибольшую площадь, кот. имѣетъ наибольшую высоту; наибольшая же высота \triangle будетъ тогда, когда изъ точки A воспоставимъ \perp до пересѣченія съ окружностью въ C . Слѣд. $\triangle CAB$ будетъ искомымъ.

130. На данномъ основаніи BC построимъ сегментъ BDC , вмѣщающій данный уголъ. Очевидно, что тотъ \triangle будетъ наибольшимъ, у кот. наибольшая высота, т.-е. когда высота равна перпендикулярѣ, воспоставленному изъ середины BC до пересѣченія съ дугою BDC въ точкѣ A . Въ этомъ же случаѣ $\triangle ABC$ будетъ равнобедреннымъ.

131. На основаніи BC построимъ $\triangle ABC$, равнобѣрный данному, и проведемъ прямую $XAY \parallel BC$. Опишемъ окружность, проходящую черезъ точки B и C и касающуюся прямой XU въ точкѣ E ; эта окружность пересѣчетъ AB въ точкѣ D . Тогда $\angle BEC = \angle BDC$ и болѣе $\angle BAC$, т.-е. что $\triangle EBC$ имѣетъ при вершинѣ E наибольшій уголъ.

132. Положимъ $\diamond ABCD$, вписанный въ кругъ O , имѣетъ наибольшую площадь. Но $\triangle ABC$ имѣетъ maximum, когда $AB=BC$. Такимъ же образомъ покажемъ, что $BC=CD=DA$, т.-е. въ $\diamond ABCD$ стороны равны, а слѣд. онъ будетъ квадратъ.

133. Такъ какъ треугольники (фиг. 86) будутъ имѣть одинаковую высоту, то достаточно показать, что равнобедренный \triangle имѣетъ, при этихъ данныхъ, наименьшее основаніе. Положимъ, что имѣемъ равнобедренные $\triangle ABC$ и $AB'C'$, у кот. высота AD и $\angle BAC = \angle B'AC'$. Основанія BC и $B'C'$ этихъ \triangle имѣютъ общую часть $B'C$, а потому надо показать, что $BB' < CC'$. Отложимъ на CD часть $CE = BB'$ и E соединимъ съ A . Тогда $\angle CAE = \angle BAV' = \angle SAC'$ и слѣд. AC будетъ равнод. $\angle EAC'$; поэтому $EC : CC' = AE : AC'$. Здѣсь $AE < AC'$, а потому $EC < CC'$ или $BB' < CC'$.



134. Пусть ABC будетъ равнобедренный \triangle , а GBC неравнобедренный и въ которыхъ $AB + AC = BG + CG$. На продолженіи BA , отложимъ часть $AD = AC$ и D соединимъ съ G и C ; тогда $BG + DG > BD$, или $BG + DG > AB + AC$ или $BG + DG > BG + CG$; слѣд. $DG > CG$. Такъ какъ наклонная $DG > CG$, то G лежитъ по одну сторону съ точкою C относительно $\perp FA$, возставленнаго изъ F , середины CD . Теперь, опустивъ $\perp AE$ и GK на BC , увидимъ, что $AE > GK$, т.-е. площ. $\triangle ABC >$ площ. $\triangle GBC$.

135. На данномъ основаніи BC построимъ $\triangle ABC$, равновеликій данному. Тогда вершины \triangle , имѣющихъ основаніе BC и равновеликихъ съ $\triangle ABC$, будутъ лежать на прямой $XU \parallel BC$ и проходящей черезъ A . Опустимъ $\perp BE$ на XU и, продолживъ его, отложимъ $EF = EB$; тогда $AF = AB$. Чтобы сумма: $AF + AC$ была наименьшею, очевидно необходимо, чтобы точки F , A и C лежали на одной прямой, т.-е. чтобы точка A лежала въ G , точкѣ пересѣченія прямыхъ CF и XU . Въ этомъ случаѣ, $\angle GBC = \angle BGE = \angle FGE = \angle GCB$, т.-е. $\triangle BGC$ будетъ равнобедренный.

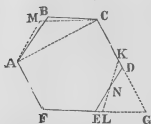
136. Пусть $ABCD$ будетъ одинъ изъ прямоугольниковъ, имѣющихъ данную площадь. Продолжимъ сторону AD и отложимъ часть $DE = DC$. На AE опишемъ полуокружность и продолжимъ CD до пересѣченія съ полуокружн. въ точкѣ F ; тогда FD будетъ стороною квадрата, равновеликаго прямоугольнику $ABCD$. Но FD менѣе радіуса, т.-е. $FD < \frac{1}{2}(AD + DC)$; умноживъ обѣ части неравенства на 4, получимъ: $4FD < 2(AD + DC)$, гдѣ $4FD$ периметръ квадрата, а $2(AD + DC)$ периметръ прямоугольника.

137. На основаніи BC даннаго \triangle построимъ равнобедренный $\triangle ABC$, равномѣрный данному квадрату. Тогда периметръ равнобедреннаго $\triangle ABC$ будетъ менѣе периметра всякаго другого треугольника, имѣющаго то же основаніе и ту же площадь (V, 135). Чтобы найти сторону квадрата, равномѣрнаго $\triangle ABC$, опустимъ $\perp AD$ на BC и, продолживъ AD , отложимъ $DE = BD$; на AE , какъ діаметръ, опишемъ окружность, кот. пересѣчетъ BC въ F и H . Тогда DF будетъ стороною квадрата, потому что площадь $\square = \triangle ABC = AD \cdot \frac{1}{2}BC = AD \cdot DE = DF^2$. Но $AE >$ или $= FH$, смотря по тому, FH проходитъ или не проходитъ черезъ центръ круга, а потому

$AD + DE > \text{или} = 2DF$; откуда и подално $AB + BD > 2DF$ или, умноживъ обѣ части на 2, найдемъ, что периметръ $\triangle ABC > \text{периметра } \square$.

138. Пусть многоугольникъ $ABCDEF$ (фиг. 87) будетъ искомымъ, имѣю-

Фиг. 87.



щій изъ всѣхъ изопериметрическихъ многоугольниковъ того же числа сторонъ наибольшую площадь. Построимъ на AC равнобедренный $\triangle AMC$ одинаковаго периметра съ $\triangle ABC$; тогда (V, 134) $\triangle AMC$ будетъ болѣе $\triangle ABC$, а слѣд. многоуг. $AMCDEF$, будучи изопериметрическимъ и одинаковаго числа сторонъ съ многоуг. $ABCDEF$, имѣетъ большую площадь, чѣмъ многоуг. $ABCDEF$; поэтому необходимо, чтобы $AB = BC$. Точно такъ же докажемъ, что и остальные сто-

роны должны быть также равны. Углы многоуг. $ABCDEF$ тоже должны быть равны, потому что, въ противномъ случаѣ, придемъ къ невозможному. Дѣйствительно, положимъ, напримѣръ, что $\angle E$ менѣе $\angle D$; тогда, продолживъ стороны FE и CD до пересѣченія въ G , найдемъ, что $GD > GE$. Отложимъ на GC часть $GK = EG$, а на GF часть $GL = GD$ и проведемъ прямую KL , кот. пересѣчетъ ED въ N . $\triangle LK = \triangle EGD$, а потому $LK = ED$; отнявъ отъ обоихъ треугольниковъ по $\triangle LNDG$, найдемъ, что $\triangle LNE = \triangle KND$ и $LE = KD$. Слѣд., допустивъ неравенство $\angle E$ и D , увидимъ, что многоугольникъ $ABCKLF$, будучи изопериметрическимъ и одинаковаго числа сторонъ съ многоугольникомъ $ABCDEF$, равновеликъ ему, что противно основному положенію; поэтому $\angle E = \angle D$. Такимъ же образомъ докажемъ, что остальные углы равны между собою.

139. Пусть многоуг. $ABCDEF$ (фиг. 87) будетъ искомымъ, имѣющимъ изъ всѣхъ равновеликихъ и одинаковаго числа сторонъ наименьшій периметръ. Построимъ на AC равнобедренный $\triangle AMC$, равновеликій $\triangle ABC$; тогда периметръ $\triangle AMC$ будетъ менѣе периметра $\triangle ABC$ (V, 135). Слѣдовательно периметръ многоуг. $AMCDEF$ будетъ менѣе периметра многоугольника $ABCDEF$; поэтому необходимо, чтобы $AB = BC$. Такъ же докажемъ, что и остальные стороны многоугольника будутъ равны. Углы многоугольника должны быть также равны, что легко обнаружить, употребляя пріемъ, указанный въ 138-й теоремѣ.

140. Пусть точка M на сторонѣ AB . Отложимъ на CD часть $CN = AM$, и получимъ искомую прямую MN .

141. Прямая, проходящая чрезъ M и середину діагонали AD , искомая.

142. Проведемъ прямую чрезъ D и середину стороны BC , которая пересѣчетъ продолженіе AB въ E . $\triangle AED$ будетъ искомымъ.

143. Рѣшеніе то же, что и въ предыдущей задачѣ.

144. Чрезъ середины непараллельныхъ сторонъ проведемъ прямую, перпендикулярную къ основаніямъ, которая съ ними составитъ искомый прямоугольникъ.

145. Возставимъ $\perp \perp BX$ и CY къ BC и чрезъ середину AB проведемъ прямую $\parallel BC$, кот. пересѣчетъ BX и CY въ D и E . $\square BDEC$ искомый.

146. Изъ D , середины AB , проведемъ прямую $DK \parallel BC$ и прямую $CL \parallel AB$, которая пересѣчетъ прямую DK въ E . $\square BDEC$ будетъ искомымъ.

147. Проведемъ чрезъ D , середину AB , хорду $DE \parallel BC$ и хорду $EF \parallel AB$. $\square BDEF$ будетъ искомымъ.

148. Раздѣлимъ сторону BC на четыре равныя части въ E, F и G такъ, чтобы $BE=EF=FG=GC$; проведемъ прямыя AE и DG до ихъ встрѣчи въ точкѣ M . Треугольникъ MAD будетъ искомымъ.

149. Раздѣлимъ AB на n равныхъ частей и чрезъ точки дѣленія проведемъ прямыя, параллельно AD , которыя раздѣлятъ параллелограммъ на n равныхъ частей.

150. Раздѣлимъ сторону AB въ отношеніи m къ n въ точкѣ E ; чрезъ E проведемъ прямую $EX \parallel AD$, которая пересѣчетъ CD въ F . Прямая EF будетъ искома.

151. Каждое изъ оснований раздѣлимъ на n равныхъ частей. Прямыя, проведенныя чрезъ соответствующія точки дѣленія, будутъ искомыя.

152. Въ $\square ABCD$, построимъ $\angle XAD$, равный данному, и положимъ, что прямая AX пересѣчетъ BC въ E . Проведемъ прямую $DY \parallel AE$ до встрѣчи съ BC въ F , получимъ искомый $\square Aefd$.

153. Въ $\square ABCD$, изъ точки A опишемъ дугу радіусомъ a , которая пересѣчетъ BC въ E ; проведемъ прямую $DK \parallel AE$ до встрѣчи съ BC въ F . $\square Aefd$ будетъ искомымъ.

154. (V, 152 и 153). 155. (V, 154). 156. (V, 146 и 154).

157. Изъ A опишемъ дугу радіусомъ a , которая пересѣчетъ BC въ E . Проведемъ прямую $DH \parallel AE$, а изъ A и E опишемъ дуги радіусомъ b , которыя пересѣкутъ прямую DH въ G и H . $\square AEHG$ будетъ искомымъ.

158. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

159. Прямая, проходящая чрезъ вершину треугольника и середину противоположнаго бока, будетъ искома.

160. Прямыя, проходящія чрезъ вершину треугольника и точки дѣленія противоположную сторону на n равныхъ частей, будутъ искомыя.

161. Раздѣлимъ BC въ отношеніи $m : n : r$ въ точкахъ D и E . Прямая AD и AE будутъ искомыя.

162. Раздѣлимъ бокъ AD на n равныхъ частей и точки дѣленія соединимъ съ E . Проведенныя прямыя будутъ искомыя.

163. Если n четное и равно $2m$, то $\triangle ABC$ и ACD раздѣлимъ на m равныхъ частей (V, 160), а если n нечетное, то $\triangle ABC$ и ACD раздѣлимъ на n равныхъ частей и соединимъ ихъ попарно.

164. Пусть D, E и F будутъ середины сторонъ AB, AC и BC . Прямая DE, DF и EF будутъ искомыя.

165. Соединивъ послѣдовательно середины сторонъ AB, BC, CD и DA , получимъ искомый \square .

166. Проведемъ въ $\diamond ABCD$ чрезъ B и D прямыя, параллельныя AC , а чрезъ A и C прямыя, параллельныя BD , получимъ въ пересѣченіи проведенныхъ прямыхъ искомый \square .

167. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ прямая, параллельная основанію и проходящая чрезъ вершину даннаго треугольника.

168. На произвольной прямой XU отложимъ послѣдовательно основанія AB, BC, \dots и MN данныхъ $\triangle ABC$; изъ какой-либо точки P прямой XU возставимъ \perp , на кот. отложимъ часть $PQ=h$. $\triangle AQN$ будетъ искомымъ.

169. Продолживъ сторону BC , отложимъ часть $BD=n \cdot BC$. Тогда $\triangle ABD$ будетъ искомымъ.

170. На сторонѣ BC отложимъ $BD=\frac{1}{n}BC$; $\triangle ABD$ будетъ искомымъ.

171. Пусть BC и EF основанія данныхъ $\triangle ABC$ и $BC > EF$. Отложимъ на BC часть $BG=EF$; тогда $\triangle ABG$ будетъ искомымъ.

172. Построимъ $\angle XBC=\varphi$ и проведемъ прямую $AU \parallel BC$, которая пересѣчетъ прямую BX въ D . $\triangle DBC$ будетъ искомымъ.

173. Проведемъ прямую $AX \parallel BC$ и прямую BM , которая пересѣчетъ AX въ D . $\triangle DBC$ будетъ искомымъ.

174. Проведемъ прямую $AX \parallel BC$ и изъ середины BC возставимъ \perp , который пересѣчетъ AX въ D . $\triangle DBC$ будетъ искомымъ.

175. На произвольной прямой обложимъ часть $BC=a$ и на BC опишемъ сегментъ, вмѣщающій $\angle A$. Изъ середины BC возставимъ \perp , который пересѣчетъ дугу сегмента въ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

176. Опустимъ $\perp AD$ на BC . Продолживъ DA , отложимъ часть $DE=AD$, и чрезъ E проведемъ прямую $EF \parallel BC$, которая пересѣчетъ прямую XU въ M . $\triangle MBC$ будетъ искомымъ.

177. Чрезъ точку B проведемъ прямую $XU \parallel AC$, а изъ A опишемъ дугу радиусомъ a , кот. пересѣчетъ XU въ E . Изъ A и C проведемъ прямыя, параллельныя EC и EA , до ихъ встрѣчи въ точкѣ F . $\square AECF$ будетъ искомымъ.

178. Чрезъ точку O пересѣченія діагоналей проведемъ прямую $XU \perp AC$, и чрезъ B проведемъ прямую $BK \parallel AC$, кот. пересѣчетъ XU въ E . Отложивъ на прямой XU часть $OF=OE$, получимъ искомымъ ромбъ $AECF$.

179. $\square EFGH$ превратимъ въ равносторонній ему $\square MNPQ$, въ которомъ сторона $MQ=AD$ и $\angle NMQ=\angle BAD$ (V, 152 и 153). Продолживъ AB , отложимъ на ней часть $BK=MN$ и чрезъ K проведемъ прямую $KX \parallel BC$ до встрѣчи съ продолженіемъ бока DC въ L . $\square AKLD$ будетъ искомымъ.

180. Пусть h высота искомага $\triangle ABC$. Проведемъ прямую $XU \parallel BC$ на разстояніи h , кот. пересѣчетъ AB или продолженіе AB въ D ; проведемъ прямую $AK \parallel DC$ до встрѣчи съ BC въ E . $\triangle DBE$ будетъ искомымъ.

181. Проведемъ прямую $AX \parallel BC$, кот. пересѣчетъ прямую BM въ D . $\triangle DBC$ превратимъ въ равносторонній ему $\triangle MBE$, у кот. основаніе BE лежало бы на BC , а вершина въ M (V, 180). $\triangle MBE$ будетъ искомымъ.

182. На BC отложимъ часть $BD=k$ и проведемъ прямую $CX \parallel DA$, которая пересѣчетъ AB или продолженіе AB въ E . $\triangle EBD$ будетъ искомымъ.

183. (V, 172 и 182).

184. $\triangle DEF$ превратимъ въ равносторонній ему $\triangle GEN$, въ которомъ высота равна высотѣ $\triangle ABC$ (V, 180). Тогда, на основаніи BC , отложимъ часть $CK=EN$ и получимъ искомымъ $\triangle ABK$.

185. (V, 180 и 174). 186. (V, 182 и 174).

187. Превратимъ $\triangle ABC$ въ равносторонній ему $\triangle EBD$ (V, 182) и опу-

стиль $\perp EF$ на BD . Отложимъ на ней часть $FC = \frac{1}{n}EF$ и проведемъ прямую $GK \parallel BD$, которая пересѣчетъ прямую XU въ M . $\triangle MBD$ искомымъ.

188. (V, 182 или 180).

189. Продолживъ гипотенузу BC данного \triangle , отложимъ часть $BD=k$ и построимъ $\triangle EBD$, равностороннй $\triangle ABC$ (V, 182). На BD опишемъ окружность и проведемъ прямую $EX \parallel BD$, которая пересѣчетъ окружность въ F и G . $\triangle FBD$ и GED будутъ искомыми.

190. (V, 142 и 189).

191. На AD отложимъ часть $AE=a$ и $\triangle ABD$ превратимъ въ равнобѣдрнй ему $\triangle FAE$ (V, 188). Дальнѣйшее построение очевидно.

192. Продолживъ AC , отложимъ часть $AE=k$. На AE построимъ $\triangle FAE$, равновеликй $\triangle ABC$ (V, 189). Проведемъ изъ A и E прямыя, параллельно FE и FA , до встрѣчи въ точкѣ G . $\square AFEG$ будетъ искомымъ.

193. На AC отложимъ часть $AE=k$ и построимъ $\triangle FAE$, равностороннй $\triangle ABC$. Проведемъ прямую $FX \parallel AE$, а изъ G , середины AE , опишемъ дугу радиусомъ $\frac{1}{2}AE$, которая пересѣчетъ прямую FX въ K . На продолженіи KG , отложимъ часть $GL=KG$ и получимъ искомымъ $\square AKEL$.

194. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

195. $\triangle ABC$ превратимъ въ равностороннй ему $\triangle EBD$, въ кот. сторона $BD=MN$ (V, 182). Опустимъ $\perp EF$ на BD и проведемъ прямую $KL \parallel MN$ на разстояніи $=EF$, которая пересѣчетъ XU въ P . $\triangle PMN$ искомымъ.

196. Проведемъ прямую $DX \parallel CE$, которая пересѣчетъ продолженіе AE въ F . $\diamond ABCF$ будетъ искомымъ.

197. Данный многоугольникъ превратимъ въ равностороннй ему многоугольникъ, имѣющій сторону одною менѣе. Полученный многоугольникъ опять превратимъ въ равностороннй ему многоугольникъ, имѣющій сторону одною менѣе и т. д.

198. Превратимъ многоуг. $ABCDE$ въ равностороннй ему $\triangle BAF$ (V, 197), гдѣ F лежитъ на продолженіи AE ; $\triangle BAF$ превратимъ въ равностороннй ему $\triangle MAG$ (V, 183), гдѣ G лежитъ на продолженіи AE . $\triangle MAG$ искомымъ.

199. Пусть стороны квадратовъ a, b, c, \dots Построимъ \triangle , у кот. катеты a и b ; тогда гипотенуза k этого \triangle будетъ бокомъ квадрата равностороннаго суммѣ квадратовъ, у кот. бока a и b . Построимъ \triangle , у кот. катеты k и c ; тогда гипотенуза его будетъ бокомъ квадрата, равностороннаго суммѣ квадратовъ, у котораго бока a, b и c , и т. д.

200. На AB опишемъ полуокружн. Изъ середины AB возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ полуокружн. въ E . Хорда AE сторона искомаго \square .

201. Построение можно дѣлать какъ въ 198 задачѣ этого отдѣла, или же иначе: построивъ среднюю пропорціональную между AB и $n \cdot AB$, найдемъ сторону искомаго квадрата.

202. Катеть \triangle , у котораго гипотенуза равна AB , а другой катеть равенъ EF , будетъ стороной искомаго квадрата.

203. Продолжимъ меньшую изъ сторонъ, напр. BC , и отложимъ на ней часть $BE=AB$. На BE опишемъ полуокружнсть и продолжимъ DC до встрѣчи съ нею въ F . Хорда BF будетъ стороною искомаго квадрата.

204. Опишем на BC полуокружность и отложим на BC часть $BE=$
 BC . Вспомогательный $\perp EX$ къ BC , который пересѣчетъ полуокружность
 въ F . Тогда BF будетъ стороною искомага квадрата.

205. 1) Построимъ квадраты x^2 и y^2 , равновеликіе $5a^2$ и $3b^2$ (V, 201).
 Тогда, квадратъ, равновеликій суммѣ квадратовъ x^2 и y^2 (V, 199), будетъ
 искомымъ. Можно построить еще такъ. Пусть z сторона искомага квад-

рата, тогда $5a^2 + 3b^2 = z^2$. Откуда $z = \sqrt{a \left(5a + \frac{3b^2}{a} \right)}$ найдемъ построениемъ
 (III, 401).

2) Построимъ на основаніи (V, 199, 202) или же какъ указано въ концѣ
 1-го случая.

3) Пусть x сторона искомага квадрата. Тогда $x = \sqrt{3a^2 + 4ab - \frac{1}{3}b^2}$ и,
 построивъ ея (III, 401), найдемъ сторону искомага квадрата.

206. Построимъ $\triangle ABC$, въ кот. гипотенуза $BC=k$, а сумма катетовъ
 AB и AC равна a (II, 429). Катеты AB и AC будутъ искомыя отрезки.

207. На $AB=k$ построимъ $\triangle ABC$, въ которомъ сумма гипотенузъ BC
 и катета AC равна a . Тогда BC и AC будутъ искомыя отрезки.

208. AB данная прямая. Построимъ $\square AGFB$ и проведемъ равнодѣ-
 лящую $\angle FAB$, кот. пересѣчетъ BF въ E . Построимъ $\angle AEX = \angle EAB$.
 Точка C пересѣченія AB и EX будетъ искома.

209. Пусть a и a' сходственные стороны данныхъ многоугольниковъ.
 Тогда, построивъ \triangle по катетамъ a и a' , построимъ на гипотенузѣ много-
 угольникъ, подобный одному изъ данныхъ и сходственно съ нимъ рас-
 положенный. Построенный многоугольникъ будетъ искомымъ.

210. Такъ какъ равносторонніе \triangle подобны, то приводимся къ пре-
 дущей задачѣ.

211. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 201 задачи этого отдѣла.

212. Пусть Q и a площадь и сторона многоугольника, которому искомымъ
 долженъ быть подобенъ; Q' площадь другого многоугольника. Данные
 многоугольники превратимъ въ равновѣрные треугольники, имѣющіе
 одинаковую высоту, и пусть b и b' будутъ ихъ основанія; тогда x , сто-
 рона искомага многоугольника, опредѣлится изъ пропорціи: $x^2 : a^2 = b' : b$
 (III, 383). Зная бокъ искомага многоугольника, сходственный съ a ,
 легко построить самый многоугольникъ.

213. Пусть a и x сходственные стороны даннаго и искомага много-
 угольниковъ. Тогда $x^2 : a^2 = m : n$. Построивъ x (III, 383), легко построить
 и самый многоугольникъ.

214. На прямой XU отложимъ часть $BC=a$ и проведемъ прямую $KL \parallel$
 $\parallel XU$ на разстояніи $2k^2 : a$. Изъ C опишемъ дугу радіусомъ b , кот. пересѣ-
 четъ прямую KL въ точкахъ A и D . $\triangle ABC$ и DBC будутъ искомыя.

215. На $BC=a$ опишемъ сегментъ, вмѣщающій $\angle A$. Проведемъ пря-
 мую $KL \parallel BC$ на разстояніи $2k^2 : a$, которая пересѣчетъ дугу сегмента
 въ точкахъ A и D . $\triangle ABC$ и DBC будутъ искомыя.

216. На $BC=a$ построимъ $\triangle ABC$, въ которомъ $\angle BDC = \angle XAY$ и
 $\angle FBC = k^2$ (V, 245). На сторонѣ DX отложимъ $AE=FB$, а на AU часть
 $AD=FC$. Прямая DE будетъ искома.

217. Пусть $\triangle ABC$ искомым. Опустим $\perp AD$ на BC . Тогда $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2 = (BD + CD)(BD - CD)$, или $d^2 = a \cdot (BD - CD)$; откуда найдем: $BD - CD = d^2 : a$. Зная сумму и разность отрезков BD и CD , легко построить их. Построение искомого \triangle очевидно.

218. На произвольной прямой XU отложим часть $AD = 2m_a$ и проведем прямую $KL \parallel XU$ на расстоянии $k^2 : m_a$. Отложим на AD часть $AE = \frac{2}{3}m_a$ и из E опишем дугу радиусом $\frac{2}{3}m_b$, кот. пересечет KL в B ; продолжив BE , отложим $BF = m_b$. Проведем прямую AF и прямую BG , гдѣ G середина AD , кот. пересѣкутся вѣ точкѣ C . $\triangle ABC$ искомым.

219. На прямой XU отложим часть $BC = a$ и опишем окружность, радиусы отъ точек кот. до B и C пропорціональны m и n (III, 469). Проведем прямую $KL \parallel BC$ на расстоянии $2k^2 : a$, кот. пересѣчетъ окружность вѣ точкахъ A и D . $\triangle ABC$ и DBC будутъ искомыми.

220. Разность и произведение смежныхъ сторонъ извѣстны, а потому приводимся къ 401 зад. III отд.

221. Проведемъ диаметръ AB даннаго круга и прямую $KL \parallel AB$ на расстоянии $k^2 : AB$, кот. пересѣчетъ окружность вѣ C и D . Проведемъ прямую CO , кот. пересѣчетъ окружность вѣ E , и прямую DO , кот. пересѣчетъ окружность вѣ F . Прямоугольники $ACBE$ и $ADBF$ будутъ искомыми.

222. Такъ какъ сумма и произведение смежныхъ сторонъ извѣстны, то приводимся къ 400 зад. III отд.

223. Пусть O центръ описаннаго круга около даннаго $\triangle ABC$. Построимъ параллелограммы $OBLC$, $OCMA$ и $OANB$. Шестиугольникъ $ANBLCM$ будетъ искомымъ.

224. На прямой BC , равной данному основанію, опишемъ сегментъ, вмѣщающій данный \angle . Изъ середины BC возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ дугу сегмента вѣ A . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

225. Положимъ въ кругъ O вписанъ $\triangle ABC$ наибольшей площади. Тогда (V, 130) точка B должна быть серединою $\cup AC$; точка C серединою $\cup AB$ и точка A серединою $\cup BC$. Слѣдъ. $\cup BC = \cup CA = \cup AB$, т.-е. $\triangle ABC$ равносторонній. Построение очевидно.

226. Проведемъ два взаимно-перпендикулярные радіусы OA и OB . $\triangle AOB$ будетъ искомымъ.

227. Проведемъ въ окружности O взаимно- \perp -ые радіусы OP и OQ . Опустимъ $\perp OK$ на PQ и опишемъ окружность радіусомъ OK ; къ этой окружности проведемъ изъ O касательную, кот. пересѣчетъ данную окружность вѣ B и C . $\triangle BOC$ будетъ искомымъ.

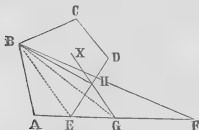
228. Данъ $\angle XAY$ и точка D . Черезъ D проведемъ прямую, пересѣкающую AX и AY вѣ B и C , такъ, чтобы $AB = AC$ (I, 227). $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

229. PBC наружная полуокружность. Изъ середины PC возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ $\cup PBC$ вѣ B . Проведемъ прямую PB , кот. пересѣчетъ полуокружность PAQ вѣ A . \triangle будетъ AQB будетъ искомымъ.

230. Превратимъ многоуг. $ABCDE$ (фиг. 88) въ равномѣрный ему $\triangle ABF$ (V, 197) и раздѣлимъ AF пополамъ вѣ G . Прямая BG будетъ искома, если G между A и E . Въ противномъ случаѣ, G надо перенести на пе-

риметръ многоугольника. Для этого проведемъ прямую $CX \parallel EB$, кот. пересечетъ ED въ H ; тогда прямая BH будетъ искома.

Фиг. 88.



231. Превратимъ $\diamond ABCD$ въ $\triangle ABF$ (V, 197) и изъ точки B раздѣлимъ его на n равныхъ частей. Если точки дѣлений стороны AF будутъ лежать внѣ AD , то перенесемъ ихъ на периметръ \diamond (V, 230).

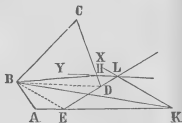
232. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

233. Пусть M дана на AD . Раздѣлимъ среднюю линію на 4 равныя части. Черезъ точку M и точки дѣлений проведемъ прямыя, кот. и будутъ искомыми, если онѣ пересѣкутъ другое основаніе между B и C . Въ противномъ случаѣ, точки дѣлений надо перенести на периметръ трапеціи (V, 230).

234. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

235. Превратимъ (фиг. 89) $\triangle MNP$ въ равносторонній ему $\triangle FNG$, въ

Фиг. 89.



кот. сторона $FN=AB$ и $\angle FNG=\angle BAE$ (V, 183). Продолжимъ сторону AE , отложимъ часть $AK=NG$. Прямая BK будетъ искома, если K лежитъ между A и E ; въ противномъ случаѣ, надо K перенести на периметръ данного многоугольника. Для этого проведемъ прямую $KX \parallel BE$, кот. пересѣчетъ сторону ED или ея продолженіе въ L ; если L между D и E , то прямая KL будетъ искома. Въ противномъ случаѣ, надо провести прямую $LY \parallel BD$, кот. пересѣчетъ CD въ H . Прямая BH будетъ искома.

236. На прямой AD , соединяющей вершину A съ D , серединою BC , отложимъ часть $DE=\frac{1}{5}DA$. Прямыя AE , BE и CE будутъ искомыя.

237. Пусть M на BC . Раздѣлимъ BC пополамъ и чрезъ D , середину BC , проведемъ прямую $DH \parallel AM$, кот. пересѣчетъ AC въ N . Прямая MN будетъ искома.

238. Пусть точки M и N даны на BC . Раздѣлимъ BC на три равныя части и далѣе поступимъ какъ въ 237 зад. этого отдѣла.

239. Раздѣлимъ BC въ отношеніи m къ n въ точкѣ D и поступимъ какъ въ 237 задачѣ этого отдѣла.

240. РѢшеніе сходно съ рѢшеніемъ 239 зад. этого отдѣла.

241. Пусть M на сторонѣ AB . Тогда превратимъ многоугольникъ $ABCDE$ въ равновеликій ему $\triangle MAF$ (V, 198) и AF раздѣлимъ на три равныя части въ точкахъ G и H . Точку H перенесемъ на периметръ многоугольника въ точку N . Прямая MG и MN будутъ искомыми.

242. РѢшеніе сходно съ предыдущимъ рѢшеніемъ (V, 241).

243. Пусть M на BC , а N на AC . Тогда чрезъ точку M проведемъ прямую, отсѣкающую $\frac{1}{3} \triangle ABC$ (V, 238), а потомъ оставшуюся часть раздѣлимъ пополамъ (V, 241 или 237).

244. РѢшеніе сходно съ рѢшеніемъ 241 задачи этого отдѣла. Если же точка дана на основаніи, то можно рѢшить иначе: раздѣлить среднюю линію на 4 части и провести прямую чрезъ данную точку и точки дѣленій.

245. На BC отложимъ часть $BE = \frac{1}{3}BC$ и на AD построимъ $\triangle AFD$, равномѣрный $\triangle EAB$ и вершина котораго F лежала бы на AB (V, 195). Если точка F упадетъ на сторонѣ AB , то прямая DF будетъ искома, а если на продолженіи AB , то ее надо перенести на периметръ даннаго треугольника (V, 235) въ точку K . Тогда DK будетъ искома, прямая. Сдѣлавъ то же построеніе съ другой стороны AD , получимъ еще искомую прямую.

246. Положимъ, что прямая MD пересѣчетъ сторону AB въ G . Тогда на BC отложимъ часть $BE = \frac{1}{3}BC$; на DG построимъ \triangle , равномѣрный $\triangle ABE$, и вершина котораго лежала бы на AB . Дальнѣйшее построеніе сходно съ построеніемъ въ предыдущей задачѣ.

247. Проведемъ прямую $DH \parallel KL$, кот. пересѣчетъ AB въ G . Теперь приводимся къ построенію, данному въ предыдущей задачѣ.

248. РѢшеніе сходно съ рѢшеніемъ 245 и 246 задачъ этого отдѣла.

249. РѢшеніе то же, что и въ 245, 246 и 247 задачахъ этого отдѣла. Только сторону BC надо раздѣлить на три части: BE , EN и NC , находящіяся въ отношеніи $m:n:p$.

250. Положимъ, что задача рѢшена и $BKGC$ (фиг. 90) искома трапеція, т.-е. $\angle KBC = \varphi$ и площадь трапеціи $BKGC = \triangle ABC$. Тогда выходитъ, что $\triangle KBH = \triangle AGH$ и слѣд. $\triangle EBA = \triangle EKG$, т.-е. $AK \parallel BG$; $\triangle BEG \sim \triangle AKE$ и $\triangle BEC \sim \triangle KEG$, а потому $EB:EK = EG:EA$ и $EB:EK = EC:EG$. $\Rightarrow EC:EG$, т.-е. EG есть средняя пропорціональная между EA и EC . Построеніе очевидно.

251. Положимъ (фиг. 91), что прямая EF , параллельная KL , будетъ искома. Проведемъ $BD \parallel KL$, которая пересѣчетъ AC въ D ; тогда $\triangle ABD : \triangle ABC = AD:AC$ и $\triangle ABD : \triangle AEF = AD^2:AF^2$. Первая часть въ пропорціяхъ равна, а потому $AD:AC = AD^2:AF^2$; откуда $AF^2 = AD \cdot AC$. Здѣсь AD и AC известны, а потому и AF легко опредѣлить. РѢшеніе очевидно.

Фиг. 90.



Отсюда $EG:EA =$

Фиг. 91.



252. Пусть φ данный уголъ. Проведемъ прямую KL подъ $\angle \varphi$ къ катету AC . Тогда придемъ къ 251 задачѣ этого отдѣла.

253. Проведемъ прямую KL , перпендикулярно къ равнодѣлящей $\angle A$. Тогда придемъ къ 251 задачѣ этого отдѣла.

254. Превратимъ $\triangle ABC$ въ равносторонній ему $\triangle DBC$, въ кот. $\angle DBC = \frac{2}{3}d$ (V, 183). Построимъ равнобедренный $\triangle EBF$, равносторонний $\triangle DBC$ и у котораго $\angle DBC$ былъ бы общій (V, 253). $\triangle EBF$ будетъ искомымъ.

255. Положимъ, что задача рѣшена (фиг. 92), т.-е. $\triangle AMN : \triangle CBN = m : n$. Проведемъ прямую $CX \parallel NB$, кот. пересѣчетъ продолженіе AB въ D ; D соединимъ съ N . Тогда $\triangle CBN = \triangle DBN$ и $\triangle AMN : \triangle DBN = AM : BD$ и, по заданію, $\triangle AMN : \triangle DBN = m : n$; слѣд. $AM : BD = m : n$. Здѣсь BD известно, а m и n даны, а потому можемъ построить AM .

256. Положимъ $m > n$. Тогда раздѣлимъ среднюю линію въ отношеніи m къ n въ точкѣ G и чрезъ G проведемъ прямую $XU \parallel KL$. Если XU пересѣчетъ оба основанія, то она и будетъ искомою, а если она пересѣчетъ продолженіе одного изъ основаній, то надо поступить на основаніи 251 задачи этого отдѣла.

257. На AB (фиг. 93) опишемъ полуокружность и изъ середины AB возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ полуокружн. въ E . Изъ A опишемъ дугу радіусомъ AE , кот. пересѣчетъ AB въ F . Прямая $FG \parallel BC$ будетъ искома.

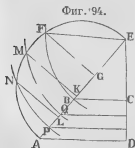


258. Раздѣлимъ AB на n равныхъ частей въ точкахъ D, E, \dots и на AB опишемъ полуокружность. Изъ D, E, \dots возставимъ \perp , кот. пересѣкутъ полуокружность въ K, L, \dots , а изъ A опишемъ дуги радіусами AK, AL, \dots , кот. пересѣкутъ AB въ M, N, \dots . Прямая, проходящая чрезъ M, N, \dots , параллельно BC , будетъ искомыя.

259. Опишемъ на AB полуокружность и раздѣлимъ AB на $m+n$ равныхъ частей. Изъ точки D , конца m -го дѣленія, считая отъ A , возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ полуокружность въ E . Дальнѣйшее построеніе такое же, какъ и въ 258 задачѣ.

260. Рѣш. сходно съ рѣш. 259 зад. этого отд.

261. Продолжимъ непараллельныя стороны AB и DC (фиг. 94) до встрѣчи въ E и опишемъ полуокружность на большей изъ сторонъ EA или ED , напр. EA . Опишемъ изъ E дугу радіусомъ EB , кот. пересѣчетъ полуокружность въ F . Опустимъ $\perp FG$ на AE и прямую AG раздѣлимъ на три равныя части: AL, LK и KG . Изъ L и K возставимъ \perp къ AE до встрѣчи съ полуокружн. въ N и M . Изъ E опишемъ



дуги радиусами EM и EN , кот. пересѣкутъ AE въ Q и P . Прямая, проходящая чрезъ P и Q , параллельно основаніямъ, будутъ искомыя.

262. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи. Только прямую AG надо раздѣлить въ данномъ отношеніи.

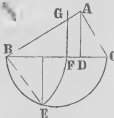
263. Опустимъ $\perp AD$ на основаніе BC и раздѣлимъ \triangle на три равнѣмѣрныя части прямыми, параллельными BC (V, 258). Пусть ближайшая прямая къ вершинѣ будетъ EF , гдѣ E на AB , а F на AC . Отложимъ на AD часть $AO=AE$ и получимъ искомую точку O .

264. На BC (фиг. 95) опишемъ полуокружн. и опустимъ $\perp AD$ на BC . Изъ середины BD возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ полуокружн. въ E ; на BC отложимъ часть $BF=BE$. Прямая $FG \perp BC$ будетъ искомая.

265. Смотри рѣш. 257 и 264 задачъ этого отд.

266. Проведемъ прямую $CX \parallel KB$, кот. пересѣчетъ AB въ F , и на AF опишемъ полуокружн. Изъ H , середины AB , возставимъ \perp , кот. пересѣчетъ полуокружн. въ G , а изъ A опишемъ дугу радиусомъ AG , кот. пересѣчетъ AB въ D . Хорда DE , параллельная KL , будетъ искомая.

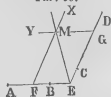
Фиг. 95.



267. Рѣшеніе сходно съ предыдущимъ, только $AH = \frac{m}{m+n} AB$.

268. Продолжимъ прямая AB и DC (фиг. 96) до встрѣчи въ точкѣ E . На EA отложимъ часть $EF=AB$, а на ED — часть $EG=DC$. Проведемъ прямую $FX \parallel DE$ и $GY \parallel AE$, кот. пересѣкутся въ M . Прямая EM будетъ искомое геометрическое мѣсто.

Фиг. 96.



269. Прямая.

270. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 268 задачи; только надо отложить $EF = \frac{1}{m} AB$ и $EG = \frac{1}{n} CD$.

271. Проведемъ прямую EM , какъ указано въ предыдущей задачѣ, кот. пересѣчетъ прямую XY въ P . Точка P будетъ искомая.

272. (V, 270 и 271). 273. (V, 272).

274. Искомое геометрическое мѣсто будетъ периметръ шестиугольника, у кот. стороны, параллельны сторонамъ даннаго \triangle и вершины лежатъ на продолженіяхъ сторонъ.

275. Пусть R и R' радиусы круговъ O и O' . Проведемъ въ кругахъ хорды AB и $A'B'$ такъ, чтобы $AB : A'B' = m : n$. Опустимъ $\perp OC$ на AB и $\perp O'C'$ на $A'B'$ и пусть M пересѣченіе прямыхъ OC и $O'C'$. Тогда $\triangle OMA : \triangle O'MA = OA : O'A = R : R'$ и $\triangle OMA : \triangle O'MA = AC : A'C' \cdot O'M = m \cdot OM : n \cdot O'M$; слѣд. $R : R' = m \cdot QM : n \cdot O'M$ или $OM : O'M = mR : nR'$, т.-е. (III, 469) искомое геометрическое мѣсто точекъ M будетъ окружность.

276. Изъ O , середины BC , опишемъ дугу радиусомъ OA , кот. пересѣчетъ BC или продолженіе BC въ M и N . Прямая AM и AN будутъ искомыя.

277. AB данная длина; b^2 площадь данного \square . Раздѣлимъ AB пополамъ въ точкѣ P и на BA отложимъ такую часть BQ , чтобы $AB \cdot BQ = b^2$; отложимъ на PB часть $PQ = BD$ и раздѣлимъ AD въ C такъ, чтобы $AC \cdot CD = b^2$. Точки C и D будутъ искомыми.

278. Пусть M искомая точка, т.-е. $\angle AMB = \angle CMD$. Тогда $\triangle AMB : \triangle CMD = MA : MB = MC : MD = AB : CD$. Но $\angle AMC = \angle BMD$, а потому $\triangle AMC : \triangle BMD = MA : MC = MB : MD = AC : BD$. Умноживъ одно равенство на другое, найдемъ, что $MA^2 : MD^2 = AB : AC : BD : CD$ или $MA : MD = \sqrt{AB \cdot AC} : \sqrt{BD \cdot CD}$. Слѣд. (III, 469) искомое геометрическое мѣсто точекъ M будетъ окружность.

279. Пусть ABC искомый треугольникъ. Двойная площадь его равна

$$ah_a = bh_b = (a+b+c)r.$$

Откуда

$$a : h_b = b : h_a = (a+b+c) : \frac{h_a h_b}{r},$$

т.-е. искомый треугольникъ подобенъ треугольнику, у котораго двѣ стороны h_b и h_a и периметръ $\frac{h_a h_b}{r}$.

Построение. Построимъ $\triangle AFG$, въ которомъ $AF = h_a$, $FG = h_b$ и $AG = \frac{h_a h_b}{r} - (h_a + h_b)$. Опустимъ $\perp AD$ на FG и отложимъ на немъ часть $AE = h_a$. Черезъ E проведемъ прямую $XU \parallel FG$, кот. пересѣчетъ бока $\angle A$ въ точкахъ B и C . $\triangle ABC$ будетъ искомый. Задача возможна, если $h_a h_b < 2r(h_a + h_b)$.

280. Имѣемъ (V, 103) $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_a} \right)$, а потому, если это условіе выполнено, то задача неопредѣленная, а если нѣтъ, то невозможная.

281. Рѣшеніе то же (V, 280), такъ какъ $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right)$ (V, 103).

282. Двойная площадь \triangle равна (V, 87) $(b+c-a)r_a = (c+a-b)r_b = (a+b-c)r_c$; откуда

$$\frac{b+c-a}{r_b} = \frac{c+a-b}{r_a} = \frac{a+b-c}{r_c}.$$

По свойству пропорціи, найдемъ: $\frac{a}{r_a + \frac{r_a r_b}{r_c}} = \frac{b}{r_b + \frac{r_a r_b}{r_c}} = \frac{c}{r_a + r_b}$.

Слѣдовательно, искомый \triangle подобенъ $\triangle DEF$, у котораго стороны будутъ:

$r_a + \frac{r_a r_b}{r_c}$, $r_b + \frac{r_a r_b}{r_c}$ и $r_a + r_b$. Тогда начертимъ три вѣнъписанныхъ круга въ $\triangle DEF$ и проведемъ, соответственно, прямыя параллельно сторонамъ $\triangle DEF$, на разстояніи r_a , r_b и r_c , которыя въ пересѣченіи дадутъ искомый \triangle .

283. Двойная площадь \triangle равна $(a+b+c)r = (b+c-a)r_a = (a+c-b)r_b$;

откуда

$$\frac{a+b+c}{r_a} = \frac{b+c-a}{r} = \frac{a+c-b}{r_b}.$$

По свойству пропорціи, получимъ: $\frac{a}{r_a - r} = \frac{b}{r_a - \frac{r r_a}{r_b}} = \frac{c}{r + \frac{r r_a}{r_b}}$

Построеніе очевидно (V, 282).

284. Пусть r радіусъ вписаннаго круга въ искомый треугольникъ.

Тогда $pr = k^2$ или $r = \frac{k^2}{p}$, а потому приводимся къ 485 задачѣ, II отд.

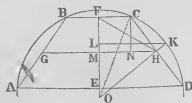
285. Положимъ, что задача рѣшена и $EFGH$ искомый прямоугольникъ, т.-е. $EF \cdot FG = k^2$. Опустимъ $\perp AD$ на BC . $\triangle AFG \sim \triangle ABC$ и $\triangle BEF \sim \triangle BDA$, а потому $FG : BC = AF : AB$ и $EF : AD = BF : AB$. Умноживъ одно равенство на другое, найдемъ: $EF \cdot FG : BC \cdot AD = AF \cdot BF : AB^2$ или $k^2 : ah_a = AF \cdot BF : a^2$; откуда $AF \cdot BF = 2c^2 k^2 : ah_a$. Кроме того $AF + BF = AB = c$; слѣд. произведение и сумма AF и BF извѣстны, а потому (III, 400) можемъ ихъ построить и опредѣлить положеніе вершины F искомага прямоугольника. Построеніе очевидно.

286. Пусть $ABCD$ (фиг. 97) будетъ искомая трапеція. Опустимъ $\perp OF$ на BC , который пересѣчетъ AD въ E , и проведемъ среднюю линію GH , которая пересѣчетъ EF въ M . Продолжимъ OH до пересѣченія съ окружностью въ K и опустимъ $\perp KL$ на EF ; опустимъ $\perp CN$ на GH . Площадь трапеціи $ABCD = GH \cdot EF = GH \cdot h = k^2$, по условію; отсюда $GH = k^2 : h$, то-есть извѣстная величина. Означимъ GH буквою a . Очевидно, задача сводится къ опредѣленію K середины дуги GD или длины KL . $\triangle OHM \sim \triangle OKL$ и $\triangle HCN \sim \triangle OKL$, а потому $MH : KL = OH : OK$ и $CN : KL = CH : OK$; отсюда $MH = OH \cdot \frac{KL}{OK}$ и $CN = CH \cdot \frac{KL}{OK}$ и $MH^2 + CN^2 = (OH^2 + CH^2) \cdot \left(\frac{KL}{OK}\right)^2 = OC^2 \cdot \frac{KL^2}{OK^2} = KL^2$, или $MH^2 + MF^2 = KL^2$ или $FH^2 = KL^2$; слѣд. $KL = FH$,

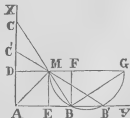
гдѣ FH гипотенуза прямоугольнаго \triangle , въ которомъ катеты $MH = \frac{1}{2}a$ и $MF = \frac{1}{2}h$. Построеніе очевидно.

287. Положимъ, что задача рѣшена и $\triangle ABC$ искомый (фиг. 98). Опустимъ $\perp MD$ и ME на AX и AY ; $\perp BF$ на DM и означимъ длину $MD = ME$ чрезъ l . Также возставимъ \perp изъ точки B къ BC , который пересѣчетъ прямую DM въ G . $\triangle MPB = \triangle MEB$ и $\triangle BFG = \triangle CDM$; слѣд. $\triangle MBG = \triangle MEB + \triangle BFG = \triangle ABC$ - пл. $ADME = k^2 - l^2$; но $\triangle MBG = \frac{1}{2}MG \cdot BF = \frac{1}{2}MG \cdot l$ и потому $k^2 - l^2 = \frac{1}{2}MG \cdot l$ или $MG = (k^2 - l^2) : \frac{1}{2}l$, т.-е. MG будетъ четвертая пропорціоная $k+l$, $k-l$ и $\frac{1}{2}l$. Слѣд. для рѣшенія задачи надо на DO отложить MG , равную че-

Фиг. 97.



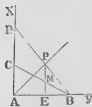
Фиг. 98.



ность, которая пересѣчетъ AU въ B и B' . Прямая BM и $B'M$ будутъ искомыми.

288. Положимъ, что задача рѣшена и $\triangle ABC$ искомымъ (фиг. 99).

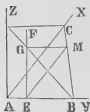
Фиг. 99.



Опустимъ $\perp ME$ на AU и продолжимъ его до встрѣчи съ равнодѣлящею $\angle A$ въ точкѣ P . Проведемъ прямую BP до пересѣченія съ AX въ точкѣ D , найдемъ: $\triangle BAD : \triangle BAC = AD : AC = PE : ME$ или $\triangle BAD : k^2 = PE : ME$; откуда $\triangle BAD = k^2 \cdot \frac{PE}{ME}$.

Рѣшеніе. Построимъ $k \cdot \frac{PE}{ME} = x$ (III, 253) и $kx = y^2$ (III, 377). Черезъ точку P проведемъ прямую BD , которая отсѣкала бы отъ $\angle A$ треугольникъ ABD , равновѣрный y^2 (V, 287). Прямая BD будетъ искомая.

Фиг. 100.



289. Положимъ, что $\triangle CAB$ (фиг. 100) искомымъ. Черезъ M проведемъ прямую $\parallel AX$ до пересѣченія съ AU въ E и возставимъ $\perp AZ$ и EF къ AU . Изъ C и M проведемъ прямые $\parallel AU$ до пересѣченія съ AZ и EF въ D и G . Точки D , G и B лежатъ на одной прямой и $\triangle DAB$ равновеликъ $\triangle CAB$ или k^2 . Слѣдовательно, для рѣшенія задачи, проведемъ прямую черезъ точку G , отсѣкающую $\triangle DAB$, равновеликій k^2 (V, 288), и прямую BM , которая пересѣчетъ AX въ C . $\triangle ABC$ будетъ искомымъ.

290. Пусть BC (фиг. 101) будетъ искомая прямая, т.-е. $AB \cdot AC = k^2$.

Фиг. 101.



Тогда $\triangle ABC = \frac{1}{2} AC \cdot BF = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \frac{BF}{AB} = \frac{1}{2} k^2 \cdot \frac{BF}{AB} = \frac{1}{2} k^2 \cdot \frac{MD}{ME}$ ($\triangle ABC \sim \triangle MEC$). Слѣд. черезъ точку M надо провести прямую, кот. отсѣкала бы отъ $\angle XAU$ треугольникъ, равновеликій $\frac{1}{2} k^2 \cdot \frac{MD}{ME}$ (V, 289).

291. Смотри 188 зад. III отд.

292. На сторонахъ AB и BC опишемъ сегменты (въ $\triangle ABC$), выѣдающіе углы въ 60° , которыхъ дуги пересѣкутся въ D . Проведемъ прямую $BX \perp$ къ BD , которая пересѣчетъ дуги сегментовъ въ M и N ; черезъ M и A , N и C проведемъ прямые до пересѣченія въ точкѣ K . $\triangle MKN$ будетъ искомымъ. Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ черезъ B прямую, пересѣкающую дуги сегментовъ въ M' и N' ; прямые $M'A$ и $N'C$ продолжимъ до встрѣчи въ точкѣ K' . Тогда получимъ также равносторонній $\triangle M'K'N'$, котораго площадь будетъ менѣе площади $\triangle MKN$, потому что изъ подобія $\triangle MKN$ и $M'K'N'$ найдемъ, что $\triangle MKN : \triangle M'K'N' = MN^2 : M'N'^2$; но $MN > M'N'$ (II, 317), а потому и $\triangle MKN > \triangle M'K'N'$.

293. Данъ $\triangle ABC$ и прямая XU . Положимъ, задача рѣшена и $\triangle DEF$ искомымъ, въ которомъ $FE \parallel BC$ и $ED \parallel XU$. Опустимъ $\perp FK$ и AL на

BC. Тогда $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{EF}{BC} \cdot \frac{FK}{AL} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{BF}{AB} = \frac{AF \cdot BF}{AB^2}$. Это отношение наибольшее тогда, когда $AF \cdot BF$ наибольшее; но $AF + BF = AB$, а потому $AF \cdot BF$ наибольшее тогда, когда $AF = BF$, т.-е. F середина AB .

294. AB данная прямая. Положимъ C искомая точка. На AC и CB опишемъ окружности O и O' ; проведемъ къ нимъ касательную EE' , гдѣ E и E' точки касанія. Черезъ C проведемъ прямую $\perp AB$, которая пересѣчетъ EE' въ F ; D и D' точки пересѣченія OF и $O'F$ съ CE и CE' . Пусть $OC = x$ и $O'C = y$; тогда $x + y = \frac{1}{2}a$. $\triangle ECE'$, т.-е. $q = \frac{1}{2}CE \cdot CE'$. Но $\triangle ODC \propto \triangle OCF$ и $\triangle O'D'C \propto \triangle O'CF$; поэтому $\frac{1}{2}CE : x = CF : OF$ и $\frac{1}{2}CE' : y = CF : O'F$; откуда $CE \cdot CE' = \frac{2x \cdot CF}{OF} \cdot \frac{2y \cdot CF}{O'F} = \frac{4xy \cdot CF^2}{OF \cdot O'F}$. Изъ $\triangle OFO'$ найдемъ, что $CF^2 = xy$, $OF^2 = (x+y)x$ и $O'F^2 = (x+y)y$, а потому $CE \cdot CE' = \frac{4xy \cdot xy}{(x+y)xy}$ и $q^2 = \frac{4(xy)^3}{(x+y)^2}$. Но $x+y = \frac{1}{2}a$, а потому максимумъ xy , когда $x=y$, т.-е. C середина AB . Тогда $q = \frac{1}{16}a^2$.

295. Построимъ \triangle , у котораго катеты равны діаметрамъ данныхъ круговъ. Описавъ на гипотенузѣ этого треугольника окружность, получимъ искомый кругъ.

296. Построеніе то же, что въ 199 задачѣ этого отдѣла.

297. Построимъ $\triangle ABC$, у котораго гипотенуза BC равнялась бы діаметру большаго круга, а катетъ AB — діаметру меньшаго круга. Тогда, описавъ окружность на катетѣ AC , получимъ искомый кругъ.

298. Гипотенуза прямоугольнаго треугольника, у котораго катеты равны діаметру даннаго круга, будетъ діаметромъ искомаго полукруга.

299. Построимъ равнобедренный прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ, равной діаметру даннаго полукруга. Одинъ изъ катетовъ треугольника будетъ діаметромъ искомаго круга.

300. Построимъ равнобедренный прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ, равной двумъ радіусамъ даннаго квадранта. Катетъ этого треугольника будетъ діаметромъ искомаго полукруга.

301. Смотри 300 и 299 задачи этого отдѣла.

302. Назначимъ радіусъ даннаго круга буквою R . Тогда радіусъ искомаго круга будетъ среднимъ пропорціональнымъ между R и nR .

303. Искомый радіусъ есть средняя пропорц. величина между R и $\frac{m}{n}R$.

304. Радіусы искомыхъ круговъ будутъ: $R\sqrt{\frac{1}{m}}$, $R\sqrt{\frac{2}{m}}$, ... и $R\sqrt{\frac{m-1}{m}}$, построение которыхъ указано въ 399 задачѣ III отдѣла.

305. Радіусы искомыхъ круговъ будутъ:

$$R\sqrt{\frac{m}{m+n+p+q}}, R\sqrt{\frac{m+n}{m+n+p+q}} \text{ и } R\sqrt{\frac{m+n+p}{m+n+p+q}},$$

построеніе которыхъ показано въ 399 задачѣ III отдѣла.

306. Проведемъ діаметръ AB и раздѣлимъ его на $2n$ равныхъ частей. Возставимъ перпендикуляры къ AB изъ концовъ четныхъ дѣленій, считая

отъ A , которые пересѣкутъ окружность данного круга въ $C, D, E...$ Хорды $AC, AD, AE...$ будутъ діаметрами искомыхъ окружностей.

307. Радиусъ искомой окружности равенъ гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, у котораго катеты равны радиусамъ данныхъ окружностей.

308. Черезъ какую-нибудь точку, лежащую на меньшей окружности, проведемъ касательную, которая пересѣчетъ вѣншую окружность, положимъ, въ точкахъ A и B . Прямая AB будетъ діаметромъ искомага круга.

309. 1) $\frac{1}{2}bh=10\frac{81}{32}$ □ арш.; 2) 4,2 □ фута. 310. $2q:b=4$ арш. 311. $2q:h=3$ ф.

312. 1) $\frac{1}{2}ab=1,74$ □ ф.; 2) 1 □ в. 313. $2q:a=5\frac{3}{7}$ ар. 314. 1) $ab=18$ □ ф. +

+ 117 □ д.; 2) 0,2 □ саж. 315. $q:h=4$ с. + 4 ф. 316. $q:b=2\frac{3}{5}$ арш. 317. $ab:c=$

$=6$ д. 318. 1) $a^2=0,1764$ □ м.; 2) 289 □ арш. 319. 1) $\sqrt{q}=0,12$ ф.; 2) $1\frac{9}{16}$ арш.;

3) $10\frac{1}{2}$ саж.; 4) 2,394 мтр. 320. 4. 321. $2a^2:b=2,75$ арш. 322. $2a^2:h=9$ мтр.

323. $a\sqrt{2}=1,84$ фута. 324. $\sqrt{\frac{1}{2}bh}=4$ арш. 325. $\sqrt{ab}=1,67$ метра. 326. $a\sqrt{n}=$

$=34\frac{1}{2}$ арш. 327. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,98$ с. 328. $\sqrt{a^2-b^2}=4,72$ арш. 329. $\frac{1}{2}\sqrt{q}=$

$=1\frac{1}{3}$ дюйма. 330. $bh=2,4$ □ арш. 331. $\frac{1}{2}$ 332. $\frac{mh}{n}=9,6$ метра. 333. $\frac{md}{m-n}=$

$=13\frac{3}{7}$ фута и $\frac{nd}{m-n}=8\frac{1}{7}$ фута. 334. $\frac{1}{2}d^2=3\frac{5}{9}$ □ фута. 335. $\sqrt{2q}=12,7$ арш.

336. $\frac{1}{2}dd'=0,14$ □ арш. 337. $2q:d=16,2$ фута. 338. $\frac{1}{2}(a+b)h=$

$=36,75$ □ дюйма. 339. $\frac{2q}{a+b}=6$ саж. 340. $\frac{2q-kh}{2h}$. 341. $\frac{2mq}{(m+n)h}$ и $\frac{2nq}{(m+n)h}$.

342. $ah=0,69$ □ фута. 343. 1) Если $h+b+c+2p$, то $q=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$

$=\frac{2}{3}\sqrt{15}=2,9$ □ един. 2) $\sqrt{4104}=64,06$ □ метр.; 3) $\sqrt{0,4536}=0,67$ □ аршинъ;

4) $\frac{1}{84}\sqrt{139}$ □ саж. 344. $2\sqrt{p(p-\frac{1}{2}a)(p-m_a)(p-b)}$, гдѣ $2p=\frac{1}{2}a+m_a+b$.

345. $2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-k)}$, гдѣ $2p=a+b+k$. 346. $\sqrt{p(p-k)(p-l)(p-2a)}$,

гдѣ $2p=2a+k+l$. 347. $3\sqrt{15}+4\sqrt{5}=20,56$ □ ед. 348. 39 □ единицъ.

349. 159 □ ед. 350. Увелич. въ mn разъ; если $m > n$, то увелич. въ $\frac{m}{n}$ разъ,

а если $m < n$, то уменьш. въ $\frac{n}{m}$ разъ. 351. На $ab:(h-a)=3,6$.

352. На $\frac{1}{2}(kh+kl+bl)=0,32$ □ фута. 353. На $(a+b+2h)2h$.

354. $(a-2k)(b+2k)$; при $k=\frac{1}{2}(a-b)$, гдѣ $a > b$. 355. $\frac{1}{3}[a+b \pm \sqrt{(a+b)^2-4k^2}]$.

356. $(2m^2-kl-l^2):2l=4,3$ арш. 357. $\frac{1}{2}(5a^2+2ab+5b^2)=3,025$ □ метра.

358. $\frac{2a}{n}-k=4\frac{43}{60}$ фута. 359. $\frac{2am}{m+n}-c=5\frac{2}{15}$; $1\frac{17}{30}$. 360. $\frac{2mb}{m+n}=9,36$.

361. $\frac{2mb}{m+n+p}=2,8$; $\frac{2ap}{m+n+p}=1,8$. 362. $\frac{1}{2}(a+b)-k=3,95$ метра.

363. $\frac{m}{n}(a+b)-k=2,36$ фута. 364. $\frac{m(a+b)}{2(m+n)}=1\frac{1}{10}$ арш. 365. $\frac{am}{2n-m}=2,16$ арш.;

возможна при $m < 2n$. 366. $\frac{qa'b'}{ab}=1\frac{1}{2}$ □ саж. 367. $\frac{mbc}{k(m+n)}=3,2$ саж.

368. $q \cdot \frac{a^2}{a^2}=1,6$ □ дюйма. 369. $a\sqrt{\frac{q}{q}}=2,2$ арш. 370. $a\sqrt{\frac{m}{n}}=14$ ф.;

- $b\sqrt{\frac{m}{n}}=17,36 \text{ ф.}$ и $c\sqrt{\frac{m}{n}}=21 \text{ ф.}$ 371. $\frac{qm^2}{m^2-n^2}=2\frac{2}{3} \square \text{ арш.}; \frac{qn^2}{m^2-n^2}=1 \square \text{ арш.};$
 $1\frac{1}{2} \text{ арш. и } 1 \text{ арш.}$ 372. $\frac{ms^2}{16(\sqrt{m}+Vn)^2}=\frac{1}{16} \square \text{ верш.}; \frac{ns^2}{16(\sqrt{m}+Vn)^2}=0,04 \square \text{ в.};$
 $\frac{1}{2} \text{ верш. и } 0,2 \text{ верш.}$ 373. $h\sqrt{a^2-h^2}=12 \square \text{ д.}$ 374. $\frac{b}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=0,12 \square \text{ саж.}$
375. $\frac{2q}{b}=10 \text{ ф.}; \sqrt{\frac{b^2-4q^2}{4}+\frac{4q^2}{b^2}}=10,002 \text{ ф.}$ 376. $\frac{2q}{h}=3,6 \text{ саж.}; \sqrt{h^2+\frac{q^2}{h^2}}=2,95 \text{ саж.}$
377. $\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{q^2}{d^2}}=2,42 \text{ метра.}$ 378. $\frac{(k^2+h^2)h}{2k}=27\frac{281}{640} \square \text{ арш.}$
379. $\frac{a^2h}{2\sqrt{a^2-h^2}}=66\frac{2}{3} \square \text{ фута.}$ 380. $\frac{a^2\sqrt{a^2-h^2}}{2k}=0,196 \square \text{ арш.}$ 381. $\frac{b^2h}{4\sqrt{b^2-h^2}}=$
 $=\frac{25}{16} \square \text{ арш.}$ 382. $\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}=5\frac{55}{89} \square \text{ метра и } \frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}=14\frac{34}{89} \square \text{ метра.}$
383. $\frac{cq}{b+c}=0,95 \text{ арш. и } \frac{bq}{b+c}=0,63 \text{ арш.},$ гдѣ q площ. дан. \triangle . 384. $\frac{h^2}{V^2}=11,69 \text{ м.}$
385. $\frac{hl's}{2(h+h')}=442 \square \text{ ф.}$ 386. $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+8q}+a)=2,6 \text{ саж.}$ 387. $\frac{ab}{2V^2}=0,37 \square \text{ ф.}$
388. $\frac{ab}{4}=0,28 \square \text{ саж.}$ 389. $\frac{abV^2}{4}=0,34 \square \text{ арш.}$ 390. $\frac{abV^2}{4}=6,5 \square \text{ ед.}$
391. $\frac{a^2}{V^2}=0,45 \square \text{ саж.}$ 392. $\frac{d^2V^2}{2}=1,73 \square \text{ ед.}$ 393. $\sqrt[4]{\frac{4q^2}{3}}=0,37 \text{ аршинъ.}$
394. $\frac{ab}{V^2}=2,83 \square \text{ фута.}$ 395. $\frac{2q}{aV^2}=2,42 \text{ саж.}$ 396. $\frac{b^2h^2}{(b+h)^2}=0,09 \square \text{ арш.}$
397. $\frac{2mn}{(m+n)^2}$ 398. $\frac{ADE}{ABC}=\frac{m^2}{(m+n)^2}; \frac{BDF}{ABC}=\frac{n^2}{(m+n)^2}; \frac{DECF}{ABC}=\frac{2mn}{(m+n)^2}$
399. $\left(\frac{m-2n}{m+n}\right)^2$ 400. $c\sqrt{\frac{m}{n}}=4,16 \text{ верш.}$ 401. $\sqrt{\frac{2qh}{a}}=9 \text{ футамъ.}$
402. $a\sqrt{\frac{m}{m+n+p}}=1 \text{ м.}; a\sqrt{\frac{m+n}{m+n+p}}=1,24 \text{ м.}$ 403. Отъ меньшаго осно-
ванія на $\frac{V^2(a^2+b^2)-2b}{2(a-b)}h=2,82 \text{ фута.}$ 404. $\sqrt{\frac{na^2+mb^2}{n+m}}=3,65 \text{ аршина.}$
405. $\sqrt{\frac{ma^2+(n+p)b^2}{m+n+p}}=4,22 \text{ ф.}; \sqrt{\frac{(m+n)a^2+pb^2}{m+n+p}}=4,52 \text{ ф.}$ 406. $2\sqrt{\frac{4-V^2}{13}}q=$
 $=1,5 \text{ арш.}$ 407. $\frac{(s^2-a^2)a}{4s}$ 408. $\frac{a(a^2-d^2)}{4d}=2\frac{28}{216} \square \text{ ф.}$ 409. $\frac{(4s^2-b^2)b}{16s}$ 410. $\frac{(b^2-4d^2)b}{16d}$
411. $\frac{(p^2-h^2)h}{2p}=\frac{4}{15} \square \text{ саж.}$ 412. $\frac{hk^2}{V^2h^2-h^2}=3,18 \square \text{ арш.}$ 413. $d^2(7V^2+12)=$
 $=96,49 \square \text{ фута.}$ 414. $s^2(7V^2-12)$ 415. $\frac{1}{6}(s^2-c^2)$ 416. $\frac{c^2-d^2}{V^2}=14 \square \text{ саж.}$
417. $\frac{(s^2-a^2)a}{2s}$ 418. $\frac{(a^2-d^2)a}{2d}$ 419. $\frac{p^2-d^2}{2}=34,32 \square \text{ в.}$ 420. $s^2(3-2V^2);$

- 1) 0,69 □ д.; 2) 1. 421. $\frac{1}{8}s^2(3-2\sqrt{2})$. 422. $d^2(3+2\sqrt{2})=0,364$ □ ф.; 25 □ ф.
 423. $\frac{c^2 mn}{2(m^2+n^2)}=6$ □ саж. 424. $\frac{h^2(m^2+n^2)}{2mn}=26,24$ □ фута. 425. $\frac{mh^2}{\sqrt{4n^2-m^2}}=$
 $=0,226$ □ арш. 426. $\sqrt[4]{16q^2+s^2}=7,35$ саж. 427. Стор. $=\sqrt{\frac{a^2}{4}+q}+\frac{a}{2}=$
 $=2,3$ арш.; выс. $=\sqrt{\frac{a^2}{4}+q}-\frac{a}{2}=1,1$ арш. 428. $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4q}\pm\sqrt{a^2-4q})=1,2$ м.
 и 0,5 м. 429. $\sqrt{a^2+q}\pm\sqrt{a^2-q}=6,63$ д. и 0,63 д. 430. $\frac{1}{2}(\sqrt{d^2+2q}\pm\sqrt{d^2-2q})=$
 $=1,529$ ф. и 0,471 ф. 431. $\frac{p^2-q}{p}$; $\frac{p^2+q}{2p}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2+q}{2p}\right)^2-2q}$; 1) 4,6 метр.,
 4,51 метр. и 0,89 метр.; 2) 6 арш., 4 арш. и 3 арш. 432. $p-\frac{\bar{a}}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{q^2}{p(p-a)}}$.
 433. $q=\frac{1}{2}[3b(a-b)+(2b-a)\sqrt{2b(b-a)}]=96$ □ ф.; $2p=2b-\sqrt{2b(b-a)}=48$ ф.
 434. $\frac{1}{2}[(2b+a)\sqrt{2b(a+b)}-3b(a+b)]=96$ □ саж. 435. $\frac{ph(p-a)}{2p-a-\sqrt{a^2-h^2}}=$
 $=54\frac{6}{11}$ □ метра. 436. $\frac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-(a+b)^2l^2}=10\sqrt{2}$.
 437. $\sqrt{p(p-a)\left(p-\frac{ns}{m+n}\right)\left(p-\frac{ms}{m+n}\right)}$, гдѣ $2p=a+s$.
 438. $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-2m_c)}$, гдѣ $2p=a+b+2m_c$.
 439. $\sqrt{2p(2p-a)(3p-m_a)(3p-2m_b)}$, гдѣ $12p=3a+2m_a+4m_b$.
 440. $\sqrt{p(p-a)(3p-2m_b)(3p-2m_c)}$, гдѣ $6p=3a+2m_b+3m_c$.
 441. $\frac{1}{3}\sqrt{k(k-m_a)(k-m_b)(k-m_c)}$, гдѣ $2k=m_a+m_b+m_c$.
 442. $q=1:\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}$.
 443. $\frac{(d-a)(d-b)(d-c)+d^3}{abc}$. 444. $\frac{a_1b_1c_1+a_2b_2c_2}{abc}$.
 445. Рѣшеніе задачи сходно съ предыд. и основывается на теоремѣ:
 площади \triangle -въ, у кот. два угла служат дополненіями до двухъ пря-
 мыхъ, пропорціональны произведеніямъ сторонъ, содержащихъ эти углы.
 446. 7. 447. $l=m=n=3$. 448. $\frac{1}{4}\sqrt{16m^2n^2-(k^2-l^2)^2}$.
 449. $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}=18,97$ □ фута, гдѣ $2p=a+b+c+d$.
 450. $\frac{1}{4}\cdot\frac{a+b}{a-b}\sqrt{(b+d+a-c)(a+d+c-a)(a-c+d-b)(a-b+c-d)}$.
 451. $r=\frac{2q}{a+b+c}=1,41$ арш., гдѣ $q=\triangle$. 452. $\frac{abc}{4q}=\frac{8}{\sqrt{15}}$. 453. $\frac{2q}{b+c-a}=$
 $=0,232$ арш., $\frac{2q}{a+c-b}=0,387$ арш. и $\frac{2q}{a+b-c}=1,161$ арш., гдѣ $q=\triangle$.
 454. $\frac{2rr_a}{r_a-r}$. 455. $\frac{2r_r e}{r_b+r_c}$. 456. $\sqrt{rr_a r_b r_c}=5$ □ с. 457. $\frac{1}{4}(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^{\frac{1}{2}}$.
 458. $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$. 459. $2r^2$. 460. $\frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. 461. $\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}=10,39$ □ арш.

462. $2r^2\sqrt{2}$. 463. $\frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}=1,88 \square$ фута. 464. $3r^2\sqrt{3}=46,76 \square$ фута.
 465. $4r^2$. 466. $5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. 467. $2r^2\sqrt{3}$. 468. $8r^2(2-\sqrt{3})$. 469. $2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$.
 470. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. 471. $\frac{1}{4}a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$. 472. $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$. 473. $2a^2(1+\sqrt{2})$.
 474. $\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. 475. $3a^2(2+\sqrt{3})=31,1$ арш. 476. $\sqrt{\frac{16q^2}{3}}$. 477. $\sqrt{\frac{2q}{3\sqrt{3}}}$.
 478. $\sqrt{q(\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2})}$. 479. $\sqrt{\frac{q}{2}(2-\sqrt{3})}$. 480. $\sqrt{\frac{q}{V^2}}$. 481. $\sqrt{\frac{2q}{5}\sqrt{2(V^2-1)}}$.
 482. $\sqrt{\frac{q}{5}\sqrt{2(V^2+1)}}$. 483. $1:4$. 484. $s_2^2=\frac{2s_1^2}{s+s_1}$. 485. $\frac{s}{3}$. 486. $\frac{\pi a(2r^2-a^2)}{4r^2\sqrt{4r^2-a^2}}$,
 где a сторона данного многоугольника, m число сторон, а r радиус описанного круга. 487. $\frac{5}{2}r^2\sqrt{50-22\sqrt{5}}$. 488. 1) $\pi r^2=5\frac{87}{68} \square$ м.; 2) 7853,975 \square
 верш.; 3) 19,625 \square арш. 489. 1) $\sqrt{\frac{q}{\pi}}=\frac{21}{22}$ саж.; 2) 1,12 фута; 3) 0,564 арш.
 490. $r\sqrt{\frac{1}{m}}=0,61$ метра. 491. $r\sqrt{m}=7$ саж. + 1 фут. 492. $\frac{c^2}{4\pi}=1\frac{8}{11} \square$ арш.
 493. $21\sqrt{q\pi}=2,506$ фута. 494. $\pi a(2r-a)=27\frac{59}{68}$ арш. 495. $\pi r^2(m^2-1)$.
 496. На $\sqrt{\frac{q}{\pi}}(\sqrt{m}-1)=\frac{1}{2}$ арш. 497. $\sqrt{r^2+r_1^2+r_2^2+r_3^2}=4,1$ арш.
 498. $\sqrt{R^2-r^2}=3,08$ м. 499. $\frac{C^2}{r^2}=\frac{16}{9}$. 500. $\sqrt{\frac{Q}{q}}=\frac{6}{5}$. 501. $\sqrt{\frac{a^2}{\pi}}=2,26$ верш.
 502. $r\sqrt{\pi}=17,72$ ф. 503. $\frac{\pi a^2}{4(\pi+1)^2}$. 504. $\frac{3}{4}\pi r^2=66 \square$ саж. 505. $\pi(R^2-r^2)=$
 $=58\frac{13}{14} \square$ арш. 506. $\frac{\pi n^2 s^2}{(m+n)^2}$ и $\frac{\pi m^2 s^2}{(m+n)^2}$. 507. $\frac{2\pi d\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$ и $\frac{2\pi d\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$.
 508. $\frac{\pi m^2 r^2}{(m-n)^2}=113\frac{1}{7} \square$ саж.; $\frac{\pi n^2 r^2}{(m-n)^2}=9\frac{81}{344} \square$ саж.
 509. $\frac{2\pi a\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}=84,78$ фута, $\frac{2\pi a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=16,96$ фута. 510. $\frac{mr}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$,
 $\frac{nr}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ и $\frac{pr}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$. 511. На $\frac{Cc}{2\pi}$, где C и c окружности.
 512. $\sqrt{\frac{s}{\pi(4\pi^2-1)}}=10$ ф. приб. 513. $\frac{\pi nr^2}{360}=16\frac{81}{68} \square$ арш. 514. $\sqrt{\frac{360q}{r\pi}}$
 $=30$ м. 515. $\frac{360q}{\pi r^2}$. 516. $r\sqrt{6}=5,63$ ф. 517. $\frac{5\pi}{12}(R^2-r^2)=11,775 \square$ арш.
 518. $\frac{n^2\pi b^2}{(\pi n-2m)^2}=7\frac{1}{14} \square$ ф. 519. $(3-\sqrt{5}) \cdot \frac{\pi r^2}{2}$. 520. 1) $\frac{r^2}{4}(\pi-2)=1,14$;
 2) $\frac{r^2}{12}(4\pi-3\sqrt{3})=0,61418$; 3) $\frac{r^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})=3,25$. 521. $\frac{2ar-c\sqrt{4r^2-c^2}}{4}$.
 522. 2,898 арш. 523. $r^2(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\pi)$. 524. $\frac{1}{4}\pi CD^2$. 525. $AC=r(\sqrt{5}-1)$; $BC=$
 $=r(3-\sqrt{5})$; $ADCEBNA=\frac{\pi r^2}{2} \cdot (5-2\sqrt{5})$; $ADCEBMA=\frac{\pi r^2}{2} \cdot (2\sqrt{5}-3)$.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ. 37. Проведемъ плоскость чрезъ точку P и прямую AB , кот. пересѣчетъ CD въ точкѣ Q . Прямая PQ будетъ искомая.

38. Проведемъ плоскость чрезъ прямую AB и въ этой плоскости возставимъ изъ точки C перпендикуляръ къ AB .

39. Чрезъ AB и точку P проведемъ плоскость и въ этой плоскости опустимъ $\perp PQ$ на AB , который и будетъ искомымъ.

40. Длина $\perp PQ$, опущеннаго на AB , будетъ искомое разстояніе.

41. Чрезъ данную прямую AB проведемъ двѣ плоскости M и N , и въ нихъ, изъ данной точки C возставимъ перпендикуляры CD и CE къ данной прямой. Плоскость, проходящая чрезъ прямыя CD и CE , будетъ искомая.

42. Представимъ плоскость чрезъ P и AB и въ этой плоскости опустимъ $\perp PC$ на AB ; чрезъ AB проведемъ еще плоскость и въ ней возставимъ $\perp CD$ къ AB . Плоскость, проходящая чрезъ прямыя PC и CD , будетъ искомая.

43. Въ плоскости M проведемъ прямую AB и чрезъ какую-либо точку P этой прямой проведемъ прямую CD , къ ней перпендикулярную; чрезъ CD представимъ плоскость N и въ этой плоскости прямую $PE \perp CD$; наконецъ, представивъ плоскость чрезъ прямыя AB и PE , проведемъ въ ней прямую $AG \perp AB$. Прямая AG будетъ искомымъ перпендикуляръ.

V 44. Чрезъ точку P проведемъ произвольно плоскость N , кот. пересѣчетъ плоскость M по прямой AB ; въ плоскости N опустимъ $\perp PC$ на AB , а въ плоскости M возставимъ $\perp CD$ къ AB . Представивъ плоскость чрезъ CD и CP , проведемъ въ ней прямую $PE \perp$ къ CD , который и будетъ искомымъ перпендикуляромъ.

45. Проведемъ чрезъ точку P плоскость, перпендикулярную къ AB , кот. пересѣчетъ плоскость M по прямой CD . Прямая CD будетъ искомая.

46. Плоскость, проходящая чрезъ середину прямой AB , перпендикулярно къ ней, будетъ искомое геометрическое мѣсто точекъ.

47. Чрезъ F , середину CD , проведемъ плоскость, перпендикулярную къ CD , кот. пересѣчетъ AB въ точкѣ P . Точка P будетъ искомая.

48. Черезъ середину прямой AB вообразимъ плоскость, \perp -ую къ AB , кот. пересѣчетъ плоскость M по прямой CD . Прямая CD будетъ искомая.

49. Прямая, полученная отъ пересѣченія двухъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ AB и BC и проходящихъ чрезъ середины этихъ прямыхъ, будетъ искомое геометрическое мѣсто точекъ.

50. Точка пересѣченія плоскости M съ прямою, которой точки равно удалены отъ трехъ данныхъ точекъ (VI, 49), будетъ искомая.

51. Вообразимъ прямую XU , которой точки равно удалены отъ точекъ A , B и C (VI, 49) и чрезъ эту прямую и точку A представимъ плоскость; въ этой плоскости, изъ точки A опишемъ дугу радіусомъ a , которая пересѣчетъ прямую XU въ точкахъ E и F . Точки E и F будутъ искомыя.

52. Вообразимъ три плоскости, кот. точки равно удалены отъ A и B , B и C , C и D . Въ пересѣченіи этихъ плоскостей получимъ искомую точку.

53. Плоскость, проходящая чрезъ равнодѣлящую угла BAC , перпендикулярно къ плоскости BAC , будетъ искомое геометрическое мѣсто точекъ.

54. Точка пересѣченія прямой EF съ плоскостью, которой каждая точка равно отстоитъ отъ прямыхъ AB и CD (VI, 53), будетъ искомая.

55. Прямая, полученная въ пересѣченіи плоскости M съ плоскостью, у кот. каждая точка равно удалена отъ прямыхъ AB и AC (VI, 53), искомая.

56. Проведемъ плоскость M , каждая точка которой равно отстоитъ отъ прямыхъ AB и BC ; проведемъ еще плоскость N , каждая точка которой равно отстоитъ отъ прямыхъ BC и AC . Прямая, полученная отъ пересѣченія плоскостей M и N , будетъ искомое геометрическое мѣсто точекъ.

57. Черезъ AB и CD вообразимъ плоскость и въ ней проведемъ прямую KL , параллельную имъ и на равномъ отъ нихъ разстояніи; черезъ KL представимъ плоскость $M \perp$ къ плоскости $ABCD$. Такъ же черезъ CD и EF вообразимъ плоскость и въ ней проведемъ прямую $GH \parallel$ этимъ прямымъ и на одинаковомъ отъ нихъ разстояніи; черезъ GH представимъ плоскость N , перпендикулярную къ плоскости $CDEF$, которая пересѣчетъ плоскость M по прямой XY . Прямая XY будетъ искомая.

58. Представимъ плоскость N , перпендикулярную къ плоскости M , которая пересѣчетъ ее по прямой AB ; въ плоскости N , при какой-либо точкѣ C прямой AB , построимъ $\angle DCA = \alpha$. Прямая CD будетъ искомая.

59. Черезъ точку P вообразимъ плоскость N , перпендикулярную къ плоскости M , которая пересѣчетъ ее по прямой AB . Проведа въ плоскости N прямую CD подъ угломъ α къ прямой AB , получимъ искомую прямую.

60. Представимъ плоскость чрезъ данную прямую AB и точку P ; въ этой плоскости проведемъ прямую $PD \parallel AB$. Прямая PD будетъ искомая.

61. Проведа на плоскости M произвольную прямую AB , представимъ чрезъ P прямую $CD \parallel AB$. Прямая CD будетъ одна изъ искомыхъ.

62. Проведемъ чрезъ точку P прямую $CD \parallel AB$ (VI, 60). Одна изъ плоскостей, проходящая чрезъ прямую CD , будетъ искомая.

63. Опустимъ $\perp PA$ на плоскость M и чрезъ PA представимъ плоскость N , которая и будетъ искомая.

64. Черезъ какую-либо точку E прямой AB проведемъ прямую $EF \parallel CD$. Плоскость, проходящая чрезъ AB и EF , будетъ искомая.

65. Изъ какихъ-либо точекъ C и D прямой AB опустимъ $\perp \perp CE$ и DF на плоскость M . Плоскость, проходящая чрезъ CE и DF , будетъ искомая.

66. Черезъ точку P проведемъ прямая PE и PF , параллельныя AB и CD . Плоскость, проходящая чрезъ прямая PE и PF , будетъ искомая.

67. Опустивъ перпендикуляръ PA на плоскость M , проведемъ чрезъ точку P плоскость $N \perp$ къ PA (VI, 41). Плоскость N будетъ искомая.

68. Изъ произвольной точки A плоскости M возставимъ \perp , на которомъ отложимъ часть $AP = a$. Плоскость, проходящая чрезъ точку P , параллельно плоскости M , будетъ искомая.

69. Проведемъ плоскость $M' \parallel M$ на разстояніи a и плоскость $N' \parallel N$ на разстояніи b . Прямая въ пересѣченіи плоскостей M' и N' искомая.

70. Черезъ EF проведемъ плоскость $M \parallel AB$, кот. пересѣчетъ CD въ G ; въ плоскости проведемъ прямую $GK \parallel AB$, которая и будетъ искомая.

71. Проведемъ произвольно плоскость $N \parallel M$, кот. пересѣчетъ прямая AB и CD въ E и F ; на прямой EF отложимъ часть $EG = a$ и чрезъ G и

прямую CD представимъ плоскость и въ ней проведемъ прямую $GH \parallel AB$, кот. пересѣчетъ CD въ K . Черезъ K представимъ плоскость $Q \parallel M$, которая пересѣчетъ AB въ L . Прямая KL будетъ искомая.

72. Длиною перпендикуляра, опущеннаго изъ какой-либо точки одной плоскости на другую плоскость.

73. Черезъ прямую AB проведемъ плоскость M , параллельную CD (VI, 64), а черезъ прямую CD — плоскость N , параллельную AB . Расстояние между двумя этими плоскостями будетъ искомое.

74. Изъ какой-либо точки E прямой CD , проведемъ прямую $EF \parallel AB$ и черезъ прямую CD представимъ плоскость, \perp къ плоскости EFD , которая пересѣчетъ AB въ точкѣ G . Перпендикуляръ GH , опущенный на CD , будетъ искомымъ.

75. Опустимъ $\perp PQ$ на M . Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность, описанная въ плоскости M изъ точки Q радиусомъ $\sqrt{P^2 - PQ^2}$.

76. Пусть k^2 данная разность. Искомое геом. мѣсто будетъ плоскость $N \perp AB$ и проходящая на разстояніи $k^2 : 2AB$ отъ середины AB (III, 433).

77. Проведемъ плоскость N , какъ въ предыдущей задачѣ, которая пересѣчетъ плоскость M по прямой CD . Прямая CD будетъ искомое геометрическое мѣсто.

78. Изъ C , середины AB , опустимъ $\perp CD$ на M . Искомое geometr. мѣсто будетъ окружн., описан. изъ D , въ плоскости M , радиусомъ $\sqrt{\frac{1}{4}AB^2 - CD^2}$.

79. Изъ точки C , середины прямой AB , опустимъ $\perp CD$ на плоскость M . Искомое геом. мѣсто будетъ окружность, описанная изъ точки D радиусомъ $\frac{1}{2}\sqrt{2P^2 - 4CD^2}$ въ плоскости M .

80. Рѣшеніе то же, что въ 397 задачѣ I отд.

81. Искомая плоскость проходитъ чрезъ ребро двуграннаго угла и равнодѣлящую линейнаго угла, противолежащаго данному двугранному.

82. Смотри 169 задачу I отд.

83. Дать двугранный $\angle ABCD$ и точка P . Проведемъ на граняхъ двуграннаго угла прямыя EF и $GH \parallel$ ребру BC и на равномъ отъ него разстояніи, а затѣмъ представимъ плоскость M чрезъ прямыя EF и GH . Плоскость, проходящая чрезъ точку P , параллельно плоскости M (VI, 67), будетъ искомая.

84. Плоскость, равнодѣлящая двугранный уголъ между данными плоскостями, будетъ искомое геометрическое мѣсто.

85. Проведемъ равнодѣлящую плоскость двуграннаго угла между плоскостями M и N и равнодѣлящую угла между плоскостями N и P ; получимъ въ пересѣченіи плоскостей прямую, кот. и будетъ искомое геометрическое мѣсто точекъ.

86. Искомое геометрическое мѣсто будетъ прямая (VI, 84 и 46).

87. Искомое геометрическое мѣсто будетъ прямая (VI, 84 и 53).

88. Пусть пересѣченіе плоскостей M и N будетъ прямая AB . Возьмемъ двѣ прямыя a и b , находящіяся въ данномъ отношеніи, и изъ какой-либо точки C плоскости M возставимъ перпендикуляръ, на кот. отложимъ часть $CD=a$; чрезъ точку D проведемъ плоскость $M' \parallel M$. Точно такъ же, изъ какой-либо точки E плоскости N возставимъ перпендику-

лрѣзъ къ этой плоскости и на немъ отложимъ часть $EF=b$ и чрезъ точку F проведемъ плоскость $N' \parallel N$, кот. пересѣчетъ плоскость M' по прямой KL . Плоскость, проходящая черезъ прямыя AB и KL , будетъ искомымъ геометрическимъ мѣсто.

89. Пустьъ прямая KL пересѣченіе данныхъ плоскостей. Представимъ плоскость $Q \perp KL$, кот. пересѣчетъ плоскости M и N по прямымъ EOF и GOH ; тогда, въ плоскости Q , искомымъ geometr. мѣсто будетъ периметръ $\square ABCD$, построеннаго, какъ указано въ 326 зад.

I отд. Чрезъ AB, BC, CD и DA представимъ плоскости, перпендикулярныя къ плоскости $ABCD$. Части этихъ плоскостей, ограниченныя данными плоскостями, будутъ искомымъ геом. мѣсто.

90. Продолжимъ грани BSC и ASD (фиг. 102) до встрѣчи ихъ по прямой SF ; продолжимъ также грани ASB и DSC до встрѣчи ихъ по прямой SE . Плоскость, проведенная параллельно плоскости FSE , дастъ въ сѣченіи параллелограммъ.

91. Возьмемъ прямой трехгранный уголъ $SABC$ и положимъ, что во-

просъ рѣшенъ и $\triangle MNP$ будетъ искомымъ. Опустимъ $\perp NN'$ на PM и N' соединимъ съ S ; тогда SN' будетъ $\perp PM$ и плоскость SNN' будетъ \perp плоскости MNP ; слѣд. SN' будетъ высотой $\triangle PSM$. Такъ какъ части PN' и MN' опредѣлятся, когда проведемъ въ данномъ \triangle высоту относительно стороны PM , то легко будетъ построить $\triangle PSM$ въ грани ABC , кот. гипотенуза PM равнялась бы сторонѣ данного треугольника, а части PN' и MN' равнялись бы соответственно тѣмъ отрезкамъ, кот. получимъ на этой сторонѣ, опустивъ \perp изъ противоположной вершины. Точно такъ же легко построить и $\triangle PSN$. Зная же положеніе прямыхъ MP и NP , опредѣлимъ положеніе сѣкущей плоскости.

92. (1, 431). 93. (1, 432).

94. Пустьъ прямая CD будетъ пересѣченіе плоскостей M и N , а E и F точки пересѣченія прямой AB съ плоскостями M и N . Проведемъ чрезъ AB плоскость Q , перпендикулярную къ CD , кот. пересѣчетъ CD въ точкѣ G , и положимъ, что $\angle GEF > \angle GFE$. Тогда (1, 417) точка E будетъ искомая.

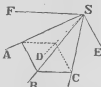
95. Можно. 96. Нѣтъ. 97. Можно. 98. Нѣтъ. 99. $\frac{an+bm}{n+m}$.

100. $\frac{a}{\sqrt{2}} = 1,13$ фут. 101. $2h = 4\frac{3}{4}$ арш. и $h\sqrt{3} = 4,04$ арш.

102. $\frac{2mh}{\sqrt{4m^2-n^2}} = \frac{96}{\sqrt{11}}$; $\frac{2m^2h}{n\sqrt{4m^2-n^2}} = \frac{288}{5\sqrt{11}}$. 103. $\frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

гдѣ $2p = a+b+c$; 11, 2. 104. $\frac{n^2q}{m^2}$. 105. $\sqrt{2}$.

Фиг. 102.



Фиг. 103.



ОТДѢЛЪ СЕДЬМОЙ. 99. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ плоскость, параллельная основанію и проходящая черезъ вершину одной изъ нихъ.

40. Черезъ вершину пирамиды проведемъ плоскость M , параллельную основанію, и изъ какой-либо вершины основанія возставимъ \perp до встрѣчи съ плоскостью M въ A . Точка A будетъ искома вершина пирамиды.

41. Черезъ вершину тетраэдра проведемъ плоскость M , параллельную основанію, а изъ центра описаннаго круга около основанія возставимъ перпендикуляръ, кот. пересѣчетъ плоскость M въ точкѣ S . Точка S будетъ искомая.

42. Многоугольникъ, лежащій въ основаніи, обратимъ въ равновеликій ему многоугольникъ, но имѣющій сторону одною менѣе (V, 196). Тогда, проведя плоскости черезъ вершину пирамиды и стороны полученнаго основанія, найдемъ искомую пирамиду.

43. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ въ предыдущей задачѣ.

44. Данъ тетраэдръ $SABC$. Раздѣлимъ $\triangle ABC$, т.-е. основаніе, прямою AD пополамъ. Плоскость, проходящая черезъ SA и AD , будетъ искомая.

45. Рѣшеніе то же, что и въ предыдущей задачѣ; только прямая AD должна раздѣлить $\triangle ABC$ въ отношеніи m къ n (V, 161).

46. Даны прямыя: AB , CD и EF . Черезъ AB проведемъ плоскости M и $N \parallel CD$ и EF ; черезъ CD проведемъ плоскость $P \parallel EF$ и плоскость $M' \parallel M$, а чрезъ EF проведемъ плоскости N' и $P' \parallel$ плоскостямъ N и P . Въ пересѣченіи плоскостей M , N , P , M' , N' и P' получимъ искомый параллелепипедъ.

47. Пусть k^2 , h , l^2 и x (соотвѣтственно) будутъ: основаніе даннаго параллелепипеда, его высота, данное основаніе и высота искомага параллелепипеда. Тогда x опредѣлится изъ пропорціи: $h : x = l^2 : k^2$ (III, 253).

48. Проведя плоскость черезъ точку пересѣченія діагоналей одного изъ основаній, параллельно другому основанію, получимъ искомый параллелепипедъ.

49. Искомая плоскость проходитъ черезъ данную прямую и точку пересѣченія діагоналей параллелепипеда.

50. Раздѣливъ въ отношеніи m къ n ребро, не лежащее въ той грани, которой должно провести параллельную плоскость, проведемъ черезъ точку дѣленія плоскость M , параллельно данной грани. Плоскость M будетъ искомая.

51. Пусть a и b стороны основанія параллелепипеда и k^2 данная площадь. Положимъ, что плоскость надо провести параллельно ребру a . Въ боковой грани, гдѣ b , проведемъ между другими параллельными сторонами этой грани прямую $l = k^2 : a$ (III, 253) и затѣмъ представимъ плоскость черезъ данную точку, параллельно прямымъ a и l .

52. Пусть A , B , C и D вершины одного основанія, а E , F , G и H , соотвѣтственно, вершины другого. Раздѣлимъ пополамъ ребра AB , AD и DH въ точкахъ M , N и P ; искомая плоскость проходитъ чрезъ точки M , N и P .

53. Искомая плоскость параллельна двумъ противоположнымъ гранямъ.

54. Изъ какой-либо вершины проведемъ двѣ діагонали граней. Тогда плоскость, проходящая чрезъ діагонали, будетъ искомая.

55. Отъ какой-либо вершины A куба отложимъ по тремъ смежнымъ ребрамъ части: AK , AL и AN , равныя $k\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ (III, 399). Плоскость, проходящая чрезъ точки K , L и N , будетъ искомая.

56. Въ $\triangle ABC$ проведемъ медианы, которыя пересѣкутся въ F ; на прямой SF отложимъ часть $FO = \frac{1}{3}SF$. Точка O будетъ искомая.

57. Въ $\triangle ASB$ проведемъ хорду DE , равную a и $\parallel AB$. Тогда плоскость, проходящая чрезъ DE , параллельно ребру SC , будетъ искомая.

58. Пусть k^2 площадь основанія данной пирамиды; h ея высота и P площадь сѣченія. Искомая плоскость отстоитъ отъ вершины на равстоянн x , которое опредѣлится изъ пропорціи: $x : h = l : k$.

59. На ребрѣ SA отложимъ часть SP , опредѣленную изъ пропорціи: $SF^2 : SA^2 = m : n$ (III, 479). Искомая плоскость проходитъ чрезъ точку F , параллельно основанію.

60. Въ плоскости основанія, на сторонѣ AB построимъ $\triangle S'AB$, въ которомъ $S'A = SA$ и $S'B = SB$; на сторонѣ BC построимъ $\triangle S''BC$, въ которомъ $S''B = SB$ и $S''C = SC$. Точка G пересѣченія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ S' и S'' на стороны AB и BC , будетъ искомая. Если же на сторонѣ BS' опишемъ полуокружность, а изъ B дугу радиусомъ BG , кот. пересѣчетъ полуокружность въ D , то $S'D$ будетъ искомая высота.

61. Положимъ, что задача рѣшена и $\square EFGH$ искомымъ (фиг. 104).

Въ немъ $\angle HGF$ равенъ углу, составленному прямыми AC и BS , т.-е. будетъ одинаковымъ при всякомъ сѣченіи тетраэдра плоскостью, параллельною ребрамъ AC и SB ; поэтому, площадь $\square EFGH$ будетъ наибольшею тогда, когда произведение $GH \cdot GF$ будетъ наибольшимъ. $\triangle HBG \sim \triangle ABC$ и $\triangle FCG \sim \triangle BSC$, а потому $GH : AC = BG : BC$ и $GF : BS = CG : BC$; откуда $GH \cdot GF : AC \cdot BS = BG \cdot CG : BC^2$ или $GH \cdot GF = \frac{AC \cdot BS}{BC^2} \cdot BG \cdot CG$. Здѣсь AC , BS и BC данныя

Фиг. 104.



величины, а потому произведение GH на GF будетъ наибольшимъ тогда, когда произведение BG на CG будетъ наибольшимъ, т.-е. когда $BG = CG$, такъ какъ ихъ сумма данная величина. Построеніе очевидно.

Фиг. 105.



62. Чрезъ D и E (фиг. 105), середины реберъ AS и BC , представимъ плоскость, которая въ сѣченіи съ тетраэдромъ дастъ $\diamond EFDG$; проведемъ діагональ DE и опустимъ $\perp \perp FH$ и GK на DE . Площадь $\diamond EFDG = \frac{1}{2}DE(FH + GK)$, а потому видимъ, что эта площадь будетъ наименьшею тогда, когда сумма FH и GK наименьшая, такъ какъ множитель $\frac{1}{2}DE$ данный. Чрезъ DE представимъ плоскость M , параллельную AC и SB ; прямыя FH и GK , параллельныя между собой, бу-

дуть наклонными къ плоскости M и равны между собою, такъ какъ плоскость M будетъ на одинаковыхъ разстоянiяхъ отъ AB и SB . Сумма же ихъ будетъ тогда наименьшею, когда онѣ будутъ \perp къ плоскости M , т.-е. когда плоскость $DFEG$ перпендикулярна къ плоскости M . Рѣшенiе очевидно.

63. Положимъ, задача рѣшена и $DEFC$ (фиг. 106) будетъ искомое сѣченiе въ пирамидѣ $SABCD$. Проведемъ чрезъ S плоскость, перпендикулярную къ AB и CD ; она раздѣлитъ пирамиду на двѣ равныя части, а грань $ABCD$ и сѣченiе $DEFC$ по прямымъ GH и KH . Опустимъ $\perp SO$ на основанiе и $\perp SP$ на плоскость $DEFC$; прямыя SO и SP , т.-е. высоты пирамидъ $SABCD$ и $SDEFC$, будутъ лежать въ плоскости GSH . Означимъ объемъ данной пирамиды чрезъ V и объемъ пирамиды $SDEFC$ чрезъ V_1 ; тогда

$$V = \frac{1}{3} AB^2 \cdot SO \text{ и } V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{EF+CD}{2} \cdot HK \cdot SP;$$

но, по условiю, $V = 2V_1$, а потому

$$AB^2 \cdot SO = (EF+CD) \cdot HK \cdot SP. \quad (1)$$

Опустимъ $\perp HM$ на SG ; тогда $\triangle SOG \sim \triangle HMG$ и потому

$$GH : SG = MH : SO \text{ или } GH \cdot SO = SG \cdot MH \quad (2)$$

и

$$AB \cdot SO = GH \cdot SO = SG \cdot MH.$$

Также $\triangle MHK \sim \triangle KSP$, а потому

$$HK : SK = MH : SP \text{ или } HK \cdot SP = MH \cdot SK. \quad (3)$$

Поставивъ величины изъ (2) и (3) равенствъ въ (1) равенство, получимъ:

$$AB \cdot SG \cdot MH = (EF+AB) \cdot MH \cdot SK$$

или

$$AB \cdot SG = (EF+AB) \cdot SK.$$

$\triangle ASB \sim \triangle ESF$, а потому

$$AB : EF = SG : SK; \text{ откуда } EF = \frac{AB \cdot SK}{SG};$$

слѣдовательно

$$AB \cdot SG = \left(\frac{AB \cdot SK}{SG} + AB \right) SK,$$

или $SG^2 = SK^2 + SG \cdot SK$, или $SG^2 - SG \cdot SK = SK^2$, или $SG(SG - SK) = SK^2$ или $SK : SG = (SG - SK) : SK$.

Отсюда видимъ, что SK будетъ большiй отрѣзокъ прямой SG , раздѣленной въ крайнемъ и среднемъ отношенiи. Построенiе очевидно.

64. Пусть a данное ребро. Построимъ правильный $\triangle ABC$, въ которомъ стороны равны a ; изъ центра его O возставимъ $\perp OE$ и на OE найдемъ такую точку D , чтобы $AD = a$. Тетраедръ $ABCD$ будетъ искомымъ.

65. Пусть данное ребро a . На сторонѣ $AB = a$ построимъ $\square ABCD$ и черезъ его стороны проведемъ плоскости, перпендикулярныя къ $ABCD$ которыя пересѣчемъ плоскостью, параллельною $ABCD$ и отстоящую отъ нея на разстоянiи a . Означивъ точки пересѣченiя плоскостей буквами E, F, G и H , получимъ искомый кубъ $ABCDEFGH$.

66. Данное ребро означим буквою a . На прямой $AB=a$ построим $\square ABCD$ и через точку O пересѣченія его діагоналей проведемъ прямую MN , перпендикулярную къ плоскости $ABCD$. Вверхъ и внизъ отъ плоскости $ABCD$, опредѣлимъ на прямой MN точки E и F такъ, чтобы $AE=AF=a$. Проведя прямыя EB, EC, ED, FB, FC и FD , получимъ искомый октаедръ.

67. Пусть a данное ребро. Построимъ на прямой $AB=a$ правильный пятиугольникъ $ABCDE$ и къ сторонамъ: AB, BC, CD, DE и EA приложимъ пять правильныхъ пятиугольниковъ: $ABHGF, BHFKC, CKLMD, DMNJE$ и $EJPPA$, равныхъ $ABCDE$, и такъ, чтобы они имѣли общія стороны: BH, CK, DM, EJ и AF ; поэтому, при каждомъ трехгранномъ углѣ A, B, C, D и E , получимъ по три правильныхъ пятиугольника и, слѣдовательно, къ пятиугольнику $ABCDE$ будетъ приложено пять правильныхъ пятиугольниковъ. Составимъ еще такую же фигуру, какую мы сейчасъ составили, и соединимъ ее съ первою такъ, чтобы выходящіе углы одной совместились со входящими углами другой; тогда получимъ искомый додекаедръ.

68. Данное ребро a . Построимъ на прямой $AB=a$ правильный шестиугольникъ $ABCDEF$ и приложимъ правильные треугольники, имѣющіе сторону a , къ бокамъ AB и BC такъ, чтобы они имѣли общую вершину G ; точно такъ же приложимъ къ сторонамъ CD и DE такіе же \triangle и пусть H ихъ общая вершина; точно такъ же приложимъ такіе же \triangle къ сторонамъ EF и FA и пусть ихъ общая вершина K ; вѣтъмъ проведемъ плоскости чрезъ AG и GK, KH и HE, GH и GC . Построимъ точно такую же фигуру на правильномъ шестиугольникѣ $A'B'C'D'E'F'$, равномъ $ABCDEF$, и вѣтъмъ обѣ фигуры сложимъ вмѣстѣ такъ, чтобы $F'A'$ совпала съ CB , а $F'E'$ съ CD . Построенная фигура искомый многогранникъ.

$$69. d = a\sqrt{3} = 2,31; \quad D = a^2\sqrt{2} = 2,51; \quad S' = 6a^2 = 10\frac{2}{3}; \quad V = a^3 = 2\frac{10}{27}.$$

$$70. a = \frac{d}{3}\sqrt{3} = 0,35; \quad D = \frac{d^2}{3}\sqrt{2} = 0,17; \quad S' = 2d^2 = 0,72; \quad V = \frac{d^3}{9}\sqrt{3} = 0,04.$$

$$71. a = \sqrt{\frac{D}{V^2}} = 2; \quad d = \sqrt{\frac{3}{2}DV^2} = \sqrt{12}; \quad S' = 3DV^2 = 24; \quad V = \frac{D}{2}\sqrt{DV^2} = 8.$$

$$72. a = \sqrt{\frac{S'}{6}} = 0,5; \quad d = \sqrt{\frac{S'}{2}} = 0,87; \quad D = \frac{S'}{6}\sqrt{2} = 0,35; \quad V = \frac{S'}{6}\sqrt{\frac{S'}{6}} = 0,13.$$

$$73. a = \sqrt[3]{V} = 4; \quad d = \sqrt[3]{V}\sqrt{3} = 6,93; \quad D = \sqrt[3]{V^2}\sqrt{2} = 22,63; \quad S' = 6\sqrt[3]{V^2} = 96.$$

$$74. d = \sqrt{2a^2 + h^2} = \frac{1}{2}; \quad S' = 2a(a+2h) = \frac{4}{9}; \quad V = a^2h = \frac{4}{54}. \quad 75. h = \frac{S' - 2a^2}{4a} = 0,225;$$

$$S = S' - 2a^2 = 0,72; \quad V = \frac{(S' - 2a^2)a}{4} = 0,144. \quad 76. h = \frac{V}{a^2} = 0,4; \quad S' = 2a^2 + \frac{4V}{a} = 22,8.$$

$$77. a = \sqrt{B} = 1,8; \quad h = \frac{V}{B} = 2\frac{2}{9}; \quad S = \frac{4V}{\sqrt{B}} = 20. \quad 78. a = \sqrt{\frac{d^2 - h^2}{2}} = 5; \quad S' = d^2 - h^2 +$$

$$+ 2h\sqrt{2(d^2 - h^2)} = 100; \quad V = \frac{(d^2 - h^2)h}{2} = 62,5. \quad 79. a = \frac{S}{4h} = 1; \quad d = \sqrt{\frac{S^2}{8h^2} + h^2} = 3,32;$$

$$V = \frac{S^2}{16h} = 3. \quad 80. a = \sqrt{\frac{V}{h}} = 1,5; \quad d = \sqrt{h^2 + \frac{V}{h}} = 1,56; \quad S = 4\sqrt{Vh} = 2\frac{2}{3}.$$

81. $a = \sqrt{\frac{S' - S}{2}} = 4$; $h = \frac{S}{2V(2(S' - S))} = 0,5$; $V = \frac{S}{4} \sqrt{\frac{S' - S}{2}} = 8$. 82. $a = \frac{4V}{S} = 8$;
 $h = \frac{S^2}{16V} = \frac{5}{32}$; $S' = S + \frac{32V^2}{S^2} = 133$. 83. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2} = 4,71$; $S' = 2(ab + ah + bh) =$
 $= 34$; $V = abh = 12$. 84. $h = \frac{S' - 2ab}{2(a+b)} = 0,2$; $D = \frac{S' - 2ab}{2(a+b)} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{3}$;
 $V = \frac{(S' - 2ab)ab}{2(a+b)} = \frac{4}{15}$. 85. $b = \frac{S' - 2ah}{2(a+h)} = 0,75$; $S = S' - 2a^2 = 11,5$; $V = \frac{a(S' - 2ah)h}{2(a+h)} =$
 $= 1,6875$. 86. $h = \frac{V}{ab} = 6$; $S = \frac{2V(a+b)}{ab} = 68$; $D = \frac{V}{ab} \sqrt{a^2 + b^2} = 26$. 87. $b = \frac{V}{ah} =$
 $= 0,5$; $S = 2(ah + \frac{V}{a} + \frac{V}{h}) = 35,8$. 88. $h = \frac{Sa}{2(a^2 + B)} = 0,2$; $V = \frac{aSB}{2(a^2 + B)} = 0,508$.
89. a и $b = \frac{S}{4h} \pm \sqrt{\frac{S^2}{16h^2} - B} = 3$ и $1,8$; $V = Bh = 6,3$. 90. a и $b = \frac{S}{4h} \pm$
 $\pm \sqrt{\frac{S^2}{16h^2} - \frac{V}{h}} = 17$ и 1 . 91. b и $h = \frac{S'a - 2V \pm \sqrt{(S'a - 2V)^2 - 16a^3V}}{4a^2} = 4$ и 2 .
92. a и $b = \frac{S(S' - S)}{8V} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S^2(S' - S)^2}{16V^2} - 2(S' - S)} = 6$ и 2 ; $h = \frac{2V}{S' - S} = \frac{1}{4}$.
93. $S = 3ah = 2,8$; $S' = \frac{1}{2}a(6h + a\sqrt{3}) = 3,35$; $V = \frac{1}{2}a^2h\sqrt{3} = 0,32$. 94. $h = \frac{S}{3a} = 1$;
 $S' = S + \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} = 79,43$; $V = \frac{aS}{12}\sqrt{3} = 27,71$. 95. $h = \frac{4V}{3a^2}\sqrt{3} = 20,78$; $S = \frac{4V}{a}\sqrt{3} = 20,78$;
 $S' = \left(\frac{4V}{a} + \frac{a^2}{2}\right)\sqrt{3} = 20,88$. 96. $a = \frac{S}{3h} = 2$; $V = \frac{S^2}{36h}\sqrt{3} = 1,73$; $S' = S + \frac{S^2\sqrt{3}}{18h^2} = 9,46$.
97. $a = \sqrt{3h^2 + \frac{2S'}{3}\sqrt{3}} - h\sqrt{3} = 0,42$; $V = \frac{hV\sqrt{3}}{4} \left\{ \sqrt{3h^2 + \frac{2S'}{3}\sqrt{3}} - h\sqrt{3} \right\}^2 = 0,05$.
98. $a = \sqrt{\frac{4V}{hV\sqrt{3}}} = 1,31$; $B = \frac{V}{h} = 0,75$; $S = 2\sqrt{3VhV\sqrt{3}} = 15,79$. 99. $a = \sqrt{\frac{2(S' - S)V\sqrt{3}}{3}} =$
 $= 2,63$; $h = \frac{S}{\sqrt{6(S' - S)V\sqrt{3}}} = 0,253$; $V = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{S' - S}{6V\sqrt{3}}} = 0,76$. 100. $a = \frac{4V}{S}\sqrt{3} =$
 $= 1,15$; $h = \frac{S^2\sqrt{3}}{36V} = 3,46$; $S' = S + \frac{24V^2}{S^2}\sqrt{3} = 13,15$. 101. $S' = (2c + b)h +$
 $+ \frac{1}{2}b\sqrt{4c^2 - b^2} = 8\frac{2}{3}$; $V = \frac{1}{4}bh\sqrt{4c^2 - b^2} = 1$. 102. $h = \frac{S'}{2c + b} - \frac{b}{2} \sqrt{\frac{2c - b}{2c + b}} = 2$;
 $V = \frac{bS'}{4} \sqrt{\frac{2c - b}{2c + b}} - \frac{b^2}{8}(2c - b) = 7,5$. 103. $h = \frac{4V}{b\sqrt{4c^2 - b^2}} = 0,4$; $S = \frac{4V}{b} \sqrt{\frac{2c + b}{2c - b}} =$
 $= 25,6$. 104. $c = \frac{V\sqrt{4(S' - S)^2 + b^4}}{2b} = 1\frac{1}{4}$; $V = \frac{(S' - S)Sb}{2(b^2 + \sqrt{4(S' - S)^2 + b^4})} = 0,5$.
105. $b = \sqrt{c^2 + S' - S} \pm \sqrt{c^2 + S - S'} = 8$ или 6 ; $V = \frac{S(S' - S)}{2(2c + b)} = 20$ или $22\frac{1}{2}$.
106. $c = \frac{b(S^2b^2 + 16V^2)}{2(S^2b^2 - 16V^2)} = 5,2$; $h = \frac{S^2b^2 - 16V^2}{2Sb^3} = \frac{5}{38}$. 107. $b = \sqrt{c^2 + \frac{2V}{h}} \pm \sqrt{c^2 - \frac{2V}{h}} = 3$
или 1 ; $S = (2c + b)h = 24,65$ или $16,65$.

Въ задачахъ 108 до 111 $2p$ означаетъ периметръ треугольника, а q — его площадь, т.-е. $2p=a+b+c$ и $q=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$$108. S'=2ph+2q=260; \quad V=qh=30. \quad 109. h=\frac{V}{q}=2; \quad S'=2q+\frac{2pV}{q}=2016.$$

$$110. c=\frac{S}{h}-(a+b)=45; \quad V=qh=90. \quad 111. c=\sqrt{a^2+b^2-21\sqrt{a^2b^2-(S'-S)^2}}=5;$$

$$h=\frac{S}{2p}=2; \quad V=\frac{S(S'-S)}{4p}=60. \quad 112. b+c=\frac{S}{h}-a=31; \quad b-c=\sqrt{a^2-\frac{4(S'-S)^2h^2}{S(S-2ah)}}=9;$$

$$b=20 \text{ и } c=11; \quad V=\frac{(S'-S)h}{2}=198. \quad 113. b+c=\frac{S}{h}-a=22; \quad b-c=\sqrt{a^2-\frac{16V^2}{S(S-2ah)}}=8;$$

$$b=15; \quad c=7. \quad 114. h=\frac{2V}{S'-S}=2; \quad b+c=\frac{S(S'-S)}{2V}-a=28; \quad b-c=$$

$$=\sqrt{a^2-\frac{16V^2(S'-S)}{S^2(S'-S)-4aSV}}=2; \quad b=15 \text{ и } c=13. \quad 115. S'=4ah+2d\sqrt{a^2-\frac{d^2}{4}}=552;$$

$$V=dh\sqrt{a^2-\frac{d^2}{4}}=432. \quad 116. h=\frac{2V}{d\sqrt{4a^2-d^2}}=\frac{2}{3}; \quad S'=\frac{8aV+d^2(4a^2-d^2)}{d\sqrt{4a^2-d^2}}=128.$$

$$117. d=\sqrt{a^2+\frac{S'-4ah}{2}}-\sqrt{a^2-\frac{S'-4ah}{2}}=6; \quad V=\frac{(S'-4ah)h}{2}=48. \quad 118. h=\frac{S}{4a}=1;$$

$$d=\sqrt{a^2+\frac{4aV}{S}}-\sqrt{a^2-\frac{4aV}{S}}=3. \quad 119. a=\frac{S}{4h}=10; \quad d=\sqrt{\frac{S^2}{16h^2}+\frac{V}{h}}-$$

$$-\sqrt{\frac{S^2}{16h^2}-\frac{V}{h}}=12. \quad 120. a=\frac{(S'-S)S}{8V}=\frac{5}{13}; \quad d=\sqrt{a^2+\frac{V}{h}}-\sqrt{a^2-\frac{V}{h}}=\frac{1}{2}.$$

$$121. S'=4ah+a^2\sqrt{2}=12,51; \quad V=\frac{1}{2}a^2h\sqrt{2}=1,27. \quad 122. h=-\frac{S'-a^2\sqrt{3}}{4a}=0,57;$$

$$V=\frac{aS'\sqrt{3}-3a^3}{8}=0,49. \quad 123. \text{ Положивъ } a+b+d=2p, \text{ найдемъ: } S'=2(a+b)h+$$

$$+4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-d)}=602; \quad V=2h\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-d)}=72.$$

$$124. h=\frac{S}{2(a+b)}=3; \quad d=\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{4a^2b^2-\frac{16V^2(a+b)^2}{S^2}}=5.$$

$$125. h=\frac{2V}{S'-S}=4; \quad b=\frac{S(S'-S)}{4V}-a=7. \quad 126. b=\sqrt{a^2+d^2-2\sqrt{a^2d^2-\frac{V^2}{h^2}}}=4.$$

$$127. S'=(a+b+2c)h+(a+b)\sqrt{c^2-\frac{(a-b)^2}{4}}=24 \square \text{ фута.}; \quad V=\frac{(a+b)h}{6} \times$$

$$\times \sqrt{c^2-\frac{(a-b)^2}{4}}=11\frac{1}{2} \text{ куб. фута.} \quad 128. \sqrt{\frac{qq'}{q''}}=4; \quad \sqrt{\frac{qq''}{q'}}=9 \text{ и } \sqrt{\frac{q'q''}{q}}=1;$$

$$V=\sqrt{qq'q''}=36. \quad 129. V=\frac{1}{2}(S-2ak)a=2,4 \text{ куб. саж.}$$

$$130. S=\frac{2(mn+np+mp)}{m^2+n^2+p^2}d^2=47 \square \text{ арш.}; \quad V=\frac{mnpd^2}{V(m^2+n^2+p^2)^3}=15\sqrt{2} \text{ куб. арш.}$$

$$131. V=-\frac{mnpV\sqrt{S}}{\sqrt{8(mn+np+mp)^3}}=1,8 \text{ куб. фута.} \quad 132. S=2\left(\sqrt[3]{\frac{mn}{v^2}}+\sqrt[3]{\frac{mp}{n^2}}+\right.$$

- $+ \sqrt{\frac{np}{m^2}} \sqrt[3]{V^2} = 223 \frac{1}{9} \square$ вершка. 133. $S = \sqrt{a_1^4 - (b_1^2 - c_1^2)^2} + \sqrt{b_1^4 - (c_1^2 - a_1^2)^2} +$
 $+ \sqrt{c_1^4 - (a_1^2 - b_1^2)^2}$; $d = \sqrt{\frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}$. 134. $S = 3a(2h + a\sqrt{3}) = 8,31 \square$ м.;
 $V = 1,5a^2h\sqrt{5} = 1,73$ куб. м. 135. $a = \sqrt{\frac{2V}{3h\sqrt{3}}} = 1,86$ куб. арш.; $S = 2\sqrt{2Vh\sqrt{3}} +$
 $+ 2\frac{V}{h} = 29,16 \square$ арш. 136. $S = 12a^2\sqrt{3} = 9,24 \square$ ф.; $V = 6,75a^3 = 2$ куб. фут.
137. $S = 6r^2 + 4,5r^2\sqrt{3} = 34,39 \square$ арш.; $V = 1,5r^3 = 12$ куб. арш. 138. $S = 6r^2\sqrt{2} +$
 $+ 3r^2\sqrt{3} = 13,68 \square$ метра; $V = 1,5r^3\sqrt{6} = 3,67$ куб. метра. 139. $S' = 4r^2\sqrt{2} +$
 $+ 16r^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $V = 4r^3\sqrt{2}$. 140. $S = 8ah + 4a^2(1 + \sqrt{2}) = 26,41 \square$ арш.;
 $V = 2a^2h(1 + \sqrt{2}) = 7,24$ куб. арш. 141. $S = 10ah + 5a^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 15,3 \square$ фута;
 $V = 2,5a^2h\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 1,53$ куб. ф. 142. $S = 5ah + 0,5a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 43,4 \square$ саж.;
 $V = \frac{1}{6}a^2h\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 20,6$ куб. саж. 143. $S = (ab + ac + bc)\sqrt{2} = 3,65$;
 $V = abc\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)} = 0,36$. 144. $V = \sqrt{a^2h_1^2h_2^2 - [bc\sqrt{a^2 - h_3^2} - a\sqrt{(b^2 - h_1^2)(c^2 - h_2^2)}]^2}$.
145. Части высоты суть: $\frac{mh}{m+n+p} = 3$ метр., $\frac{nh}{m+n+p} = 12$ м. и $\frac{ph}{m+n+p} = 9$ м.
Площади сѣченій: $\frac{m^2Q}{(m+n+p)^2} = \frac{8}{5}$ метра и $\frac{(m+n)^2Q^2}{(m+n+p)^2} = 18 \frac{2}{5} \square$ метра.
146. $h\sqrt{\frac{q}{Q}} = 1$ саж., $l\sqrt{\frac{q}{Q}} = 2 \frac{1}{7}$ арш. и $l(1 - \sqrt{\frac{q}{Q}}) = \frac{5}{7}$ арш.
147. $S = 84 + 20\sqrt{2} + 12\sqrt{19}$; $V = \frac{160}{3}\sqrt{2}$. 148. $V = 5$ куб. арш. 149. $S' = ab +$
 $+ a\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} + b\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = 864 \square$ фут.; $V = \frac{1}{2}abh = 960$ кубич. футъ.
150. $\frac{1}{6}abc$. 151. $g = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} = 4,36$; $S = \frac{3a}{2}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}} = 39,23$; $V = \frac{a^3h}{12}\sqrt{3} = 20,78$.
152. $h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{3}} = 1$; $S' = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3} + \frac{1}{6}a\sqrt{4l^2 - a^2} = 4,38$; $V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{3l^2 - a^2} = 1,29$.
153. $l = \sqrt{g^2 + \frac{a^2}{4}} = 1,8$; $h = \sqrt{g^2 - \frac{a^2}{12}} = 0,5$; $S = \frac{3ag}{2} = 4,5$; $V = \frac{a^3}{24}\sqrt{12g^2 - a^2} = 0,65$.
154. $l = \sqrt{\frac{4S^2}{9a^2} + \frac{a^2}{4}} = 0,56$; $h = \sqrt{\frac{4S^2}{9a^2} - \frac{a^2}{12}} = 0,49$; $V = \frac{1}{72}\sqrt{48S^2 - 9a^4} = 0,023$.
155. $h = \frac{4V\sqrt{3}}{a^2} = 1,73$; $g = \sqrt{\frac{48V^2}{a^4} + \frac{a^2}{12}} = 1,83$; $S = \frac{3a}{2}\sqrt{\frac{48V^2}{a^4} + \frac{a^2}{12}} = 5,48$.
156. $a = 2\sqrt{l^2 - g^2} = 4$; $S = 3g\sqrt{l^2 - g^2} = 9$; $V = \frac{1}{3}(l^2 - g^2)\sqrt{4g^2 - l^2} = 2,24$.
157. $h = \sqrt{g^2 - \frac{S^2}{27g^2}} = 1,91$; $l = \sqrt{g^2 + \frac{S^2}{9g^2}} = 5$; $V = \frac{S^2\sqrt{27g^4 - S^2}}{81g^3} = 17,69$.
158. $a = \sqrt{3(l^2 - h^2)} = 6$; $S = \frac{2}{3}\sqrt{3(l^2 - h^2)(l^2 + 3h^2)} = 23,81$; $V = \frac{1}{4}(l^2 - h^2)h\sqrt{3} = 10,39$.
159. $a = \sqrt{l^2 + \frac{2S}{3}} \pm \sqrt{l^2 - \frac{2S}{3}} = 16$ и 12 ; $g = \frac{1}{2}\left(\sqrt{l^2 + \frac{2S}{3}} \mp \sqrt{l^2 - \frac{2S}{3}}\right) = 6$ и 8 .

$$160. r = \frac{2S}{3g} = 6; \quad g = \sqrt{\frac{h^2}{2} + \sqrt{\frac{h^4}{4} + \frac{S^2}{27}}} = 2; \quad V = h \left(\sqrt{\frac{h^4}{4} + \frac{S^2}{27}} - \frac{h^2}{2} \right) \sqrt{3} = 5,2.$$

$$161. a = 2\sqrt{\frac{V\sqrt{3}}{h}} = 8; \quad g = \sqrt{h^2 + \frac{V\sqrt{3}}{3h}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}; \quad S = \frac{3}{h}\sqrt{V(V + h^2\sqrt{3})} = 20\sqrt{3}.$$

$$162. a = \sqrt{\frac{2(S' - S)}{V\sqrt{3}}} = \sqrt{2}; \quad g = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{2V\sqrt{3}}{S' - S}} = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad V = \sqrt{\frac{S^2(S' - S) + 3(S' - S)^2}{27V\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{1}{24}}.$$

$$163. g = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = 39; \quad S = 2a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = 2320; \quad V = \frac{a^2h}{3} = 11200.$$

$$164. h = \sqrt{g^2 - \frac{a^2}{4}} = 24; \quad S' = a(a + 2g) = 1440; \quad V = \frac{a^2}{3}\sqrt{g^2 - \frac{a^2}{4}} = 3200.$$

$$165. h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}} = 5,29; \quad g = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = 8; \quad S' = a^2 + 2a\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = 336;$$

$$V = \frac{a^2}{3}\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}} = 253,99. \quad 166. g = \frac{S' - a^2}{2a} = 7; \quad h = \sqrt{\left(\frac{S'}{2a}\right)^2 - \frac{S'}{2}} = 6,708;$$

$$l = \sqrt{\frac{S'^2}{4a^2} - S' + \frac{a^2}{2}} = 4,12; \quad V = \frac{a}{6}\sqrt{S'(S' - 2a^2)} = 35,777. \quad 167. h = \frac{3V}{a^2} = \frac{2}{3};$$

$$g = \sqrt{\frac{9V^2}{a^4} + \frac{a^2}{4}} = 1\frac{1}{2}; \quad S = \sqrt{\frac{36V^2}{a^2} + a^4} = 5. \quad 168. a = \sqrt{2(l^2 - h^2)} = 9,8;$$

$$g = \sqrt{\frac{1}{2}(h^2 + l^2)} = 5; \quad V = \frac{2}{3}(l^2 - h^2)h = 32. \quad 169. a = 2\sqrt{l^2 - g^2} = 6; \quad S = 4g\sqrt{l^2 - g^2} = 48;$$

$$V = \frac{4}{3}(l^2 - g^2)\sqrt{2g^2 - l^2} = 12\sqrt{7}. \quad 170. a = \sqrt{l^2 + \frac{S}{2}} - \sqrt{l^2 - \frac{S}{2}} = 2; \quad g = \frac{S}{2a} = 2;$$

$$V = (2l^2 - V\sqrt{4l^4 - S^2}) \cdot \frac{1}{4}\sqrt{l^2 - \frac{1}{4}S^2} = 4\sqrt{3}. \quad 171. a = 2\sqrt{g^2 - h^2} = 24; \quad l = \sqrt{2g^2 - h^2} = 17,69;$$

$$S' = a(a + 2g) = 1200; \quad V = \frac{4}{3}h(g^2 - h^2) = 960. \quad 172. a = \sqrt{V\sqrt{S^2 + 4h^4} - 2h^2} = 1,41;$$

$$g = \frac{1}{2}\sqrt{V\sqrt{S^2 + 4h^4} + 2h^2} = 2,12; \quad V = \frac{1}{3}(\sqrt{S^2 + 4h^4} - 2h^2)h = \frac{4}{3}. \quad 173. a = \sqrt{\frac{3V}{h}} = 6;$$

$$l = \sqrt{h^2 + \frac{3V}{2h}} = 5,83; \quad g = \sqrt{h^2 + \frac{3V}{4h}} = 5; \quad S = \sqrt{3V\left(4h + \frac{3V}{h^2}\right)} = 60.$$

$$174. a = \frac{S}{2g} = 2,8; \quad h = \sqrt{g^2 - \frac{S^2}{16g^2}} = 4,8; \quad V = \frac{S^2}{48g^3}\sqrt{16g^4 - S^2} = 12,54. \quad 175. a = \sqrt{S' - S} = 2;$$

$$g = \frac{S}{2V\sqrt{S' - S}} = 2; \quad l = \sqrt{\frac{S^2 + (S' - S)^2}{4(S' - S)}} = 2,24; \quad V = \frac{1}{6}\sqrt{S'(S' - S)(2S - S')} = 2,31.$$

$$176. g = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = 1,73; \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5})} = 1,05; \quad S = \frac{5a}{2}\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = 8,66;$$

$$V = \frac{1}{12}a^2h\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 2,41. \quad 177. S = \frac{5a}{2}\sqrt{h^2 + a^2} \cdot \frac{5 + 2\sqrt{5}}{20} = 16,5;$$

$$V = \frac{a^2h}{12}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 6,88. \quad 178. g = \frac{2S}{5a} = 10; \quad l = \sqrt{\left(\frac{2S}{5a}\right)^2 + \frac{a^2}{4}} = 11,66;$$

$$h = \sqrt{g^2 - \frac{a^2}{20}(5 + 2\sqrt{5})} = 5,64. \quad 179. a = \sqrt{l^2 + \frac{2S}{5}} - \sqrt{l^2 - \frac{2S}{5}} = 2;$$

$$g = \frac{1}{2}\left(\sqrt{l^2 + \frac{2S}{5}} + \sqrt{l^2 - \frac{2S}{5}}\right) = 3; \quad h = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{10}(5 + \sqrt{5})} = 2,66.$$

180. $S' = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} + 3a\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = 75,67$; $V = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3(l^2 - a^2)} = 40,5$. 181. $l = \sqrt{\frac{S^2}{9a^2} + \frac{a^2}{4}} = 1,12$; $h = \sqrt{\frac{S^2}{9a^2} - \frac{3a^2}{4}} = 0,5$; $V = \frac{a}{12}\sqrt{12S^2 - 81a^4} = 0,43$. 182. $h = \frac{2V\sqrt{3}}{9a^2} = 0,29$; $S = \sqrt{\frac{12V^2}{a^2} + \frac{27a^4}{4}} = 11,62$. 183. $a = 2\sqrt{l^2 - g^2} = 0,87$; $S = 6g\sqrt{l^2 - g^2} = 2,35$; $V = 2(l^2 - g^2)\sqrt{12g^2 - 9l^2} = 0,32$. 184. $a = \frac{S}{3g} = 1$; $l = \sqrt{g^2 + \frac{S^2}{36g^2}} = 1,12$; $V = \frac{S^3}{18g^3}\sqrt{3g^2 - \frac{S^2}{4g^2}} = 0,43$. 185. $S = 2a\sqrt{4h^2 + a^2(3 + 2\sqrt{2})} = 6,27$; $V = \frac{2}{3}a^2h(1 + \sqrt{2}) = 1,61$. 186. $S = \frac{5}{2}a\sqrt{4h^2 + a^2(5 + 2\sqrt{5})} = 1,17$; $V = \frac{5}{8}a^2h\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 0,05$. 187. $S = 3a\sqrt{4h^2 + a^2(7 + 4\sqrt{3})} = 13,67$; $V = 3a^2h(2 + \sqrt{3}) = 5,6$. 188. $\frac{a}{2}\sqrt{3(m^2 - 1)} = 25,85$ метра. 189. $a(2 - \sqrt{\frac{7}{2}})$. 190. $S = 6r^2 = 24$ саж.; $V = 2r^3 = 16$ куб. саж. 191. $S = 12r^2\sqrt{3} = 1,3$ фута. 192. $V = \frac{ma^3}{6\sqrt{4m^2 - m^2}} = 6$ куб. фут. 193. $S = 2h^2\sqrt{3} = 3,46$ метра; $V = \frac{2}{9}h^3\sqrt{3} = 0,38$ куб. метра. 194. $\frac{h}{\sqrt[3]{2}} = 1,58$ арш. 195. $h\sqrt{\frac{m}{m+n+p}}$ и $h\sqrt{\frac{m+n}{m+n+p}}$. 196. $\frac{5}{6}a^3 = 22,5$ куб. фута. 197. $m = \sqrt{h^2 + \frac{(a-a_1)^2}{12}} = 2$; $l = \sqrt{h^2 + \frac{(a-a_1)^2}{3}} = 3,6$; $S = \frac{3(a+a_1)}{2} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{(a-a_1)^2}{12}} = 42$; $V = \frac{h}{12}(a^2 + a_1^2 + aa_1)\sqrt{3} = 22,51$. 198. $l = \sqrt{m^2 + \frac{(a-a_1)^2}{4}} = 2,83$; $h = \sqrt{m^2 - \frac{(a-a_1)^2}{12}} = 1,63$; $S = \frac{3(a+a_1)m}{2} = 24$; $V = \frac{h}{12}(a^2 + a_1^2 + aa_1)\sqrt{3} = 12,25$. 199. $m = \sqrt{l^2 - \frac{(a-a_1)^2}{4}} = 4$; $h = \sqrt{l^2 - \frac{(a-a_1)^2}{3}} = 3,61$; $S' = \frac{3}{2}m(a+a_1) + \frac{1}{4}(a^2 + a_1^2)\sqrt{3} = 89,44$; $V = \frac{h}{12}(a^2 + a_1^2 + aa_1)\sqrt{3} = 43,72$. 200. $m = \frac{2S}{3(a+a_1)} = 3$; $h = \sqrt{\frac{4S^2}{9(a+a_1)^2} - \frac{(a-a_1)^2}{12}} = \sqrt{6} = 2,45$; $V = \frac{h}{12}(a^2 + a_1^2 + aa_1)\sqrt{3} = 20,15$. 201. $h = \frac{4V\sqrt{3}}{a^2 + a_1^2 + aa_1} = \sqrt{3} = 1,73$; $l = \sqrt{h^2 + \frac{(a-a_1)^2}{3}} = 2,08$; $S = \frac{3(a+a_1)}{2}\sqrt{h^2 + \frac{(a-a_1)^2}{12}} = 16,43$. 202. $l = \sqrt{h^2 + \frac{(a-a_1)^2}{2}} = \sqrt{8,5} = 2,92$; $m = \sqrt{h^2 + \frac{(a-a_1)^2}{4}} = 2,5$; $S = (a+a_1)\sqrt{4h^2 + (a-a_1)^2} = 25$; $V = \frac{1}{6}(a^2 + a_1^2 + aa_1)h = 14$. 203. $h = \sqrt{m^2 - \frac{(a-a_1)^2}{4}} = 12$; $l = \sqrt{m^2 + \frac{(a-a_1)^2}{4}} = \sqrt{194} = 13,93$; $S' = 2(a+a_1)m +$

$$+(a^2+a_1^2)=770; \quad V=\frac{1}{3}(a^2+a_1^2+aa_1)h=1300. \quad 204. \quad h=\sqrt{l^2-\frac{(a-a_1)^2}{2}}=1;$$

$$m=\sqrt{l^2-\frac{(a-a_1)^2}{4}}=\sqrt{5}=2,24; \quad S=2(a+a_1)m=35,78; \quad V=\frac{1}{3}(a^2+a_1^2+aa_1)h=17\frac{1}{3}.$$

$$205. \quad m=\frac{S}{2(a+a_1)}=5; \quad h=\sqrt{m^2-\frac{(a-a_1)^2}{4}}=3; \quad l=\sqrt{m^2+\frac{(a-a_1)^2}{2}}=7,55;$$

$$V=\frac{h}{3}(a^2+a_1^2+aa_1)=124. \quad 206. \quad h=\frac{3V}{a^2+a_1^2+aa_1}=3; \quad m=\sqrt{h^2+\frac{(a-a_1)^2}{4}}=5;$$

$$l=\sqrt{h^2+\frac{(a-a_1)^2}{2}}=6,4; \quad S=2(a+a_1)m=160. \quad 207. \quad a_1=\sqrt{S_1-S-a^2}=4,$$

$$l=\sqrt{h^2+\frac{(a-a_1)^2}{2}}=18,8; \quad h=\sqrt{m^2-\frac{(a-a_1)^2}{4}}=15; \quad V=2480.$$

$$208. \quad a_1=\sqrt{3\left(\frac{V}{h}-\frac{a^2}{4}\right)}-\frac{a}{2}=5; \quad m=\sqrt{h^2+\frac{(a-a_1)^2}{4}}=13; \quad l=\sqrt{h^2+\frac{(a-a_1)^2}{2}}=13,93;$$

$$S=2(a+a_1)m=520. \quad 209. \quad a_1=\frac{S}{2m}-a=2; \quad h=\sqrt{m^2-\left(a-\frac{S}{4m}\right)^2}=3;$$

$$l=\sqrt{m^2+2\left(a-\frac{S}{4m}\right)^2}=7,55; \quad V=124. \quad 210. \quad S=3(a+a_1)m=720; \quad V=$$

$$=\frac{1}{3}(a^2+a_1^2+aa_1)\sqrt{m^2-\frac{(a-a_1)^2}{4}}=992. \quad 211. \quad a_1=\sqrt{\frac{2(S'-S)}{3V^3}}-a^2=1;$$

$$h=\sqrt{m^2-\frac{3(a-a_1)^2}{4}}=3; \quad V=\frac{h}{3}(a^2+a_1^2+aa_1)=13. \quad 212. \quad S=2(a+a_1)\times$$

$$\times \sqrt{4h^2+(3+2\sqrt{2})(a-a_1)^2}=6\sqrt{4+2\sqrt{2}}; \quad V=\frac{2}{3}h(V\sqrt{2}+1)(a^2+a_1^2+aa_1)=$$

$$=\frac{2}{3}(V\sqrt{2}+1). \quad 213. \quad \frac{Bh\sqrt{B}}{3(V\sqrt{B}-V\sqrt{b})}=9 \text{ куб. арш.}; \quad \frac{bhV\sqrt{b}}{3(V\sqrt{B}-V\sqrt{b})}=2\frac{2}{3} \text{ куб. аршинъ.}$$

$$214. \quad b=\frac{3V}{h}-\frac{B}{2}-\sqrt{3B\left(\frac{V}{h}-\frac{B}{4}\right)}=4; \quad V'=\frac{bhV\sqrt{b}}{3(V\sqrt{B}-V\sqrt{b})}=8. \quad 215. \quad \left(\frac{V\sqrt{B}+V\sqrt{b}}{2}\right)^2=$$

$$=12 \square \text{ арш.} \quad 216. \quad \frac{h}{2}+\sqrt{\frac{VH^2}{Bh}-\frac{h^2}{12}}=16. \quad 217. \quad H\left(1-\sqrt{\frac{1}{m+1}}\right)=0,519248H,$$

$$\text{гдѣ } H \text{ высота данной пирамиды.} \quad 218. \quad \frac{h}{2} \cdot \frac{\sqrt{2(B+b)}-2V\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}=1,1.$$

$$219. \quad \frac{h\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{b}}=6. \quad 220. \quad \frac{h}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\left(\sqrt[3]{\frac{BV\sqrt{B}+bV\sqrt{b}}{2}}-\sqrt[3]{b}\right). \quad 221. \quad \frac{1}{9}(2V\sqrt{b}+V\sqrt{B})^2=$$

$$=5\frac{1}{3} \square \text{ фута,} \quad \frac{1}{9}(V\sqrt{b}+2V\sqrt{B})^2=8\frac{1}{3} \square \text{ фута.} \quad 222. \quad \frac{h}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}\left(\sqrt[3]{\frac{mBV\sqrt{B}+nbV\sqrt{b}}{m+n}}-\sqrt[3]{b}\right).$$

$$223. \quad V=\frac{1}{3}(k+l+m)\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{гдѣ} \quad 2p=a+b+c=35.$$

$$224. \quad \frac{(h_1+h_2+h_3)^2\sqrt{3}}{108}=3,46 \text{ куб. арш.} \quad 225. \quad S=\frac{1}{2}[(k+l)a+(l+m)b+(m+k)c]=$$

$$=118,5; \quad V=\frac{1}{3}(k+l+m)\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=196, \quad \text{гдѣ} \quad 2p=a+b+c.$$

$$\begin{aligned}
226. \frac{k\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} \text{ и } \frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}. \quad 227. \frac{m^2s}{m^2-n^2} \text{ и } \frac{n^2s}{m^2-n^2}, \text{ гдѣ } m > n. \quad 228. a\sqrt{\frac{V}{V'}} = \\
= 0,36 \text{ саж.} \quad 229. \left(\frac{b}{a}\right)^3 \cdot V = 80 \text{ куб. ф.} \quad 230. \frac{m^3V}{m^3+n^3} \text{ и } \frac{n^3V}{m^3+n^3}. \quad 231. \frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \\
\text{и } \frac{d\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}. \quad 232. \frac{m^3V}{m^3+n^3+p^3}, \frac{n^3V}{m^3+n^3+p^3} \text{ и } \frac{p^3V}{m^3+n^3+p^3}. \quad 233. S = a^2\sqrt{3}; \\
V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}. \quad 234. S = 2a^2\sqrt{3}; V = \frac{1}{8}a^3\sqrt{2}. \quad 235. S = 5a^2\sqrt{3}; V = \frac{5}{12}a^3\sqrt{14+6\sqrt{5}}. \\
236. S = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}; V = \frac{1}{2}a^3(15+7\sqrt{5}). \quad 237. S = 3kl; V = \frac{l^3}{4}\sqrt{\frac{4k^4-(k^2-l^2)^2}{k^2+l^2}}. \\
238. a(2-\sqrt{2}). \quad 239. S = a^2\sqrt{3}; V = \frac{1}{6}a^3, \text{ гдѣ } a \text{ ребро куба.} \quad 240. V = \frac{1}{6}abc \text{ и} \\
S = \sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}.
\end{aligned}$$

ОТДѢЛЪ ВОСЬМОЙ. 31. R , r и a радиусъ даннаго круга, радиусъ основанія и образующая конуса. Отложимъ отъ S вершины конуса на одной изъ образующихъ часть $SA=l$, определенную изъ пропорціи $l:a=::R:r$. Плоскость, проходящая чрезъ A || основанію, будетъ искомая.

32. Проведемъ въ основаніи цилиндра хорду, равную $k^2:h$, гдѣ h высота цилиндра, и черезъ эту хорду представимъ плоскость M , параллельную оси. Плоскость M будетъ искомая.

33. Черезъ данную точку A и ось цилиндра представимъ плоскость M , кот. пересѣчетъ цилиндрическую поверхность по прямой BAC . Плоскость, проведенная черезъ прямую $BAC \perp$ къ плоскости M , будетъ искомая.

34. Рѣшеніе то же, что и въ предыдущей задачѣ.

35. Черезъ данную точку A проведемъ плоскость $M \perp$ къ оси цилиндра, кот. въ пересѣченіи съ цилиндромъ дастъ кругъ BCD . Изъ точки A , въ плоскости M , проведемъ касательную къ кругу BCD , и пусть E точка касанія. Плоскость, проходящая чрезъ $AE \perp$ къ плоскости M , искомая.

36. Рѣшеніе то же, что въ предыдущей задачѣ.

37. Раздѣлимъ образующую цилиндра въ отношеніи m къ n и черезъ точку дѣленія проведемъ плоскость параллельно основанію; эта плоскость будетъ искомая.

38. (VIII, 37). 39. (V, 258). 40. (V, 159).

41. Искомая плоскость отстоятъ отъ вершины конуса на $H\sqrt{\frac{m}{m+n}} = \frac{2H}{3}$, гдѣ H высота конуса.

42. На образующей цилиндра отложимъ часть $l = \frac{1}{2}(H + \sqrt{H^2 - R^2})$, гдѣ H -- высота цилиндра, а R -- радиусъ основанія. Черезъ точку дѣленія проведемъ плоскость, параллельно основанію, которая и будетъ искомая.

43. Проведемъ прямую чрезъ A и O . Пусть одна точка пересѣченія прямой съ поверхностью шара (между точками A и O) будетъ B , а другая -- C . Тогда AB будетъ кратчайшее, а AC -- наибольшее разстояніи

44. Проведемъ плоскость чрезъ $O \perp AB$, которая пересѣчетъ ее въ C . Искомыя разстоянія равны кратчайшему и наибольшему разстоянію точки O до поверхности шара.

45. Опустимъ перпендикуляръ OA на плоскость M . Искомыя разстоянія равны кратчайшему и наибольшему разстоянію A до поверхности шара.

46. Раздвигаемъ ножки циркуля*) на столько, чтобы конецъ одной ножки былъ въ A , а другой въ B и, проведя на плоскости прямую XY , поставимъ одну ножку циркуля къ какой-либо ея точкѣ C , а другою ножкою опишемъ дугу EF , которая пересѣчетъ прямую XY въ точкѣ D . Длина CD будетъ искомое разстояніе.

47. Раздвигаемъ ножки циркуля на длину r и, поставивъ одну ножку въ A , обращаемъ циркуль такъ, чтобы другая ножка прикасалась къ поверхности шара. Тогда концомъ этой ножки опишемъ искомую окружность.

48. Изъ точки A , взятой на поверхности шара, опишемъ на ней окружность, на кот. возьмемъ точки B , C и D и измѣримъ разстоянія BC , BD , CD и BA (VIII, 46). Построимъ на плоскости $\triangle B'C'D' = \triangle BCD$ и около $\triangle B'C'D'$ опишемъ окружн. O' . На $B'O'$ построимъ $\triangle B'A'O'$, въ кот. гипотенуза $B'A' = BA$, и продолжимъ $A'O'$ до встрѣчи въ E съ $\perp B'X$ къ прямой $B'A'$. Половина прямой $A'E$ будетъ радіусомъ шара.

49. Черезъ точку A проведемъ плоскость $N \parallel M$, кот. въ сѣченіи съ шаромъ дастъ кругъ. Тогда, въ этомъ кругѣ, проведемъ черезъ A хорду данной длины.

50. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ большой кругъ, лежащій въ плоскости, проходящей черезъ центръ шара, перпендикулярно прямой AB .

51. Означимъ радіусъ шара буквою R . Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность, описанная радіусомъ $\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}$ и лежащая въ плоскости, проходящей черезъ центръ шара, перпендикулярно AB .

52. R радіусъ шара. Искомое геом. мѣсто точекъ будетъ поверхность шара, концентрическая съ данною и описанная радіусомъ $= \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a^2}$.

53. Означимъ радіусъ шара буквою R . Искомая плоскость проходитъ отъ центра на разстояніи $\sqrt{R^2 - r^2}$.

54. Пусть R означаетъ радіусъ даннаго шара, а πr^2 — площадь даннаго круга, гдѣ $r < R$. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ поверхность шара, описанная изъ центра шара радіусомъ $\sqrt{R^2 - r^2}$.

55. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность.

56. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ поверхность шара, концентрическая съ данною и описанная изъ O радіусомъ, равнымъ суммѣ радіуса даннаго шара съ l .

57. Въ какой-либо плоскости, проходящей черезъ точки A и B , построимъ $\triangle ABC$, въ кот. сторона $CA = k$ и $CB = l$; опустимъ перпенди-

*) Циркуль для черченія диній на поверхности шара имѣетъ ножки дугообразныя, а не прямыя.

кулярь CD на AB . Искомое geometr. мѣсто точекъ будетъ окружность, описанная изъ D радиусомъ CD въ плоскости, проходящей черезъ точку D перпендикулярно къ AB .

58. Рѣшеніе то же, что и въ предыдущей задачі. Здѣсь $k = a + R$ и $l = b + R$, гдѣ R — радиусъ шара.

59. R , R' и R'' радиусы шаровъ. Найдемъ геом. мѣсто точекъ, отстоящихъ отъ O на $R+a$ и отъ O' на $R'+b$ (VIII, 58), а изъ O опишемъ шаровую поверхность радиусомъ $R''+c$, кот. въ пересѣченіи съ полученнымъ геометрическимъ мѣстомъ дастъ или двѣ искомыя точки, или одну, или ни одной.

60. Плоскость M , проведенная черезъ $A \perp$ къ AO , будетъ искомая.

61. Черезъ A проведемъ касательную плоскость M къ шару. Всякая прямая, проходящая въ этой плоскости чрезъ точку A , будетъ искомая.

62. Чрезъ центръ шара проведемъ прямую $XU \perp$ къ плоскости M , которая пересѣчетъ поверхность шара въ точкахъ A и B . Плоскости M , проходящія чрезъ A и B , перпендикулярно къ XU , будутъ искомыя.

63. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 253 задачи II отд.

64. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 254 задачи II отд.

65. Проведемъ плоскость M черезъ O и AB . Въ этой плоскости проведемъ прямую CD подъ угломъ α къ AB ; опустимъ перпендикуляръ OK на CD , который пересѣчетъ поверхность шара въ E и E' . Плоскость, проходящая черезъ точку E или $E' \perp$ къ OE , будетъ искомая.

66. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 253 задачи II отд.

67. Проведемъ плоскость M черезъ O и AB , кот. пересѣчетъ поверхность шара по окружн. COE ; въ этой плоскости проведемъ касательную въ окружн. COE подъ угломъ α къ AB . Эта касательная искомая.

68. Точка пересѣченія плоскостей, проход. черезъ середины прямыхъ AB , BC и CD , перпендикулярно къ нимъ, будетъ центръ искомага шара.

69. Проведемъ плоскости M и N черезъ середины прямыхъ AB и BC , перпендикулярно къ нимъ, кот. пересѣкнутся по прямой DE . Опишемъ, въ плоскости M , изъ A дугу радиусомъ r , кот. пересѣчетъ DE въ O . Точка O будетъ центръ искомага шара.

70. Изъ точки A возставимъ перпендикуляръ къ плоскости M (VI, 45) и на немъ отложимъ часть $OA=r$. Точка O будетъ центръ искомага шара.

71. Отрѣзокъ перпендикуляра, опущеннаго изъ A на плоскость M , будетъ радиусъ искомага шара.

72. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ плоскость, параллельная данной и находящаяся отъ нея на разстояніи r .

73. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ плоскость, перпендикулярная къ AB и проходящая черезъ точку C .

74. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность радиуса r , описанная изъ точки C въ плоскости, проходящей чрезъ точку $C \perp$ AB .

75. Искомое geometr. мѣсто точекъ будетъ цилиндрическая поверхность, описанная прямою, параллельною данной и проходящею отъ нея на разстояніи r .

76. См. 53 зад. VI отд. 77. См. 56 зад. VI отд. 78. См. 84 зад. VI отд.

79. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ прямая, полученная въ пересѣченіи двухъ плоскостей, параллельныхъ даннымъ и отстоящихъ отъ нихъ на разстояніи радіуса.

80. См. 85 задачу VI отд.

81. Точку A соединимъ прямою съ O , которая пересѣчетъ поверхность шара въ точкѣ B . Тогда AB будетъ радіусъ искомаго шара.

82. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ прямая OA .

83. Искомое геом. мѣсто точекъ будетъ поверхность шара концентрической съ данною и описанная радіусомъ, равнымъ $R+r$ или $R-r$.

84. Проведемъ плоскость чрезъ A и O и въ ней къ большому кругу, полученному въ сѣченіи, проведемъ изъ точки A касательную. Эта касательная будетъ одна изъ искомыхъ.

85. Чрезъ O представимъ плоскость $M \perp$ къ AB , кот. пересѣчетъ ее въ C , а шаръ — по окружности DEF ; проведемъ касательную CG къ кругу DEF и чрезъ CG плоскость $N \perp$ къ M . Плоскость N искомая.

86. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ 332 задачи II отд.

87. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ поверхность шара, описанная на данной прямой, какъ діаметръ.

88. Означимъ радіусъ шара буквою R и разстояніе отъ A до O буквою a . Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность, которой каждая точка отстоитъ отъ O на $\sqrt{R^2 - r^2}$ и отъ A на $\sqrt{a^2 - R^2 + r^2}$ (VIII, 57).

89. Рѣшеніе то же, что и въ предыдущей задачѣ.

90. Проведемъ чрезъ O плоскость $M \perp AB$, которая пересѣчетъ ее въ C . Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность, лежащая въ плоскости M и описанная на OC , какъ діаметръ.

91. Рѣшеніе то же, что и въ 455 задачѣ II отд.

92. Проведемъ плоскость $M' \parallel M$ на разстояніи r и еще другую плоскость $N \perp AB$ и проходящую черезъ C , середину AB . Въ плоскости N , изъ C опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}AB^2}$, которая или пересѣчетъ плоскость M' въ двухъ точкахъ, или коснется ее, или же не пересѣчетъ ее. Въ первомъ и во второмъ случаѣ, полученные точки будутъ центрами искомыхъ шаровыхъ поверхностей.

93. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

94. Проведемъ прямую BC на разстояніи даннаго радіуса отъ данныхъ плоскостей (VI, 69); изъ A опишемъ окружность радіусомъ r въ плоскости, проходящей черезъ A и прямую BC , которая или пересѣчетъ прямую BC , или коснется BC , или же не пересѣчетъ BC . Полученныя точки будутъ искомыя.

95. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

96. Проведемъ на разстояніи r плоскость $M' \parallel M$, и также прямую AB , которой каждая точка равно отстоитъ отъ плоскостей N и Q (VI, 69). Прямая AB или пересѣчетъ плоскость M' , или нѣтъ; въ первомъ случаѣ полученная точка будетъ искомая.

97. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

98. На разстояніи r проведемъ плоскость $M' \parallel M$, а изъ A опишемъ шаровую поверхность радіусомъ r , кот. или пересѣчетъ плоскость M' по

окужн. круга или коснется ея, или не пересѣчетъ. Въ первомъ случаѣ рѣшеній — множество, во второмъ — одно, а въ третьемъ — ни одного.

99. Рѣшеніе сходно съ рѣшеніемъ предыдущей задачи.

100. Пусть R радіусъ шара. Представимъ плоскости M' и $N' \parallel M$ и N и отстоящія отъ нихъ на r , кот. пересѣкутся по прямой AB ; изъ O опишемъ окружность радіусомъ $R+r$ въ плоскости, проходящей черезъ прямую AB и O , кот. пересѣчетъ AB въ двухъ точкахъ, или коснется, или не пересѣчетъ ее. Въ первыхъ двухъ случаяхъ, полученные точки будутъ искомыя.

101. Пусть R и R' радіусы шаровъ O и O' . Проведемъ плоскость $M' \parallel M$ на разстояніи r и опредѣлимъ положеніе окружности ABC , которой каждая точка отстоитъ отъ точки O на $R+r$, а отъ O' на $R'+r$ (VIII, 57). Полученная окружность будетъ имѣть съ плоскостью M или двѣ общія точки, или одну, или ни одной; въ первыхъ двухъ случаяхъ, найденныя точки будутъ центрами искомыхъ шаровъ.

102. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ поверхность шара, концентрическая съ данною и описанная радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, построеннаго по катету, равному радіусу шара, и противолежащему ему углу, равному половинѣ даннаго угла.

103. Пусть R и R' радіусы данныхъ шаровъ. Построимъ два \angle по катетамъ R и R' и противолежащимъ (соотвѣтственно) имъ угламъ $\frac{1}{2}\alpha$ и $\frac{1}{2}\beta$; пусть гипотенузы этихъ прямоугольныхъ треугольниковъ будутъ k и l . Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность, которой каждая точка отстоитъ отъ точки O на k , а отъ точки O' на l (VI, 56).

104. Искомая точка находится въ пересѣченіи окружности круга, изъ точекъ кот. два шара O и O' видны подъ углами α и β (VIII, 103), съ поверхностью шара, изъ точекъ которой виденъ третій шаръ подъ угломъ γ (VIII, 102).

105. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ поверхность шара, радіусъ котораго опредѣлится, какъ указано въ 434 задачѣ III отд.

106. Пусть C и D середины прямыхъ AB и BC . Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность, которая каждая точка отстоитъ отъ C на $\sqrt{\frac{1}{2}k^2 - BC^2}$ и отъ D на $\sqrt{\frac{1}{2}l^2 - BD^2}$ (VIII, 57).

107. Поверхность шара.

108. Раздѣлимъ прямую AB въ точкѣ C такъ, чтобы $AC : CB = m : n$ и на продолженіи прямой AB опредѣлимъ точку D такъ, чтобы $AD : DB = m : n$. Искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ поверхность шара, у котораго діаметромъ прямая CD .

109. Поверхность шара, кот. діаметръ построимъ, какъ въ 479 зад. III отд.

110. Проведемъ плоскость M черезъ O и въ этой плоскости изъ O опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ половинѣ радіуса шара; проведемъ касательную къ меньшему кругу, которая пересѣчетъ окружность большаго круга въ точкахъ A и B . Плоскость, проходящая черезъ $B \perp$ къ AO , будетъ искомая.

111. Раздѣлимъ высоту пояса въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Плоскость, проход. чрезъ точку дѣленія \parallel основанію пояса, будетъ искомая.

112. Искомая плоскость отстоитъ отъ O на $R(\sqrt{5}-2)$, гдѣ R радіусъ шара.

113. Искомая плоскость отстоитъ отъ O на $\frac{4-m^2}{4+m^2} R$, гдѣ R радіусъ шара.

114. Искомое основаніе конуса отстоитъ отъ центра шара на $R(\sqrt{5}-2)$.

115. Пусть R радіусъ шара и $OA=a$. Разстоянія отъ O до плоскостей, въ которыхъ лежатъ хорды, будутъ:

$$\sqrt{\frac{(3R^2-2a^2)m^2}{m^2+n^2+p^2}-(R^2-a^2)}, \sqrt{\frac{(3R^2-2a^2)n^2}{m^2+n^2+p^2}-(R^2-a^2)}, \sqrt{\frac{(3R^2-2a^2)p^2}{m^2+n^2+p^2}-(R^2-a^2)}.$$

Дальнѣйшее построеніе очевидно.

116. Пусть R радіусъ шара и $OA=a$. Разстоянія отъ центра шара до плоскостей, въ которыхъ лежатъ искомые круги, будутъ:

$$\sqrt{R^2-\frac{(3R^2-a^2)m}{m+n+p}}, \sqrt{R^2-\frac{(3R^2-a^2)n}{m+n+p}} \text{ и } \sqrt{R^2-\frac{(3R^2-a^2)p}{m+n+p}}.$$

Дальнѣйшее построеніе очевидно.

117. Смотри рѣшеніе 68 задачи этого отд.

118. Возставимъ $\perp \perp$ къ двумъ гранямъ изъ центровъ круговъ, вписанныхъ въ эти грани, которые дадутъ въ пересѣченіи центръ искомага шара. Опустивъ же перпендикуляръ изъ найденной точки на одну изъ граней, получимъ радіусъ искомага шара.

119. Поверхность шара, проходящая черезъ четыре вершины правильнаго многогранника (VIII, 68), будетъ искомая.

120. Рѣшеніе то же, что въ 118 задачѣ этого отд.

121. На окружности даннаго круга возьмемъ три точки A , B и C и на плоскости построимъ $\triangle A'B'C'$, въ которомъ $A'B'=AB$, $A'C'=AC$ и $B'C'=BC$, и около него опишемъ окружность, которой центръ пусть O . Затѣмъ, описавъ окружность большаго круга (VIII, 48), проведемъ діаметръ его EF , а потомъ прямую GH , параллельно EF , на разстояніи OA' , которая пересѣчетъ окружность въ точкахъ K и L . Изъ точки A опишемъ на поверхности шара дуги радіусами EK и FK , а также и изъ точки B опишемъ дуги тѣми же самими радіусами, которыя въ пересѣченіи дадутъ полюсы P и P' .

122. На плоскости опишемъ окружн. большаго круга и проведемъ діаметръ AB и еще прямую $DE \parallel AB$, на разстояніи радіуса искомой окружности, кот. пересѣчетъ начерченную окружн. въ C и C' . Хорда AC будетъ радіусъ, кот. должно описать искомую окружн. изъ данной точки.

123. Опредѣлимъ полюсъ P даннаго круга и изъ него даннымъ радіусомъ опишемъ окружность на поверхности шара (VIII, 122).

124. Изъ данной точки опишемъ окружность радіусомъ, равнымъ хордѣ, соотвѣтствующей четверти окружности большаго круга (VIII, 122).

125. Изъ A и B опишемъ окружности большихъ круговъ, кот. пересѣкутся, положимъ, въ точкѣ C . Принявъ C за полюсъ, опишемъ изъ него на поверхности шара окружность радіусомъ CA , кот. и будетъ искомая.

126. Проведемъ окружность большаго круга чрезъ двѣ данныя точки. Меньшая изъ дугъ большаго круга будетъ искомая.

127. Изъ какой-либо точки данной окружности опишемъ дугу большаго круга, которая и будетъ искомая.

128. Плоскость, проходящая чрезъ центръ шара подѣ даннымъ угломъ

плоскости данного большого круга, дать въ пересѣченіи съ поверхностью шара искомую дугу.

129. (II, 194). 130. (II, 195). 131. (II, 290). 132. (II, 282). 133. (II, 253). 134. (II, 204). 135. (II, 276). 136. (III, 350). 137. (II, 291). 138. (III, 352).

Рѣшеніе задачъ отъ 139—150 не представляетъ особыхъ затрудненій. При рѣшеніи задачъ 144, 145 и 146 надо прибѣгнуть къ полярному Δ .

151. Положимъ, имѣемъ на данномъ основаніи AB треугольникъ CAB , и пусть P будетъ полюсъ окружности, проходящей чрезъ A , B и C . Если проведемъ дуги большихъ круговъ чрезъ точки P и A , P и B , P и C , то разложимъ треугольникъ CAB на три равнобедренные треугольника. Означимъ уголъ PAB буквою α ; тогда и $\angle PBA$ будетъ также равенъ α . Означимъ $\angle CAP$ буквою β , $\angle CBP$ буквою γ и данную разность буквою φ ; тогда, на основаніи данного условія, имѣемъ, что $\angle CAB + \angle CBA - \angle ACB = \varphi$ или, замѣняя $\angle CAB$ суммою $\alpha + \beta$, $\angle CBA$ суммою $\alpha + \gamma$ и $\angle ACB$ суммою $\beta + \gamma$, найдемъ $\alpha + \beta + \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \varphi$; откуда $\alpha = \frac{1}{2}\varphi$. Итакъ, положеніе равнобедреннаго треугольника PAB вполне определено, а потому постоянно будемъ имѣть: $PC = PA = PB$. Слѣдовательно, искомое геометрическое мѣсто точекъ будетъ окружность малаго круга, проходящаго чрезъ точки A , B и C и имѣющаго полюсъ въ точкѣ P .

152. Положимъ, что имѣемъ треугольникъ CAB , въ которомъ AB есть данное основаніе, и пусть m выражаетъ отношеніе площади треугольника CAB къ поверхности прямого двухсторонника. Принявъ прямой уголъ за единицу, получимъ: $A + B + C - 2 = m$. (1) Продолжимъ бока AC и BC до встрѣчи въ A' и B' съ продолженною дугою AB большого круга; тогда получимъ треугольникъ $A'B'C'$, въ которомъ углы A' и B' будутъ дополнительными углами A и B , т.-е. $A = 2 - A'$ и $B = 2 - B'$. Подставивъ въ (1) равенствѣ вмѣсто A и B ихъ величины, найдемъ:

$$A' + B' - C = 2 - m;$$

откуда слѣдуетъ, что разность между суммою двухъ угловъ A' и B' и угломъ C постоянная, а потому (VIII, 151) точка C опишетъ дугу малаго круга, проходящаго чрезъ точки A и B и у котораго полюсъ находится на пересѣченіи дугъ большихъ круговъ, проходящихъ чрезъ точки A' и B' подъ углами къ AB , равными $1 - \frac{1}{2}m$. Итакъ, геометрическое мѣсто вершинъ сферическихъ треугольниковъ будетъ дуга малаго круга, проходящаго чрезъ точки, діаметрально противоположныя концамъ основанія треугольника. 153. (V, 180). 154. $2h\sqrt{r^2 - k^2} = 13 \square$ саж. 155. $\sqrt{r^2 - \frac{q^2}{4h^2}} = 2$ фут.

$$156. S = 2\pi rh = \frac{1}{3}; \quad S' = 2\pi r(h+r) = 10\frac{31}{75}; \quad V = \pi r^2 h = 2\frac{17}{30}. \quad 157. h = \frac{S}{2\pi r} = 5;$$

$$S' = S + 2\pi r^2 = 17,27; \quad V = \frac{rS}{2} = 3,925. \quad 158. h = \frac{S'}{2\pi r} - r = \frac{1}{4}; \quad S = S' - 2\pi r^2 = 1\frac{1}{7};$$

$$V = \left(\frac{S'}{2} - \pi r^2\right)r = \frac{11}{34}. \quad 159. h = \frac{V}{\pi r^2} = 4; \quad S = \frac{2V}{r} = 88; \quad S' = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = 165.$$

$$160. r = \frac{S}{2\pi h} = 6,78; \quad V = \frac{S^2}{4\pi h} = 20,34. \quad 161. r = \sqrt{\frac{S'}{2\pi} + \frac{k^2}{2}} - \frac{h}{2} = 2,5;$$

$$S = 2\pi rh = 18\frac{6}{7}; \quad V = \pi r^2 h = 14\frac{1}{7}. \quad 162. \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = 0,3; \quad S = 2\sqrt{\pi V h} = 2,4\pi;$$

$$\begin{aligned}
 S' &= 2 \left(\frac{V}{h} + V\pi\sqrt{Vh} \right) = 4,2\pi. & 163. r &= \sqrt{\frac{S'-S}{2\pi}} = 5; & h &= \frac{S}{\sqrt{2\pi(S'-S)}} = \frac{20}{157}; \\
 V &= \frac{S}{2} \sqrt{\frac{S'-S}{2\pi}} = 10. & 164. r &= \frac{2V}{S} = \frac{7}{44}; & h &= \frac{S^2}{4\pi V} = 11; & S' &= S + \frac{8\pi V^2}{S^2} = 11\frac{7}{44}. \\
 165. S' &= S + \frac{P}{2\pi} = 8 \square \text{ фут.}; & V &= \frac{Sl}{4\pi} = 0,86 \text{ куб. фут.} & 166. h &= \frac{4V}{P} \cdot \pi = 31,4159; \\
 S &= \frac{4V}{l} \cdot \pi = 62,8318. & 167. h &= \frac{q^2}{V} \cdot \pi = 0,031 \text{ арш.}; & S &= 2q\pi = 1,885 \square \text{ аршинъ.} \\
 168. h &= \sqrt[3]{\frac{m^2 V}{n^2 \pi}} = 0,05; & S &= 2 \sqrt[3]{\frac{m V^2}{n}} \pi = 0,31.
 \end{aligned}$$

169. $h = 1,7205$ дециметра; $r = 0,4301$ дециметра. 170. Если радиусъ основанія увеличимъ въ $m=2$ разъ, то объемъ увеличится въ $m^2=4$ разъ; если же высота увеличится въ $m=2$ разъ, то объемъ увеличится въ $m=2$ разъ. 171. Поверхность увеличится въ $m^2=9$ разъ, а объемъ въ $m^3=27$ разъ. 172. Высота и объемъ увеличатся въ $m=4$ разъ. 173. Радиусъ и боковая поверхность уменьшатся въ $\sqrt{m}=3$ разъ. 174. Объемы прямо-пропорціональны радиусамъ основаній и обратно-пропорціональны ихъ высотамъ. 175. Поверхности обратно-пропорціональны радиусамъ основаній и прямо-пропорціональны квадратнымъ корнямъ изъ высотъ. 176. Поверхности и объемы прямо-пропорціональны неравнымъ сторонамъ прямоугольника. 177. Поверхности относятся, какъ 25 къ 16, а объемы, какъ 125 къ 64. 178. $S = \frac{2\pi r^2(h+r)}{r} = 167,6 \square \text{ арш.}; V = \frac{\pi h r^3}{r} = 129,3 \text{ к. арш.}$

179. $\frac{m^2 P}{m^2 + n^2}$ и $\frac{n^2 P}{m^2 + n^2}$. 180. $\frac{m^3 Q}{m^3 + n^3}$ и $\frac{n^3 Q}{m^3 + n^3}$. 181. $\frac{\pi a^2 m h}{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2}$ и $\frac{\pi a^2 n h \sqrt{n}}{(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2 \sqrt{m}}$. 182. $S' = \frac{a(a+2\pi b)}{2\pi}$ и $V = \frac{a^2 b}{4\pi}$ или $S' = \frac{b(b+2\pi a)}{2\pi}$ и $V = \frac{ab^2}{4\pi}$.

183. $r = \sqrt{r^2 - \frac{V}{\pi l}}$. 184. 0,012л куб. аршина. 185. Поверхность $= \frac{S h^2}{h^2}$ и $V = \frac{\pi h^3}{h^3} \left(\sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{S}{2\pi}} - \frac{h}{2} \right)^2$. 186. $\sqrt[3]{\frac{1}{V V'}} \cdot \sqrt{V^2 + V'^2}$. 187. $S' = \frac{2m+n}{2m} S = 19,36$ и $V = \frac{S}{4} \sqrt{\frac{ns}{m+n}} = 4,928$. 188. $\frac{S}{\sqrt{2\pi(S+S_1)}} = 1\frac{1}{4} \square \text{ арш.}$ и $\frac{S_1}{\sqrt{2\pi(S+S_1)}} = 2\frac{1}{4} \square \text{ арш.}$ 189. $V = \frac{\pi(m-n)^2 h^3}{n^2}$; $S' = \frac{2(m-n)\pi h^2}{n}$ и $S = \frac{2m(m-n)\pi h^2}{n^2}$.

190. $S = 2m \sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{n^2(m-n)}}$; $r = \sqrt[3]{\frac{(m-n)V}{n\pi}}$ и $h = \sqrt[3]{\frac{n^2 V}{(m-n)^2 \pi}}$.

191. $\pi \left(\frac{a^2}{9} + \frac{S}{3\pi} - \frac{a}{3} \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{S}{6\pi}} \right)$. 192. $S = \frac{2\pi r^2(a+b)}{\sqrt{4r^2 - (a-b)^2}}$; $V = \frac{\pi r^3(a+b)}{\sqrt{4r^2 - (a-b)^2}}$.

193. $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2 h$ и $\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2 h$. 194. $S' = \frac{2}{3}\pi a^2$; $V = \frac{\pi}{4} a^3$.

195. $S' = \pi a^2(1 + \sqrt{2})$; $V = \frac{\pi}{2} a^3$. 196. $S' = \pi h \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2) = 90\pi \square \text{ арш.}; V = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{4} h = 100\pi \text{ куб. арш.}$ 197. $S = \frac{\pi a h}{\sqrt{3}}$; $V = \frac{\pi a^2 h}{12}$. 198. $S = \pi a h$;

$$V = \frac{\pi a^2 h}{4}. \quad 199. S = \pi a h \sqrt{3}; V = \frac{3\pi a^2 h}{4}. \quad 200. S = \pi a h (\sqrt{2} + 1); V = \frac{\pi a^2 h}{4} (3 + 2\sqrt{2}).$$

$$201. S = \pi a h (\sqrt{5} + 1); V = \frac{\pi a^2 h}{2} (3 + \sqrt{5}). \quad 202. S = \frac{2\pi a h}{\sqrt{3}}; V = \frac{\pi a^2 h}{3}.$$

$$203. S = \pi a h \sqrt{2}; V = \frac{\pi a^2 h}{2}. \quad 204. S = 2\pi a h; V = \pi a^2 h. \quad 205. S = \pi a h \sqrt{4 + 2\sqrt{2}};$$

$$V = \pi a^2 h (1 + \sqrt{\frac{1}{2}}). \quad 206. S = \pi a h (\sqrt{5} + 1); V = \frac{\pi a^2 h}{2} (3 + \sqrt{5}). \quad 207. \frac{\pi r^2 k^2}{h^2} = \frac{4}{9} \pi.$$

$$208. \text{ На расстоянии } hr \sqrt{\frac{\pi}{q}} = 0,48 \text{ арш. отъ вершины. } 209. a = \sqrt{r^2 + h^2} = 1\frac{1}{2}; S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = 5,23; S' = \pi r (r + \sqrt{r^2 + h^2}) = 8,37; V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 1,4.$$

$$210. h = \sqrt{a^2 - r^2} = 12; S = \pi r a = 204,4; S' = \pi r (a + r) = 282,6; V = \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2} = 314. \quad 211. a = \frac{S}{\pi r} = 8; h = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = \sqrt{55}; V = \frac{\pi r^2 h}{3} = 69,12. \quad 212. a = \frac{S'}{\pi r} - r = 5;$$

$$h = \sqrt{\frac{S'}{\pi r} \left(\frac{S'}{\pi r} - 2r \right)} = 4; S = S' - \pi r^2 = 15\pi; V = \frac{1}{3} r \sqrt{S' (S' - 2\pi r^2)} = 12\pi.$$

$$213. h = \frac{3V}{\pi r^2} = 20; a = \sqrt{r^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 r^4}} = 29; S = \pi r (r + a) = 3300. \quad 214. r = \sqrt{a^2 - h^2} = 4;$$

$$S = \pi a \sqrt{a^2 - h^2} = 62,8; V = \frac{1}{3} \pi h (a^2 - h^2) = 50,24. \quad 215. r = \sqrt{\frac{S'}{\pi} + \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}} = 1;$$

$$h = \sqrt{a^2 - r^2} = 2,83; S = \pi r a = 37\frac{1}{2}; V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 8,89. \quad 216. r = \sqrt{\sqrt{\frac{h^4}{4} + \frac{S^2}{\pi^2}} - \frac{h^2}{2}} = 8;$$

$$a = \sqrt{\sqrt{\frac{h^4}{4} + \frac{S^2}{\pi^2}} + \frac{h^2}{2}} = 10; S' = \pi r (a + r) = 144\pi; V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 128\pi.$$

$$217. r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} = \frac{8}{3}; a = \sqrt{h^2 + \frac{3V}{\pi h}} = 1\frac{1}{3}; S = \pi \sqrt{\frac{3V}{\pi h} \left(h^2 + \frac{3V}{\pi h} \right)} = 2\frac{58}{56}.$$

$$218. r = \sqrt{\frac{S' - S}{\pi}} = \frac{3}{4}; a = \frac{S}{\pi r} = \frac{5}{4}; h = \sqrt{a^2 - r^2} = 1; V = \frac{1}{3} h (S' - S) = 0,58875.$$

$$219. r = \sqrt{\frac{S'}{4\pi} \pm \sqrt{\frac{S'^2}{16\pi^2} - \frac{9V^2}{2\pi S'}}}; h = \frac{2S'}{3V} \left(\frac{S'}{4\pi} \pm \sqrt{\frac{S'^2}{16\pi^2} - \frac{9V^2}{2\pi S'}} \right).$$

$$220. \text{ Уменьшится въ } m=4 \text{ разъ. } 211. \text{ Уменьшится въ } m=6 \text{ разъ.}$$

$$222. \text{ Увеличится въ } nm \text{ разъ. } 223. \text{ Объемъ увеличится въ } m^3=27 \text{ разъ,}$$

$$\text{а поверхности въ } m^2=9 \text{ разъ. } 224. \text{ Поверхности и объемы относятся, какъ катеты. } 225. \text{ Относятся, какъ высоты параллелограмма.}$$

$$226. \sqrt{3} : \sqrt{2}. \quad 227. \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{3}. \quad 228. \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24} = 0,12 \text{ куб. метра; } S' = \frac{3}{4} \pi a^2 =$$

$$= 1,51 \square \text{ метра. } 229. 3\sqrt[3]{3\pi V^2} = 6,33 \square \text{ саж. } 230. \frac{S}{9} \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 0,063 \text{ куб. аршина.}$$

$$231. \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{\pi} (26\sqrt{3} - 45)}. \quad 232. 3\sqrt[3]{3\pi V^2} = 1,46 \text{ фута. } 233. \frac{S}{3n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n} \cdot \frac{S}{\pi}}.$$

$$234. h = \sqrt[3]{3(n^2 - 1) \cdot \frac{V}{\pi}}; r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi \sqrt{n^2 - 1}}}. \quad 235. \frac{S}{S_1} = \frac{h^2}{h_1^2} = \frac{4}{9}; \frac{V}{V_1} = \frac{h^3}{h_1^3} = \frac{8}{27}.$$

$$236. \frac{\pi r^2 h_1^3}{3h^2} = 4,712 \text{ куб. фута. } 237. r \sqrt{\frac{S_1}{S}} = 3\frac{3}{7} \text{ аршина. } 238. \text{ На } h\sqrt[3]{\frac{V}{2}} =$$

- = 2,12 арш. 239. На $h\sqrt{\frac{m}{m+n}} = 1\frac{18}{21}$ саж. 240. На $h\sqrt{\frac{m}{m+n+p}} = 1,2$ сажени и $h\sqrt{\frac{m+n}{m+n+p}} = 1,8$ сажени. 241. На $h\sqrt{\frac{m}{m+n}}$. 242. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9V\sqrt{1}}{\pi^2}}$.
 243. ma и $a\sqrt{1-m^2}$. 244. Плоскость сечения отстоит от вершины на $\sqrt{a(a-R)}$. 245. $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{S_1-S}{S_1+S}} = 1,15467 \square$ саж. 246. $\frac{\sqrt{2(a^3-4b^3)}}{2a}$ и $\frac{a^3+4b^3}{a\sqrt{2(a^3-4b^3)}}$.
 247. $\frac{\pi R}{d} \cdot (d^2-R^2)$ и $\frac{\pi R^2}{d^3} \cdot (d^2-R^2)^2$. 248. $\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2} \cdot R$.
 249. $S' = \frac{\pi r H^2}{(H-h)^2} \left\{ r + \sqrt{r^2 + (H-h)^2} \right\}$; $V = \frac{\pi r^2 H^3}{3(H-h)^2}$. 250. $h_1 = \frac{h}{r} \left(r \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{rS}{2\pi h}} \right)$;
 $r_1 = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{rS}{2\pi h}}$. 251. $S' = \frac{4}{9}\pi a^2$; $V = \frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{81}$. 252. $\sqrt{\frac{1944\pi V^2}{35}}$.
 253. $S = \frac{\pi a}{12}\sqrt{12h^2+a^2}$; $V = \frac{\pi a^2 h}{36}$; $S_1 = \frac{\pi a}{3}\sqrt{3h^2+a^2}$; $V_1 = \frac{\pi a^2 h}{9}$.
 254. $S = \frac{\pi a}{4}\sqrt{4h^2+a^2}$; $V = \frac{\pi a^2 h}{12}$; $S_1 = \frac{\pi a}{2}\sqrt{2h^2+a^2}$; $V_1 = \frac{\pi a^2 h}{6}$.
 255. $S = \frac{\pi a}{4}\sqrt{12h^2+9a^2}$; $V = \frac{\pi a^2 h}{4}$; $S_1 = \pi a\sqrt{h^2+a^2}$; $V_1 = \frac{\pi a^2 h}{3}$.
 256. $S = \frac{\pi a}{4}\sqrt{4(5+2\sqrt{5})h^2+5(9+4\sqrt{5})a^2}$; $V = \frac{\pi a^2 h(5+2\sqrt{5})}{4}$;
 $S_1 = \frac{\pi a}{2}\sqrt{2(3+\sqrt{5})h^2+2(7+3\sqrt{5})a^2}$; $V = \frac{\pi a^2 h(3+\sqrt{5})}{6}$. 257. $\frac{\pi r^3}{27}$ и $\frac{8\pi r^3}{27}$; $\frac{2\pi r^2}{3\sqrt{3}}$
 и $\frac{8\pi r^2}{3\sqrt{3}}$. 258. $S = 2\pi a^2\sqrt{3}$; $V = \pi a^3$. 259. $h = \sqrt{a^2 - (r-r_1)^2} = 3$; $S = \pi a(r+r_1) =$
 $= 125,6$; $S' = S + \pi(r^2 + r_1^2) = 251,2$; $V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r_1^2 + rr_1) = 163,28$.
 260. $a = \sqrt{h^2 + (r-r_1)^2} = 1\frac{1}{4}$; $S = \pi a(r+r_1) = 6\frac{2}{3}$; $S' = S + \pi(r^2 + r_1^2) = 22\frac{22}{36}$; $V =$
 $= \frac{\pi h}{3}(r^2 + r_1^2 + rr_1) = 5,5$. 261. $a = \frac{S}{\pi(r+r_1)} = 5$; $h = \sqrt{a^2 - (r-r_1)^2} = 4$;
 $V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r_1^2 + rr_1) = 163\frac{3}{7}$. 262. $h = \frac{3V}{\pi(r^2+r_1^2+rr_1)} = 5$; $S = \pi(r+r_1)h = 219,8$.
 263. $r_1 = \sqrt{\frac{S'-S}{\pi}} - r = 1$; $a = \frac{S}{\pi(r+r_1)} = 5$; $h = \sqrt{a^2 - (r-r_1)^2} = 3$;
 $V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r_1^2 + rr_1) = 31\pi$. 264. $\varrho = \sqrt{\frac{r^2+R^2}{2}}$; $\frac{\varrho-r}{R-r} \cdot h$. 265. $\pi ab\sqrt{a^2+b^2}$.
 266. $\frac{2}{3}\pi a^3\sqrt{3}$. 267. $\frac{2}{h}$. 268. $S = \frac{\pi(a+b)}{12}\sqrt{12h^2+(a-b)^2}$; $V = \frac{\pi h}{36}(a^2+b^2+ab)$;
 $S_1 = \frac{\pi(a+b)}{3}\sqrt{3h^2+(a-b)^2}$; $V = \frac{\pi h}{9}(a^2+b^2+ab)$. 269. $S = \frac{\pi(a+b)}{4}\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$;
 $V = \frac{\pi h}{12}(a^2+b^2+ab)$; $S_1 = \frac{\pi(a+b)}{2}\sqrt{2h^2+(a-b)^2}$; $V_1 = \frac{\pi h}{6}(a^2+b^2+ab)$.
 270. $S = \frac{\pi(a+b)}{4}\sqrt{12h^2+9(a-b)^2}$; $V = \frac{\pi h}{4}(a^2+b^2+ab)$;
 $S_1 = \pi(a+b)\sqrt{h^2+(a-b)^2}$; $V_1 = \frac{\pi h}{3}(a^2+b^2+ab)$.

271. $\frac{1}{4}\pi a^3(5+2\sqrt{5})$. 272. $\frac{9}{2}\pi a^3$. 273. $2\pi a^3(3+2\sqrt{2})$. 274. $\frac{5}{2}\pi a^3(5+2\sqrt{5})$.
 275. $3\pi a^3(7+4\sqrt{3})$. 276. $S=2\pi R^2\sqrt{3}$; $V=\pi R^3$. 277. $S=\pi R^2(1+\sqrt{2}+\sqrt{4-\sqrt{8}})$; $V=\frac{1}{8}\pi R^3(2+\sqrt{2})$. 278. $S=6\pi r^2\sqrt{3}$; $V=\frac{8}{3}\pi r^3\sqrt{3}$. 279. $S=8\pi r^2\sqrt{2}$; $V=4\pi r^3$. 280. $S=5\pi r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $V=\frac{5}{4}\pi r^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. 281. $S=12\pi r^2$; $V=3\pi r^3\sqrt{3}$. 282. $S=16\pi r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $V=4\pi r^3\sqrt{2}$. 283. $S=10\pi r^2(V\sqrt{5}-1)$; $V=\frac{5}{2}\pi r^3\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. 284. $S=12\pi r^2(V\sqrt{6}-V\sqrt{2})$; $V=6\pi r^3$. 285. $\pi(R^2-k^2)=5\frac{1}{2}$ □ аршинъ. 286. $\sqrt{R^2-\frac{q}{\pi}}=\frac{1}{4}$ фута. 287. $\sqrt{k^2+\frac{q}{\pi}}=1,22$ сажени.
 288. $R\pm\sqrt{R^2-r^2}=0,9$ метра и 0,1 метра. 289. $2\pi\sqrt{k(2R-k)}=94,25$ саж. 290. $\pi\left(\frac{r^3+k^3}{2k}\right)^2=25\pi$ □ верш. 291. $S=4\pi R^2=113,04$ □ арш.; $V=\frac{4}{3}\pi R^3=113,04$ куб. арш. 292. $S=\pi d^2=19,63$ □ фута; $V=\frac{1}{6}\pi d^3=8,18$ куб. фута. 293. $S=\frac{a^2}{\pi}=12,56$ □ саж.; $V=\frac{a^3}{6\pi^2}=4,19$ куб. саж. 294. $S=4q=9$ □ сажени; $V=\frac{4q}{3}\sqrt{\frac{q}{\pi}}=2,54$ куб. саж. 295. $\sqrt{\frac{S}{2\pi}}=0,28$ фута. 296. $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}=0,62$ сажени. 297. $\sqrt{\pi S}=0,501$ метра. 298. $\sqrt[3]{6\pi^2 V}=1,9$ сажени. 299. $S=\frac{360^2 b^2}{m^2\pi}=\frac{1}{\pi}=0,32$ □ аршина; $V=\frac{360^3 b^3}{6m^3\pi^2}=\frac{1}{6\pi^2}=0,02$ куб. аршина.
 300. $\sqrt[3]{36\pi V^2}=1,46$ □ саж. 301. $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}=0,75$ куб. арш. 302. $R\sqrt{\frac{m}{n}}=4$ арш. 303. $\frac{R}{\sqrt{m}}=\frac{11}{15}$ фута. 304. S увел. въ $m^2=25$ разъ; V увел. въ $m^3=125$ разъ. 305. S умен. въ $m^2=16$ разъ; V умен. въ $m^3=64$ разъ. 306. S увел. въ $m=9$ разъ; V увел. въ $m\sqrt{m}=27$ разъ. 307. S умен. въ $m^2=100$ разъ; V умен. въ $m^3=1000$ разъ. 308. Умен. въ $\sqrt{m}=8$ разъ. 309. Увел. въ $\sqrt[3]{m}=12$ разъ. 310. Увел. въ $m\sqrt{m}=27$ разъ. 311. Уменьшится въ $\sqrt[3]{m^2}=4$ раза. 312. На $R(\sqrt{m}-1)=46$ арш. 313. На $R(1-\sqrt[3]{\frac{1}{m}})=10,8$ фута. 314. $\sqrt{\frac{m^2}{n^2}}=\frac{16}{9}$. 315. $\sqrt{\frac{m^3}{n^3}}=\frac{125}{64}$. 316. $\frac{4}{3}\pi(R-a)^3=\frac{11}{21}$. 317. $R-\sqrt[3]{R^3-r^3+(r-a)^3}=3$ дюйм. 318. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}h(h+r)}=2,28$ фута. 319. $\frac{1}{4}a\sqrt[3]{3}=0,26$ аршина. 320. $\frac{a}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}=1,14$ метра. 321. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}r^2h}=1,8$ сажени.
 322. $S=\frac{4\pi a^2 m}{(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p})^2}=1,396$ □ с.; $V=\frac{4\pi a^3 m\sqrt{m}}{(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p})^3}=0,155$ куб. саж. 323. $\frac{4\pi a^3 m\sqrt{m}}{3(\sqrt{m}-\sqrt{n})^3}=14,137$ куб. фута и $\frac{4\pi a^3 n\sqrt{n}}{3(\sqrt{m}-\sqrt{n})^3}=4,189$ куб. аршина. 324. $\sqrt{(S_1\sqrt{S_1}+S_2\sqrt{S_2})^2}=4,33$. 325. $\sqrt{(\sqrt[3]{V_1^2}+\sqrt[3]{V_2^2})^3}=125$. 326. $\frac{2m^2n}{(m+n)^3}$ и $\frac{2mn^2}{(m+n)^3}$. 327. $\frac{R}{m+2}(\sqrt{m^2-3}-1)$. 328. $S=2\pi Rh=31,4$; $V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=14,65$.

$$829. h=R-\sqrt{R^2-r^2}=2; S=2\pi Rh=62,8; V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=54,43.$$

$$830. h=\frac{S}{2\pi R}=1; r=\frac{\sqrt{S(4\pi R^2-S)}}{2\pi R}=\sqrt{3}; V=\frac{S^2(6\pi R^2-S)}{24\pi^2 R^3}=\frac{5\pi}{3}.$$

$$831. h=\sqrt{\frac{S}{\pi}-r^2}=4; R=\frac{S}{2\sqrt{\pi S-\pi^2 r^2}}=3,12; V=\frac{h(S+2\pi r^2)}{6}=90,01.$$

$$832. R=\frac{S}{2\pi h}=2\frac{1}{2}; r=\sqrt{h\left(\frac{S}{\pi h}-h\right)}=2; V=\frac{h(3S-2\pi h^2)}{6}=\frac{13}{6}\pi. \quad 833. R=\frac{V}{\pi h^2}+$$

$$+\frac{h}{3}=2; S=\frac{6V+2\pi h^3}{3h}=12\pi. \quad 334. \text{Поверхности}=\frac{\pi d^2}{3}; \text{объемы}=\frac{7\pi d^3}{162}=\frac{28}{3}\pi,$$

$$\frac{13\pi d^3}{162}=\frac{52}{3}\pi \text{ и } \frac{7\pi d^3}{162}=\frac{28}{3}\pi. \quad 335. S=2\pi R(R-k)=10,6 \square \text{ фута}; S_1=2\pi R(R+k)=$$

$$=53,01 \square \text{ фута}; V=\frac{\pi(R-k)^2(2R+k)}{3}=3,53 \text{ к. ф.}; V_1=\frac{\pi(R+k)^2(2R-k)}{3}=$$

$$=44,18 \text{ к. фута}. \quad 336. S=\frac{4\pi R^2}{m+n}=60\pi; S_1=\frac{4\pi R^2}{m+n}=40\pi; V=\frac{4\pi^2(3n+m)\pi R^3}{3(m+n)^3}=$$

$$=108\pi; V_1=\frac{4\pi^2(3m+n)\pi R^3}{3(m+n)^3}=\frac{176\pi}{3}. \quad 337. \frac{2\pi R^2}{2\pi R^2-S}; 2R. \quad 338. \text{Высота мень-$$

$$\text{шего сегмента}=\frac{1}{4}R(7-\sqrt{17}). \quad 339. \text{Высота меньшего сегмента}=R(3-\sqrt{5}).$$

$$340. \text{Плоскость сечения отстоит от центра шара на } \frac{1}{2}R(3\pm\sqrt{9-8m}).$$

$$341. \text{На } \frac{R}{2}\left(\sqrt{\frac{m+9}{m+1}}-1\right) \text{ от центра.} \quad 342. R\left(1\pm\sqrt{\frac{2m}{n}-1}\right); \frac{R}{2} \text{ или } \frac{3R}{2}.$$

$$343. r=\sqrt{h(2R-h)}=4,58; S=2\pi Rh=94,25; V=\frac{2}{3}\pi R^2 h=157,08.$$

$$344. h=R-\sqrt{R^2-r^2}=0,5; S=2\pi Rh=7,85; V=\frac{2}{3}\pi R^2 h=6,54. \quad 345. h=\frac{S}{2\pi R}=2;$$

$$r=\sqrt{h(2R-h)}=4; V=\frac{SR}{3}=\frac{100\pi}{3}. \quad 346. S=\frac{3V}{R}=12; h=\frac{3V}{2\pi R^2}=\frac{3}{\pi}=0,95;$$

$$r=\sqrt{h(2R-h)}=1,7. \quad 347. R=\frac{S}{2\pi h}=1\frac{1}{4}; r=\sqrt{\frac{S}{\pi}-h^2}=1; V=\frac{S^2}{6\pi h}=1\frac{107}{168}.$$

$$348. R=\sqrt{\frac{3V}{2\pi h}}=1\frac{1}{4}; r=\sqrt{\frac{6Vh}{\pi}-h^2}=1; S=\sqrt{6\pi Vh}=15,7.$$

$$349. R=\frac{3V}{S}=30; h=\frac{S^2}{6\pi V}=12; r=\sqrt{h(2R-h)}=24. \quad 350. 1) \frac{1}{3}\pi R^2;$$

$$2) \frac{1}{3}\pi R^2(2-\sqrt{3}). \quad 351. h=\sqrt{R^2-r_1^2}-\sqrt{R^2-r^2}=2; S=2\pi Rh=125,6; S_1=2\pi Rh+$$

$$+\pi(r^2+r_1^2)=439,6. \quad 352. r_1=\sqrt{r^2-h^2-2h\sqrt{R^2-r^2}}=3; S=2\pi Rh=31,42;$$

$$V=\frac{\pi h}{6}\left[3(r^2+r_1^2)+h^2\right]=39,77. \quad 353. h=\frac{S}{2\pi R}=1; r_1=\sqrt{r^2-h^2-2h\sqrt{R^2-r^2}}=3;$$

$$V=\frac{\pi h}{6}\left[3(r^2+r_1^2)+h^2\right]=\frac{38}{3}\pi. \quad 354. S=2\pi Rh=10\pi;$$

$$r \text{ и } r_1=\sqrt{R^2-\left(\sqrt{R^2-\frac{V}{\pi h}-\frac{h^2}{12}}+\frac{h}{2}\right)^2}=4 \text{ и } 3. \quad 355. h=\frac{S}{2\pi R}=2;$$

$$r \text{ и } r_1=\sqrt{R^2-\left(\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}-\frac{S^2-S}{2\pi}}+\frac{h}{2}\right)^2}=8 \text{ и } 6.$$

$$V = \frac{\pi h}{6} \left[6R^2 - \frac{3(S' - S)}{\pi} + h^2 \right] = \frac{304}{3}\pi. \quad 356. h = \frac{S}{2\pi R} = \frac{1}{4}; \quad r \text{ и } r_1 =$$

$$= \sqrt{R^2 - \left(\sqrt{R^2 - \frac{V}{\pi h} - \frac{h^2}{12} + \frac{h^2}{2}} \right)^2} = 1 \text{ и } \frac{3}{8}. \quad 357. R = \sqrt{\left(\frac{r^2 - r_1^2 - h^2}{2h} \right)^2 + r^2} = 5;$$

$$S = 2\pi R h = 31,4; \quad V = \frac{\pi h}{6} \left[3(r^2 + r_1^2) + h^2 \right] = 39,79. \quad 358. r_1 = \sqrt{\frac{S' - S}{\pi} - r^2} = 3;$$

$$h = \sqrt{\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2} + 4r^2 r_1^2} - \frac{S' - S}{\pi}} = 1; \quad V = \frac{\pi h}{6} \left[3(r^2 + r_1^2) + h^2 \right] = \frac{38}{3}\pi.$$

$$359. V = \frac{\pi}{6} \left\{ 2(r^2 + r_1^2) + \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2} + 4r^2 r_1^2} \right\} \times \sqrt{\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2} + 4r^2 r_1^2} - (r^2 + r_1^2)}.$$

$$360. \pi k(R^2 - \frac{1}{2}h^2) = 5,51 \text{ куб. арш. съ точн. до } 0,01.$$

$$361. \frac{\pi(m+n)h^2}{(m-n)^2} \left[2\sqrt{mn}h^2 + (m-n)^2 R^2 - (m+n)h \right] + \frac{\pi h^3}{6}. \quad 362. \sqrt{\frac{V}{4\pi b} - \frac{b^2}{12}} \pm \frac{b}{2}.$$

$$363. \frac{4\pi R^2 R'^2}{3(R+R')}. \quad 364. V = \frac{\pi(R+R'-d)^2}{12d} \left[(2R+2R'+d)d - 3(R-R')^2 \right].$$

$$365. 1) S : S' = 1 : 4; V : V' = 1 : 8. \quad 2) S : S' = 1 : 2; V : V' = 1 : V\bar{8}.$$

$$366. 2R(m \pm \sqrt{m^2 - 2m}). \quad 367. \frac{1}{2}R(\sqrt{2m+1} \pm \sqrt{2m-3}). \quad 368. R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; r = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

$$369. R = \frac{a\sqrt{3}}{2}; r = \frac{a}{2}. \quad 370. R = \frac{a}{\sqrt{2}}; r = \frac{a}{\sqrt{6}}. \quad 371. R = \frac{a}{4}(\sqrt{15} + \sqrt{3});$$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}. \quad 372. R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}; r = \frac{a}{4} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}. \quad 373. a = \frac{2}{3}R\sqrt{6}; r = \frac{1}{3}R.$$

$$374. a = \frac{2}{3}R\sqrt{3}; r = \frac{1}{3}R\sqrt{3}. \quad 375. a = R\sqrt{2}; r = \frac{R\sqrt{3}}{3}. \quad 376. a = \frac{R(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{3};$$

$$r = R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}. \quad 377. a = \frac{1}{3}R\sqrt{10(5-\sqrt{5})}; r = R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}. \quad 378. S = \frac{8}{3}R^2\sqrt{3};$$

$$V = \frac{8}{27}R^3\sqrt{3}. \quad 379. S = 8R^2; V = \frac{8}{9}R^3\sqrt{3}. \quad 380. S = 4R^2\sqrt{3}; V = \frac{4}{3}R^3.$$

$$381. S = 2R^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}; V = \frac{2}{9}R^3\sqrt{30(3+\sqrt{5})}. \quad 382. S = 2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15});$$

$$V = \frac{2}{3}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}. \quad 383. \frac{1}{24}. \quad 384. 0,03 \text{ □ метра.} \quad 385. 25,46 \text{ □ аршина.}$$

